Проблемы физики, математики и техники, № 4 (29), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ю.С. Крук[1], **Ю.Е. Дудовская**[2]

[1]*Белорусский национальный технический университет*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

STATIONARY DISTRIBUTION INSENSITIVITY OF AN OPEN QUEUEING NETWORK WITH NON-ACTIVE CUSTOMERS AND MULTIMODE SERVICE STRATEGIES

J.S. Kruk[1], **Y.E. Dudovskaya**[2]

[1]*Belarusian National Technical University*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Исследуется стационарное распределение вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания, приборы в узлах которой могут функционировать в нескольких режимах. Заявки в узлах сети могут быть двух типов: обыкновенные (активные) заявки и временно неактивные заявки. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного состояния переходить в состояние, когда они могут получать обслуживание, и наоборот. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети по отношению к функциональной форме распределений величин работ, требующихся для обслуживания заявок, при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания*, *неактивные заявки*, *многорежимное обслуживание*, *инвариантность стационарного распределения.*

Stationary distribution of conditions probabilities of the open queueing network is investigated. Devices of the nodes can operate in several modes. There are two types of customers in the nodes: ordinary (active) customers and temporarily non-active customers. There are input flows of signals that allow customers to change the state: from non-active state pass into the state when they can receive service and backwards. Stationary distribution insensitivity with respect to functional form of distribution of work quantity for customer service is established.

Keywords: *queueing network*, *non-active customers*, *multimode service*, *stationary distribution insensitivity.*

Введение

В работе исследуется открытая сеть массового обслуживания, в узлах которой приборы могут функционировать в нескольких режимах. Режимы пронумерованы и характеризуют различную степень работоспособности узлов. С помощью введения многорежимного обслуживания можно моделировать ситуации, когда прибор может быть частично ненадежным. Полная потеря работоспособности прибора в настоящей работе не рассматривается. Впервые сети с многорежимными стратегиями обслуживания рассматривались в работе [1].

Заявки, ожидающие обслуживания в узлах сети, могут становиться временно неактивными. И в этом смысле можно говорить о «ненадежности» заявок. Неактивные заявки формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного состояния переходить в состояние, когда они могут получать обслуживание, и наоборот.

В работе [2] рассматривалась открытая сеть с неактивными заявками, для которой доказана инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функционального вида распределения величины работы, требующейся для обслуживания заявки.

В настоящей работе доказывается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функционального вида распределения величины работы, требующейся для обслуживания заявки, для модели сети массового обслуживания, которая является обобщением модели из работы [2] на случай многорежимного обслуживания.

1 Описание сети

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, состоящую из N узлов. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые требуют обслуживания, и временно неактивные, которые формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ. Каждая заявка входящего

© *Крук Ю.С., Дудовская Ю.Е.*, 2016

Репозиторий БНТУ

потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел с вероятностью p_{0i} $\left(\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1\right)$. Кроме того, в узлы сети поступают независимые простейшие потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i = \overline{1, N}$. Информационный сигнал, поступивший в i-ый узел с интенсивностью ν_i, уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i-ый узел с интенсивностью φ_i, уменьшает количество неактивных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i-ый узел может находиться в одном из $r_i + 1$ режимов работы $\left(i = \overline{1, N}\right)$. Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = \left(z_1(t), z_2(t), ..., z_N(t)\right)$, где $z_i(t) = \left(n_i(t), n_i'(t), l_i(t)\right)$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$, $n_i'(t)$ – число активных и, соответственно, неактивных заявок в i-ом узле в момент времени t, $l_i(t)$ – номер режима функционирования i-го узла. Пространство состояний случайного процесса $z(t)$ имеет вид

$$Z = \left\{ z = \left(\left(n_1, n_1', l_1\right), \ldots, \left(n_N, n_N', l_N\right) \right) : \right.$$
$$\left. n_i, n_i' \geq 0, \ l_i = \overline{0, r_i}, \ i = \overline{1, N} \right\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i-ом узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя, ставшая неактивной, имеет номер n_i'. Поступающий в i-ый узел сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n_i' + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n_i', которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = \left(n_i, n_i', l_i\right)$, в режиме l_i $\left(l_i = \overline{0, r_i}, \right.$ $\left. i = \overline{1, N}\right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью

$$\sigma_i\left(n_i + n_i', l_i\right) \ \left(\sigma_i\left(n_i + n_i', l_i\right) > 0\right)$$

i-ый узел переходит в $\left(l_i + 1\right)$-ый режим $\left(l_i = \overline{0, r_i - 1}\right)$, а с интенсивностью $\rho_i\left(n_i + n_i', l_i\right)$ $\left(\rho_i\left(n_i + n_i', l_i\right) > 0\right)$ – в $\left(l_i - 1\right)$-ый режим $\left(l_i = \overline{1, r_i}\right)$. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Дисциплина обслуживания LCFS-PR. Поступающая в i-ый узел заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n_i + 1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

Если в момент времени t состояние i-го узла есть вектор $\left(n_i(t), n_i'(t), l_i(t)\right)$, и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая, как отмечалось выше, начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по ее обслуживанию является случайной величиной

$$\eta_i\left(n_i + n_i' + 1\right)$$

с функцией распределения

$$B_i\left(n_i + n_i' + 1, s\right),$$

математическим ожиданием

$$\tau_i\left(n_i + n_i' + 1\right) < \infty.$$

Предполагается, что $B_i\left(n_i + n_i' + 1, 0\right) = 0$, $i = \overline{1, N}$. Если в момент времени t состояние i-го узла есть $\left(n_i(t), n_i'(t), l_i(t)\right)$, то обслуживание ведется со скоростью $\alpha_i\left(n_i + n_i', l_i\right)$, то есть зависит от состояния узла. Изменение режима работы узла влечет изменение скорости обслуживания. Обслуживание в таких сетях имеет не «временную», а так называемую «энергетическую» трактовку, то есть каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить.

Заявка, получившая обслуживание в i-ом узле, мгновенно, с вероятностью p_{ij}, переходит в j-ый узел, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} + p_{i0} = 1, i = \overline{1, N}\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{ii} = 0, i = \overline{1, N}$. Матрица маршрутизации предполагается неприводимой.

Для открытых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $\left(p_{ij}\right)$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{ij}, \quad j = \overline{1, N}, \qquad (1.1)$$

имеет единственное положительное решение [3].

Репозиторий БНТУ

2 Инвариантность стационарного распределения

Ранее рассмотрен случай, когда

$$B_i\left(n_i+n_i',s\right)=1-e^{-\mu_i s}\ \left(s>0\right),$$

$$\tau_i\left(n_i+n_i'\right)=1/\mu_i$$

с единичной скоростью обслуживания

$$\alpha_i\left(n_i+n_i',l_i\right)=1.$$

Тогда $z(t)$ является марковским процессом, для которого в [4] получено стационарное распределение вероятностей состояний в мультипликативной форме.

Рассмотрим общий случай. Пусть количество работы по обслуживанию заявки является случайной величиной $\eta_i\left(n_i+n_i'\right)$ с произвольной функцией распределения $B_i\left(n_i+n_i',s\right)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i\left(n_i+n_i'\right)$.

Пусть $\psi_{i,k}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-ой позиции в i-ом узле,

$$\psi_i(t)=\left(\psi_{i,1}(t),...,\psi_{i,n_i+n_i'}(t)\right),\ i=\overline{1,N}.$$

Если состояние i-го узла рассматриваемой сети есть вектор $\left(n_i,n_i',l_i\right)$, то в силу сказанного выше

$$\frac{d\psi_{i,n_i+n_i'}(t)}{dt}=-\alpha_i\left(n_i+n_i',l_i\right),\ i=\overline{1,N}.$$

Тогда в общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t)=\left(z(t),\psi(t)\right)$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t)=\left(\psi_1(t),...,\psi_N(t)\right)$.

Введем обозначения:

$$F(z,x)=F\left(z,x_{1,1},...,x_{1,n_1+n_1'};x_{2,1},...,x_{2,n_2+n_2'};\right.$$
$$\left.x_{N,1},...,x_{N,n_N+n_N'}\right)=$$
$$=\lim_{t\to\infty}P\left\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},...\right.$$
$$\left....,\psi_{i,n_i+n_i'}(t)<x_{i,n_i+n_i'},i=\overline{1,N}\right\},$$
$$z\in Z,\ x_{k,l}\in \mathrm{R}\ \forall k,l.$$

Теорема. *При выполнении условий*

$$\sum_{z\in Z}q(z)\prod_{i=1}^{N}\left(\lambda\varepsilon_i\right)^{n_i}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i\nu_i}{\phi_i}\right)^{n_i'}\times$$
$$\times\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s,l_i)}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}<\infty, \qquad (2.1)$$

где

$$q(z)=\sum_{i=1}^{N}(\lambda p_{0i}+(\tau_i(n_i+n'_i))^{-1}\times$$
$$\times\alpha_i(n_i+n_i',l_i)I_{n_i>0}+\nu_iI_{n_i>0}+$$
$$+\varphi_iI_{n_i'>0}+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0});$$

$$\sigma_i\left(n_i+n_i',l_i-1\right)\alpha_i\left(n_i+n_i',l_i\right)\rho_i\left(n_i+n_i'-1,l_i\right)=$$
$$=\sigma_i\left(n_i+n_i'-1,l_i-1\right)\alpha_i\left(n_i+n_i',l_i-1\right)\rho_i\left(n_i+n_i',l_i\right),$$
$$l_i=\overline{1,r_i},\ i=\overline{1,N},$$

процесс $\zeta(t)$ *эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний* $F\left(z,x\right)$ *определяются по формулам*

$$F(z,x)=p_1(n_1,n_1',l_1)p_2(n_2,n_2',l_2)...p_N(n_N,n_N',l_N)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{N}\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{1}{\tau_i(s)}\int_0^{x_{i,s}}\left(1-B_i\left(s,u\right)\right)du,\ z\in Z,$$

где

$$p_i\left(n_i,n_i',l_i\right)=\left(\lambda\varepsilon_i\right)^{n_i}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'}\times$$
$$\times\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s,l_i)}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}p_i(0,0,0), \qquad (2.2)$$

$$p_i(0,0,0)=\left(\sum_{n_i=0}^{\infty}\sum_{n_i'=0}^{\infty}\sum_{l_i=0}^{r_i}\left(\lambda\varepsilon_i\right)^{n_i}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i\nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'}\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{s=1}^{n_i+n_i'}\frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s,l_i)}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\sigma_i(0,k-1)}{\rho_i(0,k)}\right)^{-1},$$

ε_i *находятся из* (1.1).

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. При выполнении условия (2.1) $\zeta(t)$ эргодичен. Строгое доказательство этого факта может быть проведено с помощью предельной теоремы Смита [5], если учесть, что случайный процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в нулевом состоянии (в узлах нет ни обыкновенных, ни неактивных заявок, узел работает в основном режиме) и периодов занятости сети (в противном случае). Момент перехода сети в свободное состояние является моментом регенерации. Далее доказательство сводится к применению теоремы Смита для регенерирующих процессов.

Обозначим $e_i\in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $\left(n_i,n_i',l_i\right)=\left(1,0,0\right)$, $e_i'\in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $\left(n_i,n_i',l_i\right)=\left(0,1,0\right)$, $e_i''\in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $\left(n_i,n_i',l_i\right)=\left(0,0,1\right)$.

Для функций $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda p_{0i}+\nu_iI_{n_i>0}+\varphi_iI_{n_i'>0}+\right.$$
$$\left.+\sigma_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i<r_i}+\rho_i(n_i+n_i',l_i)I_{l_i>0}\right)=$$

Репозиторий БНТУ

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (n_i + n'_i, l_i) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} - \left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}} \right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0} \right) I_{n_i>0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \lambda p_{0i} B_i (n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i}) F(z - e_i, x) I_{n_i>0} + \quad (2.3)$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \alpha_j (n_j + n'_j + 1, l_j) p_{ji} B_i (n_i + n'_i, x_{i,n_i+n'_i}) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial F(z + e_j - e_i, x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}} \right)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0} I_{n_i>0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (n_i + n'_i + 1, l_i) p_{i0} \left(\frac{\partial F(z + e_i, x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i+1}} \right)_{x_{i,n_i+n'_i+1}=0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} F(z + e_i - e'_i, x) \nu_i I_{n'_i>0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} F(z - e_i + e'_i, x) \varphi_i I_{n_i>0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} F(z - e''_i, x) \sigma_i (n_i + n'_i, l_i - 1) I_{l_i>0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} F(z + e''_i, x) \rho_i (n_i + n'_i, l_i + 1) I_{l_i<r_i}.$$

Подстановкой убеждаемся, что определенные в условии теоремы функции $F(z,x)$ являются решением системы уравнений (2.3). □

Пусть $\{p(z), z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы с учетом равенства $p(z) = F(z, +\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие. *Если выполняются условия* (2.1), *то процесс* $z(t)$ *эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний* $\{p(z), z \in Z\}$ *не зависит от функционального вида распределений* $B_i(s,x), i = \overline{1,N}$, *и имеет мультипликативную форму*

$$p(z) = p_1(n_1, n'_1, l_1) p_2(n_2, n'_2, l_2) ... p_N(n_N, n'_N, l_N),$$

где $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ *определяются по формуле* (2.2). *Здесь* $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ *– стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский*, *Ю.В.* Мультипликативность стационарного распределния в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Весці НАН Беларусі. – 2001. – №3. – С. 129–134.
2. *Крук*, *Ю.С.* Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний открытой сети с неактивными заявками / Ю.С. Крук, Ю.Е. Дудовская // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 12. – С. 94–107.
3. *Jackson*, *J.R.* Network of Waiting Lines / J.R. Jackson // Oper. Res. – 1957. – № 4. – P. 518–521.
4. *Дудовская*, *Ю.Е.* Стационарное распределение вероятностей состояний открытых сетей массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.Е. Дудовская, Ю.С. Боярович // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию профессора, д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 февраля 2015 г. – РИВШ. – Минск, 2015. – С. 33–36.
5. *Гнеденко*, *Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: КомКнига, 2005. – 400 с.

Поступила в редакцию 05.09.16.

Репозиторий БНТУ