

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ РЕЛЬСА ПРИ ЕГО КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С КОЛЕСОМ

д.т.н. ¹Бородачев Н.М., д.т.н. ²Тариков Г.П., асп. ³Акулова Е.М.

¹Национальный авиационный университет Украины, Киев

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

³Гомельский государственный технический университет им. П.О.Сухого, Гомель

Решается задача об определении долговечности рельса в системе рельс – колесо. При этом приводится новый способ определения долговечности рельса, учитывающий контактный характер взаимодействия рельса и колеса. Этот способ основан на совместном использовании теории контактных задач, механики разрушения и вопросов усталостного разрушения.

Определяется закон распределения контактного давления по поверхности эллиптической площадки контакта и ее размеры.

Получены формулы для определения нормальных напряжений в точках, расположенных под площадкой контакта. Для этого, в соответствии с гипотезой Герца, при определении напряжений в окрестности площадки контакта головка рельса заменяется упругим полупространством. Определены нормальные напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} на оси x_3 , проходящей через центр площадки контакта и направленной перпендикулярно к ней.

Применяя третью теорию прочности, определены координаты наиболее напряженной точки и получены значения главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 в этой точке. Определена долговечность рельса с использованием эмпирической формулы Мэнсона.

По каждому этапу решения задачи рассмотрены числовые примеры.

Ключевые слова: контактная задача, долговечность, контактные напряжения, главные напряжения, площадка контакта, головка рельса.

Введение. В связи с ростом грузонапряженности на железных дорогах резко увеличился выход из строя рельсов по наиболее опасному дефекту – контактно-усталостному повреждению головки рельса.

Известно [1], что рельс и колесо подвергаются действию нагрузок, изменяющихся во времени. Под действием переменных нагрузок в рельсе накапливаются усталостные повреждения, которые через некоторый промежуток времени, могут достигнуть предельного уровня и вследствие этого привести к выходу его из строя.

Поэтому задача о накоплении усталостных повреждений в системе рельс – колесо, является актуальной. При решении этой задачи, следует в первую очередь, обратить внимание на вопросы долговечности рельса. Существует несколько моделей накопления усталостных повреждений и определения долговечности элементов конструкций. Однако, эти методы не могут быть применены к системе рельс – колесо, так как они не учитывают контактный характер взаимодействия рельса и колеса.

Контактная задача для системы рельс – колесо. Контактная задача для системы рельс – колесо рассматривалась в работе [2]. Эта задача сведена к решению двумерного интегрального уравнения первого рода

$$\delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} = \frac{q_1 + q_2}{2\pi} \iint_{\Omega} p(y_1, y_2) \frac{\partial y_1 \partial y_2}{R} \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega \quad (1)$$

Здесь x_1, x_2, x_3 – прямоугольные координаты, δ – сближение рельса и колеса, ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, $p(x_1, x_2)$ – давление на эмпирической площадке контакта Ω ,

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1-\nu_1}{\mu_1}; \mathcal{G}_2 = \frac{1-\nu_2}{\mu_2}; R = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Индекс 1 относится к рельсу, а индекс 2 – к колесу. Вопросы, связанные с определением величин R_1 и R_2 , рассматриваются в [3].

Решение интегрального уравнения (1) получено в такой форме:

$$p(x_1, x_2) = p_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2)$$

где a, b – полуоси эллиптической площадки контакта Ω ;

$p_0 = p_{\max}$ – наибольшее давление на площадке контакта.

Формула (2) описывает закон распределения нормального давления по площадке контакта.

Имеем [4 – 6]:

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} = \frac{3}{2} p_c; p_c = \frac{P}{\pi ab} \quad (3)$$

где P – нормальная сила прижимающая колесо к рельсу;

p_c – среднее давление на площадке контакта.

Большая полуось площадки контакта

$$a = [(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) P R_1]^{1/3} \alpha_a; \alpha_a = \left[\frac{3}{2\pi} \mathbf{D}(e) \right]^{1/3}, \quad (4)$$

сближение рельса и колеса

$$\delta = \left[(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) \frac{P}{R_1^{1/2}} \right]^{2/3} \alpha_\delta; \alpha_\delta = \left[\frac{9}{32\pi^2 \mathbf{D}(e)} \right]^{1/3} \mathbf{K}(e),$$

$$\mathbf{D}(e) = \frac{1}{e^2} [\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)].$$

Здесь e – эксцентриситет эллиптической площадки контакта; $\mathbf{K}(e)$ и $\mathbf{E}(e)$ – полные эллиптические интегралы.

Эксцентриситет e можно найти из соотношения

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(1-e^2)[\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)]}{\mathbf{E}(e) - (1-e^2)\mathbf{K}(e)}. \quad (5)$$

Малую полуось b эллиптической площадки контакта определяем по формуле

$$b = a(1 - e^2)^{1/2}. \quad (6)$$

Ось x_1 направлена параллельно продольной оси рельса.

Числовой пример №1. Упругие характеристики материала: коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$; модуль сдвига $\mu = 8,1 \cdot 10^4$ МПа.

Определяем величины R_1 и R_2 по формулам

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2''}; \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_1''}. \quad (7)$$

В данном случае имеет место контакт поверхностей вращения с осями, расположенными накрест при внешнем соприкосновении рельса и колеса (рисунок 1).

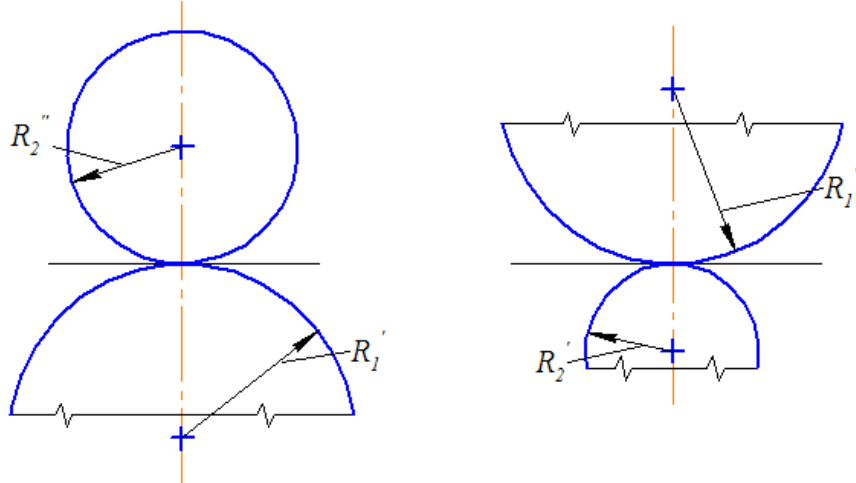


Рис. 1. Расчетная схема

Радиус головки рельса Р65 равен 300 мм; следовательно $R_2' = 300$ мм. Диаметр бандажа равен 950 мм, поэтому $R_2'' = 475$ мм. Далее $R_1'' = R_1' = \infty$. По формулам (7) находим $R_1 = 475$ мм; $R_2 = 300$ мм. Следовательно $R_2/R_1 = 0,632$.

Величину эксцентриситета e можно определить по формуле (5) методом последовательных приближений или по таблице 1 с помощью интерполяции.

Таблица 1 – Значения эксцентриситета e

e^2	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
R_2/R_1	1	0,963	0,925	0,885	0,846	0,806	0,765
e^2	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
R_2/R_1	0,724	0,682	0,637	0,594	0,549	0,502	0,454
e^2	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1
R_2/R_1	0,405	0,353	0,297	0,238	0,174	0,101	0

В результате находим $e^2 = 0,46$.

В этом случае

$$K = 1,822 ; E = 1,371 ;$$

$$D = \frac{1}{0,46} (1,822 - 1,371) = 0,980 .$$

По формулам (4)

$$\alpha_a = \left(\frac{3 \cdot 0,980}{2\pi} \right)^{1/3} = 0,776 ,$$

$$a = \left[\frac{2(1 - 0,28)}{8,1 \cdot 10^{10}} \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 0,475 \right]^{1/3} \cdot 0,776 = 6,65 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6,65 \text{ мм} .$$

Здесь принято, что $P = 80$ кН.

По формуле (6) находим малую полуось b

$$b = a \sqrt{1 - e^2} = 6,65 \sqrt{1 - 0,46} = 4,89 \text{ мм} .$$

Далее, находим наибольшее давление на площадке контакта по формуле (3)

$$p_0 = p_{\max} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{2 \pi \cdot 6,65 \cdot 4,89} = 1,18 \cdot 10^9 \text{ Па} = 1,18 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Этот пример рассмотрен без учета износа рельса и колеса.

Определение главных напряжений в окрестности площадки контакта. Известно, что наибольшего значения расчетные напряжения по теориям прочности достигают на некоторой глубине под площадкой контакта [7]. Будем использовать третью теорию прочности. Чтобы найти наиболее напряженную точку, нужно сначала найти нормальные напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} в точках, расположенных на оси x_3 . В точках оси x_3 нормальные напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} являются главными напряжениями. Для их определения, в соответствии с гипотезой Герца, заменим головку рельса упругим полупространством. Тогда формулы для определения нормальных напряжений на оси x_3 примут такой вид [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(0,0,\rho) &= \frac{3p_c}{4\pi} \int_{-\beta^{-1}}^{\beta^{-1}} dt_2 \int_{-\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}}^{\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}} (1-t_1^2 - \beta^2 t_2^2)^{1/2} \left\{ -2\nu \frac{\rho}{R^3} - \right. \\ &\quad \left. - (1-2\nu) \left[\frac{t_2^2 + \rho^2}{R^3(R+\rho)} - \frac{t_1^2}{R^2(R+\rho)^2} \right] - \rho \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{3t_1^2}{R^5} \right) \right\} dt_1; \\ \sigma_{22}(0,0,\rho) &= \frac{3p_c}{4\pi} \int_{-\beta^{-1}}^{\beta^{-1}} dt_2 \int_{-\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}}^{\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}} (1-t_1^2 - \beta^2 t_2^2)^{1/2} \left\{ -2\nu \frac{\rho}{R^3} - \right. \\ &\quad \left. - (1-2\nu) \left[\frac{t_1^2 + \rho^2}{R^3(R+\rho)} - \frac{t_2^2}{R^2(R+\rho)^2} \right] - \rho \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{3t_2^2}{R^5} \right) \right\} dt_1; \\ \sigma_{33}(0,0,\rho) &= -\frac{3p_c}{4\pi} \int_{-\beta^{-1}}^{\beta^{-1}} dt_2 \int_{-\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}}^{\sqrt{1-\beta^2 t_2^2}} (1-t_1^2 - \beta^2 t_2^2)^{1/2} \frac{3\rho^3}{R^5} dt_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$t_1 = \frac{y_1}{a}; \quad t_2 = \frac{y_2}{a}; \quad \rho = \frac{x_3}{a}; \quad \beta = \frac{a}{b}; \quad R^2 = t_1^2 + t_2^2 + \rho^2.$$

Числовой пример №2.

Используя формулу (8) вычислим напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} в ряде точек, расположенных на оси x_3 .

Для расчета примем: коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$; полуоси a , b эллиптической площадки контакта (см. пример №1) $a = 6,65$ мм; $b = 4,89$ мм.

$$\text{Следовательно } \beta = \frac{a}{b} = \frac{6,65}{4,89} = 1,36; \quad \beta^2 = 1,85; \quad \beta^{-1} = 0,735.$$

Для вычисления величин σ_{11}/p_c , σ_{22}/p_c и σ_{33}/p_c по формулам (8) применим квадратурную формулу Гаусса. Вычисления выполнены для различных значений безразмерного параметра $\rho = x_3/a$. Результаты вычислений приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты вычислений

$\rho = \frac{x_3}{a}$	$-\frac{\sigma_{11}}{p_c}$	$-\frac{\sigma_{22}}{p_c}$	$-\frac{\sigma_{33}}{p_c}$
0	–	–	1,500
0,1	0,8375	0,8621	1,479
0,2	0,6132	0,5904	1,419
0,3	0,4408	0,3933	1,330
0,4	0,3121	0,2555	1,223
0,5	0,2181	0,1619	1,109
0,6	0,1508	0,0952	0,997
0,7	0,1026	0,0585	0,890
0,8	0,0687	0,0317	0,793

Как показывают предварительные вычисления, наибольшего значения расчетное напряжение по третьей теории прочности достигает в интервале $0,2 \leq \rho \leq 0,5$. Поэтому, дальнейшие расчеты выполнены именно в этом интервале значений параметра ρ . Довольно сложные интегралы, входящие в выражения (8), вычислялись приближенно с помощью квадратурных формул Гаусса. Погрешность этих вычислений не превышает 0,1%.

Определение главных напряжений в наиболее напряженной точке головки рельса. Найдем координаты точки, в которой имеет место наибольшее расчетное напряжение по третьей теории прочности. Для этого на основании данных, приведенных в таблице 2, строим интерполяционные полиномы

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma_{11}}{p_c} &= 1,1254 - 3,2065\rho + 3,5350\rho^2 - 1,5000\rho^3; \\ -\frac{\sigma_{22}}{p_c} &= 1,2229 - 4,1078\rho + 5,2300\rho^2 - 2,5167\rho^3; \\ -\frac{\sigma_{33}}{p_c} &= 1,4990 + 0,0367\rho - 2,5500\rho^2 + 1,8333\rho^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Таблица 2 и формулы (9) дают полное представление о распределении нормальных напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} в интервале $0,2 \leq x_3/a \leq 0,5$ в точках на оси x_3 .

Расчетное напряжение по третьей теории прочности определяется формулой

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (10)$$

где σ_1 – наибольшее главное напряжение; σ_3 – наименьшее главное напряжение.

Выясним, какие из напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} являются главными напряжениями σ_1 и σ_3 . Анализ данных, приведенных в таблице 2 показывает, что при $\rho > 0,15$ следует принять

$$\sigma_1 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}.$$

Подставляя вторую и третью формулы (9) в выражение (10), получаем

$$\frac{\sigma_{r3}}{p_c} = 0,2761 + 4,1445\rho - 7,7800\rho^2 + 4,3500\rho^3. \quad (11)$$

Чтобы найти координату наиболее напряженной точки, продифференцируем выражение (11). Затем приравняв нулю полученное соотношение получим

$$13,0500\rho^2 - 15,5600\rho + 4,1445 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение находим

$$\rho = 0,4017. \quad (12)$$

Таким образом, наибольшее расчетное напряжение по третьей теории прочности имеет место на оси x_3 на расстоянии $x_3 = 0,4017a$ от площадки контакта.

Подставляя (12) в (11) получаем

$$\max \sigma_{r3} = 0,9675 p_c. \quad (13)$$

Формула (13) определяет максимальное значение расчетного напряжения по третьей теории прочности в головке рельса на глубине под площадкой контакта.

Теперь можно найти главные напряжения в наиболее напряженной точке. Для этого подставим соотношение (12) в выражения (9) и учтем при этом, что

$$\sigma_1 = \sigma_{22}; \sigma_2 = \sigma_{11}; \sigma_3 = \sigma_{33} \quad (14)$$

В результате получим

$$\sigma_{11} = -0,3105 p_c; \sigma_{22} = -0,2536 p_c; \sigma_{33} = -1,2211 p_c. \quad (15)$$

Определение долговечности рельса. Долговечность рельса – это время в течение, которого усталостные повреждения достигнут предельного уровня. При анализе долговечности рельса будем использовать экспериментально установленную формулу Мэнсона [9], связывающую амплитуду деформаций цикла с числом циклов до разрушения. Эта формула в случае сложного напряженного состояния имеет такой вид:

$$\varepsilon_{ia} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{1-\psi} \right)^{0,6} \cdot N_P^{-0,6} + 1,75 \frac{\sigma_B}{E} \cdot N_P^{-0,12}. \quad (16)$$

Здесь ψ – поперечное сужение материала; σ_B – предел прочности материала; E – модуль Юнга; N_P – число циклов до разрушения; ε_{ia} – интенсивность амплитудных значений деформации.

Имеем

$$\varepsilon_{ia} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\varepsilon_{x_1a} - \varepsilon_{x_2a})^2 + (\varepsilon_{x_2a} - \varepsilon_{x_3a})^2 + (\varepsilon_{x_3a} - \varepsilon_{x_1a})^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (\gamma_{x_1x_2a}^2 + \gamma_{x_2x_3a}^2 + \gamma_{x_3x_1a}^2) \right]^{1/2},$$

где ε_{x_1a} , ε_{x_2a} , ε_{x_3a} , $\gamma_{x_1x_2a}$, $\gamma_{x_2x_3a}$, $\gamma_{x_3x_1a}$ – амплитудные значения циклически изменяющихся компонент деформации.

Цикл нагружения соответствует возрастанию прижимающей силы P от 0 до P .

Учитываем только интенсивность амплитудных значений деформации ε_{ia} , которая в упругой области равна

$$\varepsilon_{ia} = \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_i = \frac{\sigma_i}{3\mu}, \quad (17)$$

где

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Здесь σ_1 , σ_2 , σ_3 – главные напряжения в наиболее напряженной точке головки рельса.

На основании формул (14) и (15) имеем

$$\sigma_1 = -\alpha_1 p_c; \sigma_2 = -\alpha_2 p_c; \sigma_3 = -\alpha_3 p_c, \quad (19)$$

где

$$\alpha_1 = 0,2536; \alpha_2 = 0,3105; \alpha_3 = 1,2211.$$

Подставляя (19) в (18) получаем

$$\sigma_i = \frac{P_c}{\sqrt{2}} \left[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2 \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Таким образом, величина ε_{ia} , входящая в уравнение (16), на основании формул (17) и (20) определяется таким соотношением:

$$\varepsilon_{ia} = \frac{P_c}{3\sqrt{2} \cdot \mu} \left[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2 \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (16) получим уравнение для определения величины N_P – числа циклов нагружения до разрушения рельса.

Чтобы определить величину ε_{ia} нужно знать среднее напряжение (давление) p_c на площадке контакта и главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в наиболее напряженной точке головки рельса.

Числовой пример №3

Для решения уравнения (16) примем: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_B = 1,175 \cdot 10^3$ МПа; $\mu = 8,1 \cdot 10^4$ МПа; $\psi = 0,30$.

Величина p_c находится из результатов примера №1

$$p_c = \frac{P}{\pi ab} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{\pi \cdot 6,65 \cdot 4,89} = 7,83 \cdot 10^8 \text{ Па} = 0,783 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Подставляя числовые данные в (21) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ia} &= \frac{0,783 \cdot 10^3}{3\sqrt{2} \cdot 8,1 \cdot 10^4} \left[(0,2536 - 0,3105)^2 + (0,3105 - 1,2211)^2 + (1,2211 - 0,2536)^2 \right]^{1/2} = \\ &= 3,03 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (16) принимает такой вид:

$$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{1 - 0,30} \right)^{0,6} \cdot N_P^{-0,6} + 1,75 \frac{1,175 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^5} \cdot N_P^{-0,12} = 3,03 \cdot 10^{-3}$$

или

$$0,269 \cdot N_P^{-0,6} + 9,79 \cdot 10^{-3} \cdot N_P^{-0,12} = 3,03 \cdot 10^{-3}. \quad (22)$$

Чтобы облегчить решение уравнения (22), введем следующую замену переменной N_P :

$$N_P = 10^4 \cdot x.$$

Тогда (22) примет такой вид

$$0,269 \cdot 10^{-2,4} \cdot x^{-0,6} + 9,79 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-0,48} \cdot x^{-0,12} = 3,03 \cdot 10^{-3}.$$

Решая это уравнение, находим

$$x = 5,471.$$

Следовательно

$$N_P = 54710 \text{ циклов}. \quad (23)$$

В данном случае по прошествии числа циклов N_P , определенных по формуле (23), рельс выйдет из строя.

Можно подсчитать, сколько дней и сколько лет может простоять рельс до разрушения.

Естественно предположить, что за один цикл нагружения следует принять прохождение одного поезда по данному участку пути. Пусть за сутки пройдет по данному участку пути 15 поездов. Тогда за год

$$15 \cdot 365 = 5475 \text{ поездов.}$$

Количество лет до разрушения рельса

$$54710 / 5475 = 9,99 \text{ лет,}$$

или

$$9,99 \cdot 365 = 3646 \text{ дней.}$$

Заключение. Предложен способ определения долговечности рельса, работающего в условиях контактного взаимодействия с колесом. В основе метода лежит нахождение наиболее напряженной точки в головке рельса и определение главных напряжений в этой точке. Для определения числа циклов нагружения до разрушения используется формула Мэнсона.

Приведены числовые расчеты по предлагаемому способу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев, Н.М. Труды по теории упругости и пластичности/ Н.М. Беляев – М.: Гостехиздат, 1957. – 632 с.*
2. *Бородачев, Н.М. Контактное взаимодействие рельса и колеса/ Н.М. Бородачев, Г.П. Тариков, В.В. Комраков, Е.М. Акулова// Вестник Национального технического университета (Харьковский политехнический институт). –2014. – №29. – С.18-27.*
3. *Лурье, А.И. Теория упругости/ А.И. Лурье – М.: Наука, 1970. – 939 с.*
4. *Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия/ К. Джонсон – М.: Мир, 1989. – 509 с.*
5. *Штаерман, И.Я. Контактная задача теории упругости/ И.Я. Штаерман – М.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 270 с.*
6. *Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости/ Л.А. Галин – М.: Наука, 1980. – 303 с.*
7. *Gladwell, G.M.L. Contact problems in the classical theory of elasticity. Sijthoff and Nordhoff, 1980. – 232 с.*
8. *Тариков, Г.П. Определение напряжений под площадкой контакта в системе рельс – колесо/ Г.П. Тариков, Е.М. Акулова// Вестник ГГТУ им. П.О.Сухого. – 2015. – №3. – С.10-18.*
9. *Коллинз, Дж. Повреждение материалов в конструкциях/ Дж. Коллинз – М.: Мир, 1984. – 624 с.*

E-mail: tarikov-belarus@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2015