МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА КИНЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ

Минск ◊ БНТУ ◊ 2016

УДК 531.(075.8)
ББК 22.21Я

Авторы
М.В. Мышковец, В.Д. Тульев

Рецензент
М.Г. Ботогова, кандидат физико-математических наук, доцент.

В учебном пособии в сокращенном варианте рассмотрены все основные темы полного курса теоретической механики по кинематике. Приведено много примеров, поясняющих различные положения теории. Грамотно подобраны задачи по всем разделам. Методически правильно объяснено решение этих задач. Данное пособие будет полезно для всех студентов, изучающих теоретическую механику. Его могут использовать преподаватели, ведущие занятия со студентами заочной формы обучения, а также для дистанционного обучения.

Требования к системе: IBM PC-совместимый ПК стандартной конигурации, дисковод CD-ROM. Программа работает в среде Windows. ***Открытие электронного издания*** производится посредством запуска файла Teor_mech_kinematika. Pdf.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37
Регистрационный № **БНТУ/МСФ**25-50.2016

СОДЕРЖАНИЕ

КИНЕМАТИКА

1. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

Кинематика — это раздел теоретической механики, в котором изучают механическое движение материальных тел без рассмотрения условий, вызывающих или изменяющих это движение.

Движение материальных тел происходит в пространстве и во времени. Пространство рассматривают как трехмерное евклидово, время в этом пространстве одинаково во всех его точках и не зависит от движения материальных тел.

Под механическим движением понимают изменение положения одного тела относительно другого.

Системой отсчета называют систему координат, связанную с одним из тел. Если тело движется, то система отсчета подвижна, если тело в покое, то система отсчета неподвижна.

Основные задачи кинематики

1. Установление закона движения тела по отношению к выбранной системе отсчета.
2. Определение по заданному закону движения тела кинематических характеристик этого движения (траектория, скорость, ускорение, угловые скорость и ускорение и т. д.)

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Простейшим материальным телом, изучаемым в теоретической механике, является материальная точка. **Материальной точкой считают твердое тело, размерами которого в данной задаче пренебрегают.** Движение точки считают заданным, если известен способ, позволяющий установить ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Траекторией называют геометрическое место последовательных положений движущейся точки в выбранной системе отсчета. Движение точки называют криволинейным, если точка перемещается по кривой линии, и прямолинейным, если она перемещается по прямой линии. При этом вид траектории зависит от системы отсчета.

Существуют три способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

Способы задания движения точки. Скорость и ускорение

Векторный способ задания движения заключается в задании положения точки радиусом-вектором, который является векторной функцией времени, относительно выбранной точки отсчета.

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1}$$

Эта функция должна быть однозначной и непрерывной. Выражение (1) называют законом движения точки в векторной форме.

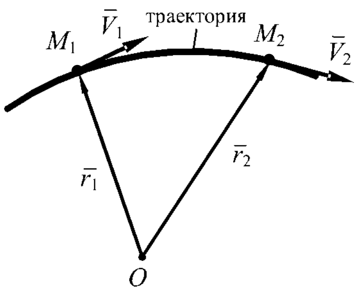


Рис. 1

Траектория точки *M* при векторном способе — это геометрическое место точек концов радиуса-вектора $\bar{r}$ при изменении времени, т. е. годограф радиуса-вектора.

Годограф — это кривая, которую описывает конец радиуса-вектора при изменении его аргумента, когда начало вектора находится в одной и той же точке (рис. 1).

Скорость точки характеризует быстроту и направление движения точки и равна производной радиуса-вектора точки по времени:

$$\boxed{\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}.} \tag{2}$$

В механике производную по времени обозначают точкой над переменной.

Направление вектора скорости можно определить, используя понятие производной вектора по скалярному аргументу, которая всегда направлена по касательной к годографу этого вектора.

Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения (рис. 1).

Ускорение точки характеризует быстроту изменения величины и направления скорости точки и равно первой производной вектора скорости по времени или второй производной радиуса-вектора по времени:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \dot{\bar{V}} = \ddot{\bar{r}}.} \tag{3}$$

Вектор ускорения направлен по касательной к *годографу вектора скорости* (рис. 2).

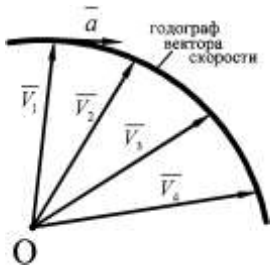


Рис. 2

Пример 1.

Движение точки задано радиусом-вектором $\bar{r} = \bar{e} + \bar{b}t^2$, где $\bar{e}$ и $\bar{b}$ — постоянные взаимно перпендикулярные векторы (рис. 3). Определить траекторию точки, а также скорость и ускорение точки при $t = 2$ с.

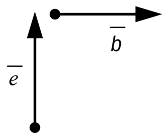


Рис. 3

Решение. Для построения траектории зададим время от 0 до 2 с и найдем величины радиуса-вектора в эти моменты времени:

$$t_0 = 0, \quad \bar{r}_0 = \bar{e},$$

$$t_1 = 1 \text{ с}, \quad \bar{r}_1 = \bar{e} + \bar{b},$$

$$t_2 = 2 \text{ с}, \quad \bar{r} = \bar{e} + 4\bar{b}.$$

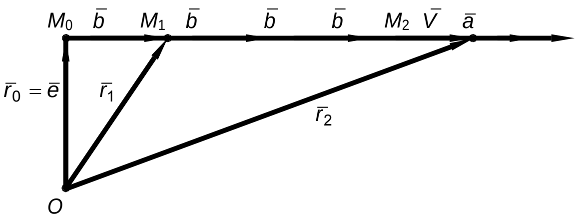


Рис. 4

Из выбранного центра отложим векторы $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ (рис. 4). Траекторией движения будет прямая линия.

Скорость точки равна:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = 2\bar{b}t .$$

При $t = 2$ с

$$\bar{V} = 4\bar{b} .$$

Вектор скорости будет направлен по прямой M_0M_2 в сторону увеличения расстояния M_0M_2.

Ускорение точки равно:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = 2\bar{b}.$$

Ускорение постоянно, и вектор ускорения направлен по прямой M_0M_2 в сторону возрастания скорости.

Координатный способ задания движения заключается в задании координат точки в виде известных, непрерывных, дважды дифференцируемых функций времени.

Системы координат могут быть различными: декартовы, полярные, сферические, цилиндрические и т. д.

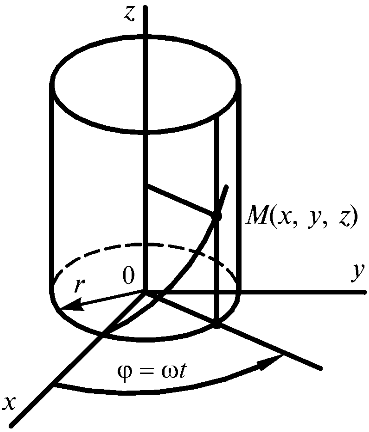


Рис. 5

В *декартовой системе координат* уравнениями движения точки будут

$$x = f_1(t), \ \ y = f_2(t), \ \ z = f_3(t). \quad (4)$$

Пример 2.

Движение точки по винтовой линии в декартовой системе координат можно задать тремя уравнениями (рис. 5):

1. $x = r\cos\omega t.$
2. $y = r\sin\omega t$,
3. $z = bt,$

где $b,$ ω — постоянные величины; r — радиус цилиндра.

Переход от векторного способа к координатному. Начало *декартовой системы координат* поместим в точке O, относительно которой задано движение точки M в векторной форме (рис. 6):

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

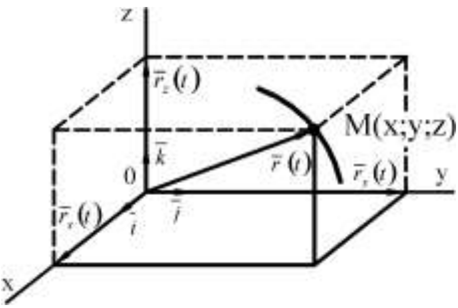


Рис. 6

Разложим радиус-вектор по координатным осям, используя единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

$$\bar{r} = r_x(t)\bar{i} + r_y(t)\bar{j} + \\ + r_z(t)\bar{k}. \quad (5)$$

Так как проекции радиуса-вектора равны координатам точки, то

$$r_x(t) = x_M \ , \quad r_y(t) = y_M \ ,$$

$$r_z(t) = z_M .$$

Следовательно:

$$\bar{r} = x_M \bar{i} + y_M \bar{j} + z_M \bar{k} . \qquad (6)$$

Если использовать выражение (4), то можно записать

$$\bar{r} = f_1(t)\bar{i} + f_2(t)\bar{j} + f_3(t)\bar{k} . \qquad (7)$$

Из выражения (7) следует, что если известно движение точки в координатной форме, то можно перейти к векторному способу задания движения.

Уравнения движения (4) являются также уравнениями траектории точки в параметрическом виде. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, необходимо исключить время из уравнений (4). Для этого выразим t из уравнения $x = f_1(t)$, т. е. $t = F(x)$, и подставим его в остальные уравнения:

$$y = \varphi_1(F(x)), \quad z = \varphi_2(F(x)). \qquad (8)$$

Пример 3.

Движение точки задано уравнениями: $x = 4\cos\pi t$, см; $y = 4\sin\pi t$, см. Найти траекторию точки в координатной форме и задать движение точки в векторной форме (рис. 7).

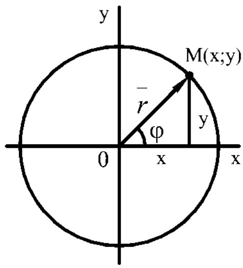


Рис. 7

Решение. Исключим время из уравнений движения. Для этого возведем обе части заданных уравнений в квадрат и сложим их:

$$\frac{x^2}{4^2} = \cos^2 \pi t, \qquad \frac{y^2}{4^2} = \sin^2 \pi t,$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} = \cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t,$$

или

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Траектория — окружность радиуса 4 см.

Для получения радиуса-вектора используем формулу (6):

$$\bar{r} = (4\cos\pi t)\bar{i} + (4\sin\pi t)\bar{j} .$$

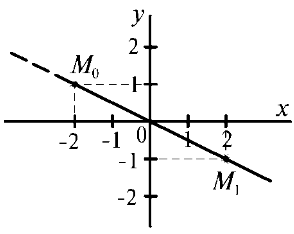


Рис. 8

Пример 4.

Движение точки задано уравнениями $x = t^2 - 2$, см; $y = 1 - \dfrac{t^2}{2}$, см. Найти траекторию точки в координатной форме.

Решение. Преобразуем уравнения движения:

$$x = t^2 - 2, \quad -2y = t^2 - 2.$$

Получим уравнение траектории $x = -2y$ (рис. 8). Установим границы траектории. Начало движения в точке M_0:

при	$t = 0$	$x_0 = -2$ см,	$y_0 = 1$ см,
при	$t_1 = 2$ с	$x_1 = 2$ см,	$y_1 = -1$ см.
при	$t \to \infty$	$x \to \infty$,	$y \to -\infty$.

Ответ. Траекторией точки будет полупрямая, ограниченная точкой M_0 $(-2,1)$.

Скорость точки в декартовых координатах:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}.$$

Отсюда следует

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \tag{9}$$

где V_x, V_y, V_z — проекции вектора скорости на соответствующие оси координат;

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \tag{10}$$

Находим углы вектора скорости с осями координат:

$$\cos\left(\bar{V}, \hat{\ } x\right) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos\left(\bar{V}, \hat{\ } y\right) = V\,\frac{V_y}{V}, \quad \cos\left(\bar{V}, \hat{\ } z\right) = \frac{V_z}{V}. \tag{11}$$

Ускорение точки в декартовых координатах:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}\right) = \dot{V}_x\bar{i} + \dot{V}_y\bar{j} + \dot{V}_z\bar{k} =$$

$$= a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$

где

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z} \qquad (12)$$

(a_x, a_y, a_z — проекции вектора ускорения на соответствующие оси координат):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (13)$$

Находим углы вектора ускорения с осями координат:

$$\cos\left(\widehat{\bar{a}, x}\right) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\left(\widehat{\bar{a}, y}\right) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\left(\widehat{\bar{a}, z}\right) = \frac{a_z}{a}. \qquad (14)$$

Пример 5.

Найти скорость и ускорение точки в любой момент времени, используя условие примера 2.

Решение. Находим скорость:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\omega t) = -r\omega\sin\omega t,$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r\sin\omega t) = r\omega\cos\omega t,$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(bt) = b,$$

$$V = \sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2 + (r\omega\cos\omega t)^2 + b^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + b^2},$$

$$\cos\left(\widehat{\bar{V}, x}\right) = \frac{V_x}{V} = -\frac{r\omega\sin\omega t}{\sqrt{r^2\omega^2 + b^2}},$$

$$\cos\left(\widehat{\bar{V}, y}\right) = \frac{V_y}{V} = \frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{r^2\omega^2 + b^2}},$$

$$\cos\left(\widehat{\bar{V}, z}\right) = \frac{V_z}{V} = \frac{b}{\sqrt{r^2\omega^2 + b^2}}.$$

Находим ускорение:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$a_x = \dot{V}_x = \frac{d}{dt}(-r\omega \sin \omega t) = -r\omega^2 \cos\omega t\ ,$$

$$a_y = \dot{V}_y = \frac{d}{dt}(r\omega \cos\omega t) = -r\omega^2 \sin \omega t\ ,$$

$$a_z = 0,$$

$$a = \sqrt{\left(-r\omega^2 \cos\omega t\right)^2 + \left(-r\omega^2 \sin \omega t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2\omega^4 \cos^2 \omega t + r^2\omega^4 \sin^2 \omega t} = r\omega^2,$$

$$\cos\left(\bar{a}, \hat{\ } x\right) = \frac{a_x}{a} = \frac{-r\omega^2 \cos\omega t}{r\omega^2} = -\cos\omega t\ ,$$

$$\cos\left(\bar{a}, \hat{\ } y\right) = \frac{a_y}{a} = \frac{-r\omega^2 \sin \omega t}{r\omega^2} = -\sin \omega t\ .$$

Ответ. $V = \sqrt{r^2\omega^2 + b^2}, \quad a = r\omega^2$.

Естественный способ задания движения считается известным, если заданы:

1. Траектория точки.
2. Закон движения точки по траектории $S = S(t)$.
3. Начало отсчета.
4. Положительное и отрицательное направления движения.

Закон движения $S = S(t)$ также называют дуговой координатой, которую отсчитывают от начального положения (рис. 9). Дуговую координату не следует смешивать с длиной пути, пройденного точкой, так как за начало отсчета может быть выбрана любая точка или движение может быть колебательным.

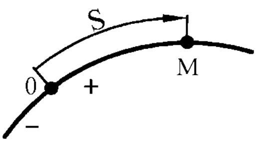


Рис. 9

При естественном способе задания движения точки в качестве координатных осей принимают естественные оси (оси естественного трехгранника): $\bar{\tau}$ — касательная, $\bar{n}$ — нормаль, $\bar{b}$ — бинормаль (рис. 10);

$\bar{\tau}$ — *касательная* является линией пересечения соприкасающейся и спрямляющей плоскостей.

$\bar{n}$ — *нормаль* является линией пересечения соприкасающейся и нор-нормальной плоскостей.

$\bar{b}$ — *бинормаль* является линией пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей.

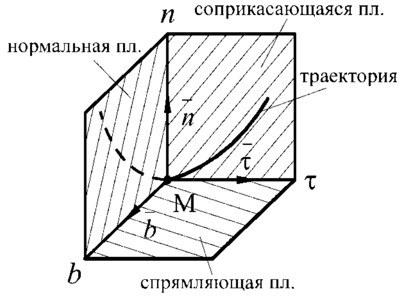


Рис. 10

При движении точки по кривой естественные оси перемещаются вместе с точкой, образуя правую систему координат.

$\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ являются единичными векторами, направленными по трем взаимно перпендикулярным осям $M\tau$, Mn, Mb.

Скорость точки при естественном способе задания движения.

За время Δt точка M по траектории перешла в положение M_1 (рис. 11). За это время дуговая координата изменилась на ΔS, а радиус-вектор — на $\Delta\bar{r}$. Используя определение скорости, запишем:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dS}{dS} = \frac{d\bar{r}}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS}\dot{S}.$$

Обозначим

$$\frac{d\bar{r}}{dS} = \bar{\tau}, \quad V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}.$$

Вектор $\bar{\tau}$ направлен по касательной к траектории, как производная вектора по скалярному аргументу (рис. 11), в сторону возрастания дуговой координаты ΔS. Модуль этого вектора равен единице. Он представляет собой предел отношения длины хорды $(\Delta\bar{r})$ к длине стягивающей ее дуги (ΔS) при стремлении ΔS к нулю:

$$|\bar{\tau}| = \left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta S} = 1.$$

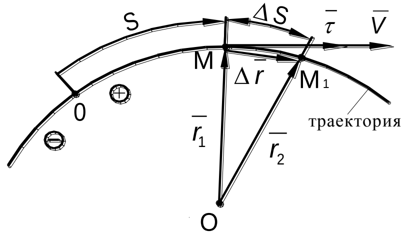


Рис. 11

Скалярную величину $V = \dot{S}$ представляющую проекцию вектора скорости на касательную, называют алгебраической скоростью точки

Если $\dot{S} > 0$, то вектор скорости направлен по $\bar{\tau}$, т. е. в сторону возрастания значений S (рис. 11), а если $\dot{S} < 0$, то вектор скорости направлен в сторону убывающих значений дуговой координаты.

Тогда

$$\boxed{\bar{V} = \dot{S}\,\bar{\tau},} \tag{15}$$

или

$$\boxed{\bar{V} = V\,\bar{\tau}.} \tag{16}$$

Пример 6.

Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону

$$S = OM = \frac{\pi R}{6}\left(t^3 - 2t\right), \text{ м.}$$

Определить скорость точки в момент времени $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с.

Решение. Движение задано естественным способом. Примем за начало отсчета точку O, считая направление движения по часовой стрелке положительным. Находим дуговые координаты точки в заданные моменты времени:

$$S_1 = \overset{\cup}{OM}_1 = \frac{\pi R}{6}\left(1^3 - 2\cdot 1\right) = -\frac{\pi R}{6}, \text{ м,}$$

$$S_2 = \overset{\cup}{OM}_2 = \frac{\pi R}{6}(2^3 - 2\cdot 2) = \frac{2}{3}\pi R, \text{ м.}$$

Положение точек M_1 и M_2 на траектории покажем с помощью углов (рис. 12):

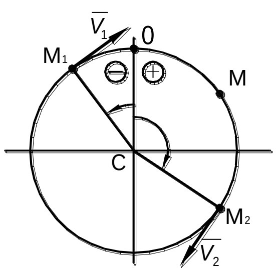


Рис. 12

$$\angle OCM_1 = \frac{\overset{\cup}{OM}_1}{R} = -\frac{\pi}{6}, \text{ рад,}$$

$$\angle OCM_2 = \frac{\overset{\cup}{OM}_2}{R} = \frac{2}{3}\pi, \text{ рад.}$$

им величины скорости в заданные времени:

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = \frac{\pi R}{6}(3t^2 - 2),$$

$$V_1 = \frac{\pi R}{6}(3 \cdot 1^2 - 2) = \frac{2\pi}{6} 1 = 0{,}33\pi \text{ , м/с,}$$

$$V_2 = \frac{\pi R}{6}(3 \cdot 2^2 - 2) = \frac{2\pi}{6} 10 = 3{,}33\pi \text{ , м/с.}$$

Так как $V_1 > 0$, $V_2 > 0$, то векторы скоростей будут направлены в сторону возрастания S по касательной к траектории (рис. 12).

Ответ. $V_1 = 0{,}33\pi$, м/с, $V_2 = 3{,}33\pi$, м/с.

Ускорение точки при естественном способе задания движения.

Для определения ускорения дифференцируем выражение (16) по времени:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\bar{\tau}) = \frac{dV}{dt}\bar{\tau} + V\frac{d\bar{\tau}}{dt}, \tag{17}$$

где $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{V^2}{\rho}\bar{n}$.

Тогда формула (17) примет вид

$$\bar{a} = \frac{dV}{dt}\bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\bar{n}. \tag{18}$$

Ускорение точки состоит из двух взаимно перпендикулярных составляющих. Одна $\left(\frac{dV}{dt}\bar{\tau}\right)$ направлена по касательной к траектории, а другая $\left(\frac{dV^2}{\rho}\bar{n}\right)$ — по нормали к этой траектории в сторону ее вогнутости. Эти составляющие называют соответственно касательным и нормальным ускорениями точки. Они лежат в соприкасающейся плоскости. Проекция ускорения точки на бинормаль равна нулю, так как вектор ускорения расположен
в соприкасающейся плоскости:

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.} \tag{19}$$

Вектор касательного ускорения

$$\bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\bar{\tau} = a_\tau\bar{\tau}, \tag{20}$$

модуль касательного ускорения

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}. \tag{21}$$

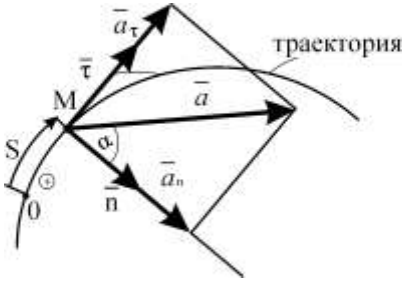


Рис 13.

Вектор нормального ускорения

$$\bar{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\bar{n}, \qquad (22)$$

модуль нормального ускорения

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}. \qquad (23)$$

Модуль ускорения равен:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.} \qquad (24)$$

Угол отклонения вектора ускорения от нормали составит (рис. 13):

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}. \qquad (25)$$

Касательное ускорение характеризует изменение скорости по модулю, а нормальное — изменение скорости по направлению.

Касательное и нормальное ускорения точки можно определить при ее движении в плоскости через проекции скорости и ускорения в декартовых координатах, используя выражения (10), (21), (24):

$$\boxed{a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.} \qquad (26)$$

$$\boxed{a_n = \frac{\left|V_x a_y - V_y a_x\right|}{V}.} \qquad (27)$$

Пример 7.

Используя условие примера 6, определить нормальное, касательное и полное ускорения точки.

Решение. Применяя формулы (21), (23), (24), получаем

$$a^\tau = \dot{V} = \frac{\pi R}{6}6t = \pi R t\ , \quad a_1^\tau = 2\pi,\ \text{м/с}^2, \quad a_2^\tau = 4\pi,\ \text{м/с}^2,$$

$$a_1^n = \frac{V_1^2}{R} = \frac{(0,33\pi)^2}{2} = 0,0554\pi^2 = 0,546\ \text{м/с}^2,$$

$$a_2^n = \frac{V_2^2}{R} = \frac{(3,33\pi)^2}{2} = 5,54\pi^2 = 54,62\ \text{м/с}^2,$$

$$a_1 = \sqrt{(a_1^\tau)^2 + (a_1^n)^2} = \sqrt{(2\pi)^2 + (0{,}0554\pi^2)^2} = 6{,}3 \text{ м/с}^2,$$

$$a_2 = \sqrt{(a_2^\tau)^2 + (a_2^n)^2} = \sqrt{(4\pi)^2 + (5{,}54\pi^2)^2} = 54{,}98 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $a_1^\tau = 2\pi$, ì / ñ^2, $a_2^\tau = 4\pi$, ì / ñ^2, $a_1^n = 0{,}546$ ì / ñ^2,
$a_2^n = 54{,}62$ ì / ñ^2, $a_1 = 6{,}3$ ì / ñ^2, $a_2 = 59{,}98$ ì / ñ^2.

Классификация движения по ускорениям

1. $a_n = 0$, $a_\tau = 0$. Движение прямолинейное и равномерное.
2. $a_n \neq 0$, $a_\tau = 0$. Движение криволинейное и равномерное (рис. 14).

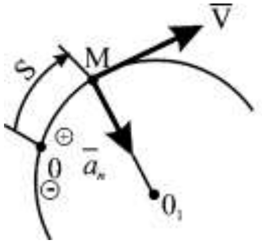


Рис. 14

3. $a_n = 0$, $a_\tau \neq 0$. Движение прямолинейное и неравномерное.

а) Прямолинейное, ускоренное (рис. 15)

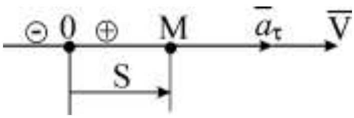


Рис. 15

б) Прямолинейное, замедленное (рис. 16)

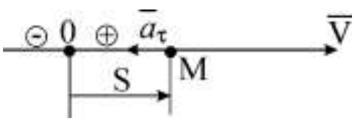


Рис. 16

4. $a_n \neq 0$, $a_\tau \neq 0$. Движение криволинейное и неравномерное.

а) Криволинейное, ускоренное $(a_\tau > 0,\ V > 0)$ (рис. 17)

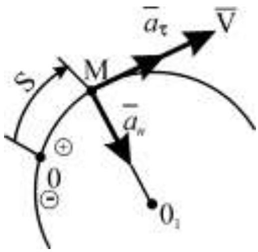
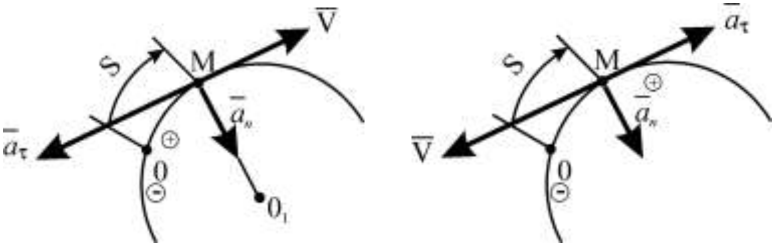


Рис. 17

б) Криволинейное, замедленное (рис. 18, *а*, *б*)

а *б*



$(a_\tau < 0;\ V > 0)$ $(a_\tau > 0;\ V < 0)$

Рис. 18

Уравнения движения точки

Уравнение равномерного движения по траектории любой формы $(V = \text{const})$

$$\boxed{S = Vt.} \tag{28}$$

Уравнение равнопеременного движения по траектории любой формы $(a_\tau = \text{const})$

$$\boxed{S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},} \tag{29}$$

где S_0 — начальное положение; V_0 — начальная скорость.

Если $a_\tau > 0$, то движение равноускоренное.

Если $a_\tau < 0$, то движение равнозамедленное.

Скорость равнопеременного движения

$$\boxed{V = V_0 + a_\tau t.} \tag{30}$$

Пример 8.

При отходе от станции поезд, двигаясь равноускоренно по закруглению радиуса 900 м, за время t = 30 с достиг скорости V = 15 м/с. Определить путь, пройденный поездом и его полное ускорение.

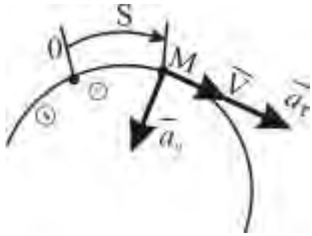


Рис. 19

Решение. За начало отсчета примем положение поезда в момент отхода от станции (рис. 19). Начальные условия движения: S_0 = 0; V_0 = 0. Применим формулы (23), (29), (30):

$$V = a_\tau t \Rightarrow a_\tau = \frac{V}{t} = \frac{15}{30} = 0,5\,\text{м/с}^2,$$

$$S = \frac{a_\tau t^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 30^2}{2} = 225\,\text{м}, \quad a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{15^2}{900} = \frac{1}{4} = 0,25\,\text{м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,25^2} = 0,56\,\text{м/с}^2.$$

Ответ. S = 225 м, a = 0,56 м/с^2.

Пример 9.

Поезд движется со скоростью 20 м/с. При торможении ускорение равно 0,4 м/с^2. Найти время и путь торможения.

Решение. Применим формулы (29), (30) при начальных условиях движения S_0 = 0, V_0 = 20 м/с:

$$V = V_0 - a_\tau t, \quad S = S_0 + V_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Так как поезд остановился, то V = 0, тогда

$$V = 0 = V_0 - a_\tau t \Rightarrow t = \frac{V_0}{a_\tau} = \frac{20}{0,4} = 50\,\text{с}.$$

$$S = 20 \cdot 50 - \frac{0,4 \cdot 50^2}{2} = 500\,\text{м}.$$

Ответ. S = 500 м, t = 50 с.

Пример 10.

Определить ускорение точки через 2 с после начала движения из состояния покоя, если движение задано уравнениями: $x = 3t^2$ м, $y = 4t^2$ м.

Решение. Применим формулы (26), (27). Находим проекции скорости и ускорения на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = 6t,\ V_x = 12\ \text{м/с},$$

$$V_y = \dot{y} = 8t,\quad V_y = 16\ \text{м/с},$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20\ \text{м/с},$$

$$a_x = \dot{V}_x = 6\ \text{м/с},$$

$$a_y = \dot{V}_y = 8\ \text{м/с},$$

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{12\cdot 6 + 16\cdot 8}{20} = 10\ \text{м/с},$$

$$a_n = \frac{|V_x a_y - V_y a_x|}{V} = \frac{|12\cdot 8 - 16\cdot 6|}{20} = \frac{|96-96|}{20} = 0\,,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 10\ \text{м/с}^2.$$

Ответ. $a_\tau = 10$ м/с^2, $a_n = 0$, $a = 10$ м/с^2.

Переход от координатного к естественному способу задания движения

Задано движение точки координатным способом: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Для перехода от координатного способа к естественному необходимо:

1. Установить траекторию, если возможно, т. е. получить уравнение траектории в явном виде:

$$y = \varphi_1(x),\quad z = \varphi_2(x).$$

2. Определить закон движения по этой траектории $S = S(t)$ по формуле:

$$S = \int_0^t \sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)}\,dt\ .$$

3. Установить начало отсчета, подставив в уравнения движения начальное время. Если это время не задано, подставляют $t_0 = 0$.

4. Определить положительное направление движения, которое можно узнать или по вектору скорости, или, задавая значения времени в уравнения движения, чтобы получить новую точку на траектории.

Пример 11.

Перейти к естественному способу задания движения, если заданы уравнения движения точки в координатной форме:

а) $x = 3t^2 - 6$ см, б) $y = -4t^2 + 4$ см.

Решение. Для естественного способа задания необходимо знать:
1. Траекторию.
2. Закон движения.
3. Начало отсчета.
4. Положительное направление движения.

1. Траекторию движения определим, исключая время из уравнений движения а), б):

из а)

$$t^2 = \frac{x+6}{3},$$

из б)

$$t^2 = \frac{-y+4}{4},$$

откуда получим

$$\frac{x+6}{3} = \frac{-y+4}{4},$$

или

$$3y + 4x + 12 = 0.$$

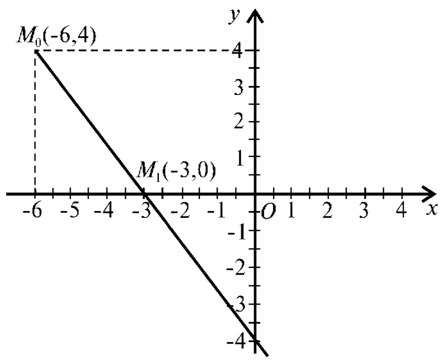


Рис. 20

Траектория представляет собой прямую линию (рис. 20), ограниченную точкой M_0.

2. Закон движения находим по следующей формуле:

$$S = \int_0^t \sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2}\, dt,$$

где $\dot{x} = 6t$; $\dot{y} = -8t$;

$$S = \int_0^t \sqrt{(6t)^2 + (-8t)^2}\, dt = \int_0^t \sqrt{36t^2 + 64t^2}\, dt = \int_0^t 10t\,dt = 5t^2\big|_0^t = 5t^2.$$

3. Начало отсчета находим из уравнений движения, подставив в них время, равное нулю:

$$x_0 = -6 \text{ см},$$

$$y_0 = 4 \text{ см}.$$

4. Положительное направление движения определим, подставив в уравнение движения время, равное 1 с:

$$x_1 = 3 - 6 = -3 \text{ñì} \;,$$

$$y_1 = 4 - 4 = 0 \ldots.$$

Вопросы для повторения

1. Что изучает кинематика?
2. Какие задачи решает кинематика?
3. Что называется траекторией точки?
4. Какие существуют способы задания движения точки?
5. Как определить траекторию при векторном способе задания движения точки?
6. В чем заключается естественный способ задания движения?
7. В чем заключается координатный способ задания движения?
8. Как определить траекторию при координатном способе задания движения точки?
9. Как определить скорость точки при разных способах задания движения?
10. Как определить ускорение при векторном способе задания движения?
11. Как определить ускорение при координатном способе задания движения?
12. Как определить ускорение при естественном способе задания движения?
13. Что характеризует касательное ускорение?
14. Что характеризует нормальное ускорение?
15. Какие ускорения имеет точка, двигаясь равномерно по криволинейной траектории?
16. Какие ускорения имеет точка при неравномерном и прямолинейном движении?
17. Какие ускорения имеет точка при криволинейном и неравномерном движении?

3. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Точки твердого тела, совершающего поступательное движение, перемещаются как по прямолинейным, так и по криволинейным траекториям.

Пример 1.

Автомобиль движется на прямолинейном участке. Кузов автомобиля движется поступательно. Траекториями всех точек кузова являются прямые линии.

Пример 2.

Колесо обозрения вращается вокруг горизонтальной оси. Во время вращения кабинки находятся в вертикальном положении, т. е. совершают поступательное движение. Траекториями движения всех точек кабинки являются окружности (рис. 1).

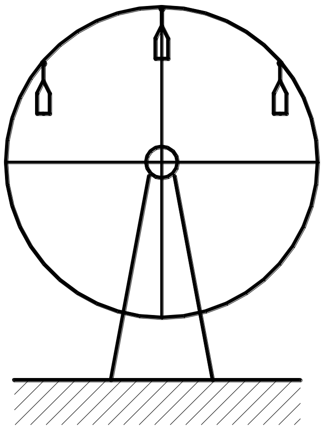


Рис. 1

Поступательное движение твердого тела характеризуется заданием движения одной его точки, обычно центра тяжести, и может быть задано любым из изученных способов. Для задания поступательного движения тела в декартовой системе координат достаточно записать: $x_C = f_1(t)$, $y_C = f_2(t)$, $z_C = f_3(t)$. Эти выражения будут законом поступательного движения.

Основные свойства поступательного движения твердого тела определяются теоремой:

При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

Скорость и ускорение твердого тела находят по формулам, применяемым в кинематике точки.

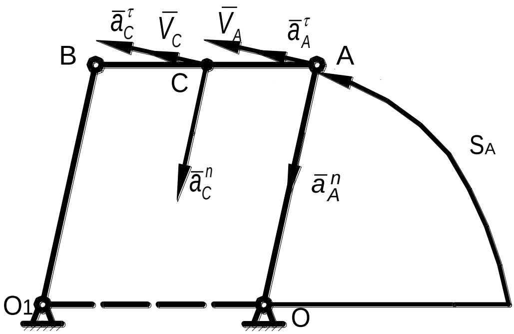


Рис. 2

нирного
$OABO_1$
закону
ис. 2).
ость и
стержня
', O_1B =
тержень
оступа-
остается
точек A,

$$a_A^{\tau} = \dot{V}_A = \pi = 3{,}14 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^{n} = \frac{V_A^2}{AO} = \frac{4\pi^2}{0{,}4} = 10\pi^2 = 98{,}6 \text{ м/с}^2,$$

$$a_C = a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^{n})^2} = \sqrt{3{,}14^2 + 98{,}6^2} = 98{,}65 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $V_c = 2\pi$, м/с, $a_c = 98{,}65$ м/с^2.

Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета.

Эта неподвижная прямая называется осью вращения. Точки тела, не принадлежащие оси вращения, двигаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности с центрами на этой оси.

Направим ось Z по оси вращения (рис. 3). Проведем через ось две полуплоскости: неподвижную (Н) и жестко связанную с телом подвижную (П). Положение тела будет определено, если задан угол между полуплоскостями в зависимости от времени: $\varphi = \varphi(t)$. Этот угол называют углом поворота тела. Для однозначного определения положения тела необходимо кроме величины знать направление отсчета угла поворота. Положительным направлением отсчета считают поворот тела против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси OZ. Угол поворота измеряют в радианах. Если известно число оборотов N за какой-то промежуток времени, то угол поворота равен:

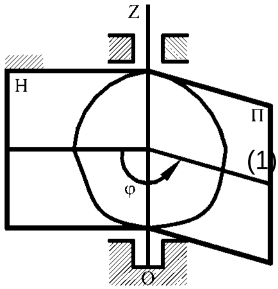


Рис. 3

$$\varphi = 2\pi N\,. \tag{1}$$

Угловая скорость характеризует быстроту и направление изменения угла поворота в данный момент времени. Величина угловой скорости равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{2}$$

Знак производной определяет направление вращения. Если $\omega > 0$, то вращение происходит против хода часовой стрелки. Если $\omega < 0$, то вращение — по ходу часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует быстроту и направление изменения угловой скорости в данный момент времени. Величина углового ускорения равна первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{3}$$

или

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}\,. \tag{3'}$$

Знак производной определяет направление изменения угловой скорости. Если $\varepsilon > 0$, то угловая скорость направлена против хода часовой стрелки. Если $\varepsilon < 0$, то угловая скорость направлена по ходу часовой стрелки.

Угловые скорость и ускорение можно представить в виде векторов, которые можно приложить к любой точке на оси вращения, т. е. эти векторы являются скользящими:

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k} = \frac{d\varphi}{dt}\bar{k}\,. \tag{4}$$

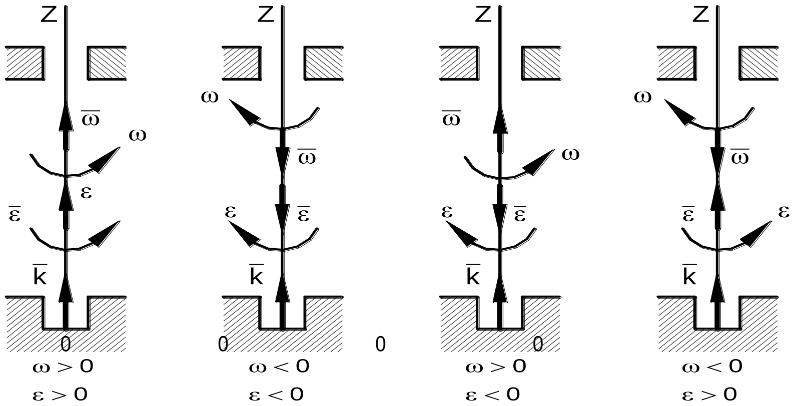


Рис. 4

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon\overline{k} = \frac{d\omega}{dt}\overline{k}\,, \tag{4'}$$

где $\overline{k}$ — единичный вектор оси OZ.

Направление векторов угловых скорости и ускорения определяются знаком производных (рис. 4).

На схемах угловые скорость и ускорение также изображают в виде круговых стрелок (рис. 4).

Угловые скорость и ускорение являются главными характеристиками вращательного движения и одинаковы для всех точек твердого тела в данный момент времени.

Каждая точка вращающегося тела имеет линейные скорость и ускорение.

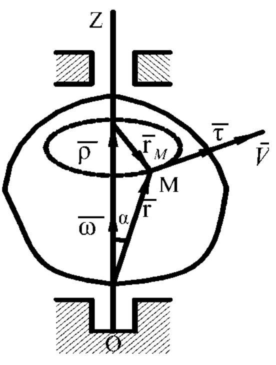


Рис. 5

Выберем произвольную точку M твердого тела ($|\overline{r}_M| = h$), вращающегося вокруг неподвижной оси OZ (рис. 5). Движение точки M можно описать радиусом-вектором $\overline{r}$, который имеет постоянный модуль для выбранной точки:

$$\overline{r} = \overline{\rho} + \overline{r}_M\,. \tag{5}$$

Дифференцируя (5) по времени, находим скорость:

$$\overline{V}_M = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{\rho} + \overline{r}_M) = \frac{d\overline{\rho}}{dt} + \frac{d\overline{r}_M}{dt}, \tag{6}$$

где $\dfrac{d\overline{\rho}}{dt} = 0$, так как вектор $\overline{\rho}$ постоянен по величине и направлению; $\dfrac{d\overline{r}_M}{dt} = \left|\overline{r}_M\right| \dfrac{d\varphi}{dt}\overline{\tau} = h\omega\overline{\tau}$ как производная вектора постоянного модуля по скалярному аргументу.

Тогда

$$\overline{V}_M = h\omega\overline{\tau} = V\,\overline{\tau}, \tag{7}$$

где

$$\boxed{V = h\omega \text{ — модуль скорости}} \tag{8}$$

(h — расстояние от точки до оси вращения).

Вектор скорости будет направлен по касательной к траектории точки M в соответствии с направлением угловой скорости.

Пример 4.

Точка A, лежащая на ободе диска, имеет скорость V_A = 40 см/с. Точка B, принадлежащая диску, имеет скорость V_B = 10 см/с (рис. 6). Определить угловую скорость диска и его радиус, если расстояние AB = 15 см.

Решение. Применим формулу (8)

$$V_A = \omega OA,\ OA = R,$$

$$V_A = \omega OB,\ OB = R - AB.$$

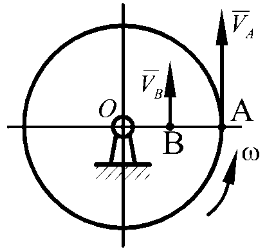


Рис 6

Тогда

$$\omega = \frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{OB},$$

или

$$\omega = \frac{V_A}{R} = \frac{V_B}{R - AB},$$

откуда

$$V_A(R - AB) = V_B R,$$

$$V_A R - V_B R = V_A AB,$$

$$R = \frac{V_A AB}{V_A - V_B} = \frac{40 \cdot 15}{40 - 10} = \frac{40 \cdot 15}{30} = 20\,\text{ñì},$$

$$\omega = \frac{V_A}{R} = \frac{40}{20} = 2\ \text{ðàä/ñ}.$$

Ответ. R = 20 см, $\omega = 2$ рад/с.

Получим векторную формулу Эйлера для скорости любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Из рис. 5 видно, что $h = r \sin \alpha$. Тогда $V = h\omega = \omega r \sin \alpha$. Это выражение является модулем векторного произведения $\bar{\omega}\times\bar{r}$, т. е. $V = |\bar{\omega}\times\bar{r}|$. Направление вектора скорости $\bar{V}$ определяется векторным произведением. Следовательно:

$$\bar{V} = \bar{\omega}\times\bar{r}. \tag{9}$$

Это выражение называют векторной формулой Эйлера.

> Скорость любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольной точки на оси вращения.

Определим ускорение точки *M*:

$$a = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}\times\bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt},$$

так как

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \quad \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt},$$

то

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{V}. \tag{10}$$

Рассмотрим слагаемые, входящие в это выражение. Вектор $\bar{\varepsilon}\times\bar{r}$ в соответствии с правилом векторного произведения направлен по касательной к траектории точки *M*, т. е. как касательное ускорение точки *M*, которое во вращательном движении называют вращательным ускорением (рис. 7):

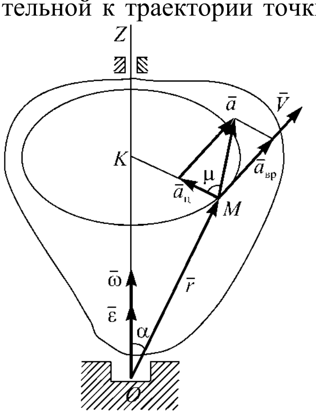


Рис. 7

$$\bar{a}_{\text{вр}} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r}. \tag{11}$$

Величина вращательного ускорения

$$a_{\text{вр}} = \varepsilon r \sin \alpha,$$

$$\boxed{a_{\text{вр}} = \varepsilon h.} \tag{12}$$

Вектор $\bar{\omega}\times\bar{V}$ находится в плоскости окружности радиуса $KM = h$, направлен от точки *M* к оси вращения и является нормальным ускорением точки *M*. При вращательном движении это ускорение называют центростремительным ускорением:

$$\bar{a}_{ц} = \bar{\omega} \times \bar{V}. \tag{13}$$

Величина центростремительного ускорения:

$$a_{\text{ö}} = \omega V \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{V}}) = \omega V,$$

где $\angle \bar{\omega}, \bar{V} = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$, $V = \omega h$;

$$\boxed{a_{\text{ö}} = \omega^2 h.} \tag{14}$$

Модуль полного ускорения точки, вращающегося твердого тела

$$\boxed{a = \sqrt{a_{\text{âð}}^2 + a_{\text{ö}}^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.} \tag{15}$$

Угол между полным ускорением и центростремительным равен:

$$\boxed{\operatorname{tg}\mu = \frac{a_{\text{âð}}}{a_{\text{ö}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.} \tag{16}$$

Выражения (8) и (15) показывают, что скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения, а из формулы (16) следует, что угол отклонения полного ускорения от центростремительного в каждый момент времени один и тот же для всех точек тела.

Равномерное и равнопеременное вращение

Равномерным называют вращение, при котором угловая скорость постоянна по модулю и направлению:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const},$$

откуда $d\varphi = \omega dt$. После интегрирования получим

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t.} \tag{17}$$

Выражение (17) называют законом равномерного вращения. При равномерном вращении угловую скорость можно определить, если задано число оборотов в минуту по формуле:

$$\boxed{\omega = \frac{\pi n}{30},} \tag{18}$$

где n — число оборотов в минуту.

Пример 5.

Груз 1 опускается по закону $x = 2{,}4t^2 - 4t$, м. Определить угловую скорость, угловое ускорение барабана, скорость и ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с, если $R = 3r = 0{,}6$ м (рис. 8).

Решение. Определим скорость груза:

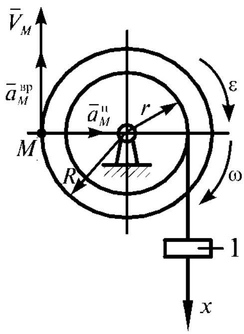


Рис. 8

$$V = \dot{x} = 4{,}8t - 4.$$

Находим угловую скорость и угловое ускорение:

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{4{,}8t - 4}{0{,}2} = 24t - 20,$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 24 \text{ рад/с}^2, \quad \omega = 24 - 20 = 4 \text{ рад/с}.$$

Скорость точки M равна:

$$V_M = \omega R = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Вращательное ускорение точки M:

$$a_M^{\text{вр}} = \varepsilon R = 24 \cdot 0{,}6 = 14{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Центростремительное ускорение точки M:

$$a_M^{\text{ц}} = \omega^2 R = 4^2 \cdot 0{,}6 = 9{,}6 \text{ м/с}^2,$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\text{вр}})^2 + (a_M^{\text{ц}})^2} = \sqrt{14{,}4^2 + 9{,}6^2} = 17{,}31 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки M можно найти по формуле (15):

$$a_M = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad h = R = 0{,}6 \text{ м},$$

$$a_M = 0{,}6\sqrt{24^2 + 4^4} = 17{,}31 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $\omega = 4$ рад/с, $\varepsilon = 24$ рад/с^2, $V_M = 2{,}4$ м/с, $a = 17{,}31$ м/с^2.

Равнопеременным называют вращение, при котором угловое ускорение постоянно по величине и направлению:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \text{const}.$$

Откуда $\int\limits_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int\limits_0^t \varepsilon dt$.

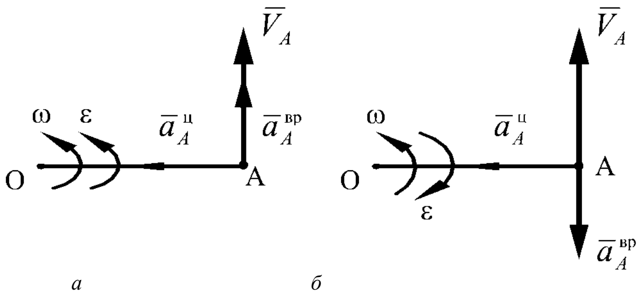


Рис. 9

Находим

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t.} \tag{19}$$

После разделения переменных и интегрирования

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt$$

получим

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}} \tag{20}$$

— закон равнопеременного вращения

Если ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение равноускоренное (рис. 9, *а*). Скорость и вращательное ускорение направлены в одну сторону. Если ω и ε имеют разные знаки, то вращение равнозамедленное. Скорость и вращательное ускорение направлены в разные стороны (рис. 9, *б*). Центростремительное ускорение в обоих случаях направлено к оси вращения.

Пример 4.

Диск, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, сделал 14400 оборотов за 4 мин. Определить угловую скорость и угловое ускорение диска.

Решение. Начальные условия движения: $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, $\varepsilon = \text{const}$. Формулы (19), (20) имеют вид

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega = \varepsilon t.$$

Используя формулу (1) $\varphi = 2\pi N$, находим угловое ускорение диска:

$$2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2} = \frac{4\pi \cdot 14400}{(4 \cdot 60)^2} = \pi, \ \text{ðàä/ ñ}^2.$$

Угловая скорость равна: $\omega = 240\pi, \ \text{ðàä/ ñ}.$

Ответ. $\omega = 240\pi, \ \text{ðàä/ ñ}, \quad \varepsilon = \pi, \ \text{ðàä/ ñ}^2.$

Вопросы для повторения

1. Какое движение твердого тела называют поступательным?
2. По каким траекториям могут двигаться точки твердого тела при его поступательном движении?
3. Сформулируйте основную теорему поступательного движения твердого тела.
4. Запишите уравнения поступательного движения.
5. Какое движение твердого тела называют вращательным?
6. По каким траекториям двигаются точки твердого тела при вращательном движении?
7. Запишите уравнения вращательного движения.
8. Как определить угловые скорость и ускорение твердого тела?
9. Как направлены векторы угловых скорости и ускорения при ускоренном и замедленном вращении?
10. Могут ли точки твердого тела при вращательном движении иметь различную угловую скорость в данный момент времени?
11. Как определить линейную скорость точки твердого тела при его вращательном движении и как она направлена?
12. Как определить ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси? Как направлены и чему равны его составляющие?
13. Как направлены скорость, центростремительное и вращательное ускорения точки твердого тела при замедленном или ускоренном вращении?
14. Имеет ли точка твердого тела ускорение при равномерном вращении?

4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Сложным движением называют такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях (рис. 1). **Абсолютным** движением называют движение точки M по отношению к основной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$, которую условно принимают за неподвижную. **Относительным** движением называют движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета $OXYZ$. **Переносным** движением называют движение подвижной системы отсчета $OXYZ$ относительно основной (неподвижной) системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$.

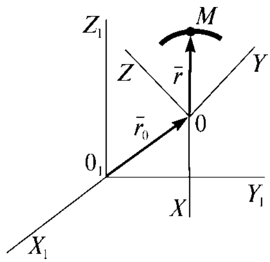


Рис. 1

Пример 1.

Человек идет по движущемуся вагону метро. Движение человека можно рассматривать как сложное, состоящее из двух движений: движение человека вместе с вагоном; движение человека по вагону. Если основную, неподвижную систему координат связать с платформой станции метро, то движение человека относительно этой системы координат будет абсолютным. Движение человека относительно вагона, связанного с подвижной системой координат, будет относительным. Движение вагона, с которым жестко связана подвижная система координат, т. е. движение подвижной системы, будет переносным.

Пример 2.

Движение поршня в двигателе движущегося автомобиля можно рассматривать как сложное. Движение поршня относительно какой-либо неподвижной точки на дороге, которую принимают за начало неподвижной, основной системы координат, будет абсолютным. Движение поршня относительно автомобиля, с которым жестко связана подвижная система координат, будет относительным. Движение автомобиля, с которой связана подвижная система координат, относительно неподвижной системы будет переносным.

Теорема о сложении скоростей

$O_1X_1Y_1Z_1$ — основная система координат,

$OXYZ$ — подвижная система координат,

$\bar{r} = \bar{r}(t) = x\bar{i} + y\bar{i} + z\bar{k}$ задает движение точки M относительно подвижной системы координат $OXYZ$,

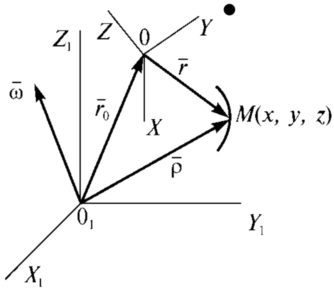


Рис. 2

$\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$ определяет движение начала подвижной системы координат $OXYZ$ относительно основной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$,

$\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$ описывает движение точки M относительно основной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ (рис. 2).

Сформулируем несколько определений.

Абсолютной скоростью называют скорость точки M относительно основной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и обозначают $\bar{V}_{àá}$.

Относительной скоростью называют скорость точки M относительно подвижной системы координат $OXYZ$ и обозначают $\bar{V}_r$.

Переносной скоростью называют скорость той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M, и обозначают $\bar{V}_e$.

Абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей

$$\boldsymbol{\bar{V}_{àá} = \bar{V}_e + \bar{V}_r} . \tag{1}$$

Модуль абсолютной скорости в общем случае находят проектированием выражения (1) на оси координат, так как угол между векторами относительной и переносной скоростей может быть от 0 до 180°:

$$\boxed{V_{àá} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},} \tag{2}$$

где

$$V_x = V_{ex} + V_{rx},$$

$$V_y = V_{ey} + V_{ry}.$$

Определение скоростей относительного и переносного движений начинают с нахождения положения точки на траектории относительного движения. Затем мысленно останавливают относительное движение и определяют скорость той точки подвижной системы координат, в которой зафиксирована движущаяся точка. Это будет переносная скорость. Для определения относительной скорости мысленно останавливают движение подвижной системы координат, т. е. переносное движение, и известными способами находят скорость точки относительно подвижной системы координат.

Пример 3.

Диск радиуса R = 50 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 3t^3 - 6t^2$, рад. По ободу движется точка M по закону $OM = S = \frac{\pi}{2} R(2t^2 - t^3)$, см (рис. 3, *а*). Определить абсолютную скорость точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

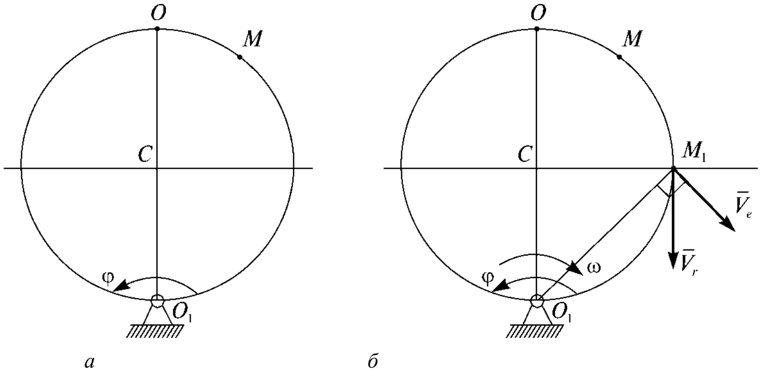


Рис. 3

Решение. Точка M совершает сложное движение. Движение точки M по ободу диска будет относительным, а движение диска — переносным. Абсолютную скорость точки M находим по формуле (1)

Определим положение точки M на траектории относительного движения.

При $t_1 = 1$ с

$$OM_1 = S = \frac{\pi R}{2}(2t^2 - t^3) = \frac{\pi R}{2}.$$

Находим угол $\angle OCM_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{\pi}{2}$.

Находим скорость относительного движения

$$V_r = \dot{S} = \frac{\pi R}{2}(4t - 3t^2).$$

При $t_1 = 1$ с

$$V_r = \frac{50\pi}{2}(4-3) = 25\pi = 78{,}5 \text{ см/с.}$$

Так как $V_r > 0$, то вектор $\bar{V}_r$ направлен по касательной к окружности в точке M_1 в сторону увеличения дуги OM (рис. 3).

Находим скорость переносного движения

$$V_e = |\omega| h,$$

где $\omega = \dot{\varphi} = 9t^2 - 12t$.

При $t_1 = 1$ с $\omega = -3$ рад/с. Минус показывает, что направление ω противоположно направлению положительного отсчета угла φ.

Так как

$$h = O_1M_1 = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} = 70{,}5 \text{ см,}$$

то

$$V_e = |-3| \cdot 70{,}5 = 211{,}5 \text{ см/с.}$$

Вектор $\bar{V}_e$ перпендикулярен вектору $\overline{M_1O_1}$ и направлен в соответствии с угловой скоростью (рис. 3, *б*). Так как $\angle \bar{V}_e, \bar{V}_r = 45^\circ$, тогда

$$V_{àá} = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_eV_r \cos 45^\circ} =$$
$$= \sqrt{211{,}5^2 + 78{,}5^2 + 2 \cdot 211{,}5 \cdot 78{,}5 \cdot 0{,}71} = 272{,}89 \text{ ñì / ñ.}$$

Ответ. $V_{àá} = 272{,}89$ см/с.

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Абсолютное ускорение точки в сложном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_{ê}, \qquad (3)$$

где $\bar{a}_e$ — ускорение переносного движения;

$\bar{a}_r$ — ускорение относительного движения;

$\bar{a}_{ê}$ — ускорение Кориолиса:

$$\bar{a}_{ê} = 2\left(\bar{\omega} \times \bar{V}_r\right). \qquad (4)$$

Ускорение Кориолиса характеризует:

1. Изменение величины переносной скорости точки вследствие ее относительного движения.
2. Изменение направления вектора относительной скорости вследствие вращательного переносного движения.

Направление ускорения Кориолиса определяют либо по правилу век-

5).

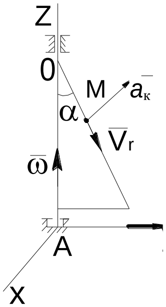


Рис. 4

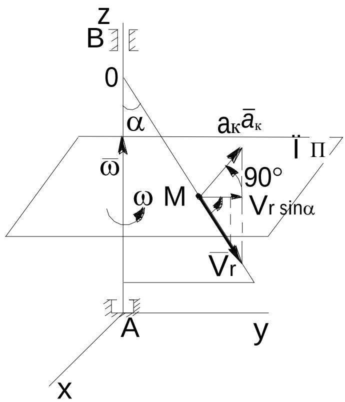


Рис. 5

Правило векторного произведения: ускорение Кориолиса направлено перпендикулярно плоскости векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{V}_r$ в ту сторону, откуда виден поворот от $\bar{\omega}$ к $\bar{V}_r$ на наименьший угол против хода часовой стрелки.

Поворот вектора $\bar{\omega}$ к вектору $\bar{V}_r$ против хода часовой стрелки на наименьший угол виден со стороны отрицательных значений оси X, куда и направлен вектор ускорения Кориолиса ($\bar{a}_{ê} \parallel AX$).

Правило Жуковского: проектируем вектор относительной скорости $\bar{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, и поворачиваем эту проекцию в той же плоскости на угол 90° в сторону переносной угловой скорости (рис. 5).

Проекция вектора относительной скорости на плоскость П, перпендикулярную вектору угловой скорости $\bar{\omega}$, равна $V_r \sin\alpha$. Проекцию поворачиваем против хода часовой стрелки на 90° в соответствии с направлением переносной угловой скорости, которая показана круговой стрелкой на рис. 5. Вектор ускорения Кориолиса будет направлен так же, как и на рис. 3, т. е. в сторону отрицательных значений оси X.

Модуль ускорения Кориолиса:

$$\boxed{a_{\text{ê}} = 2\omega V_r \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{V}_r}).} \tag{5}$$

Равенство нулю ускорения Кориолиса возможно:

1. $\omega = 0$; переносное движение является поступательным.
2. $V_r = 0$; относительная скорость в данный момент равна нулю.
3. $\sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{V}_r}) = 0$; вектор угловой скорости переносного движения $\bar{\omega}$ параллелен вектору относительной скорости $\bar{V}_r$.

При вращательном переносном и криволинейным относительным движениях выражение (3) примет вид

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_e^{\text{ö}} + \bar{a}_e^{\text{âð}} + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_{\text{ê}}.} \tag{6}$$

Модуль абсолютного ускорения находим, проектируя (6) на выбранные оси координат:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{7}$$

При поступательном переносном и криволинейном относительном движениях выражение (3) примет вид

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau . \tag{8}$$

Пример 4.

Используя условие примера 3, определить абсолютное ускорение точки.

Решение. Ускорение находим по формуле (6), определяя величины, входящие в нее.

Центростремительное переносное ускорение

$$a_e^{\text{ö}} = \omega^2 h = 3^2 \cdot 70,5 = 634,5 \text{ см/с}^2.$$

Вращательное переносное ускорение

$$a_e^{\text{âð}} = \varepsilon h ,$$

где $\varepsilon = \dot{\omega} = \dfrac{d}{dt}(9t^2 - 12t) = 18t - 12.$

При $t_1 = 1$ с $\varepsilon = 6$ рад/с^2,

$$a_e^{\text{âð}} = 6 \cdot 70,5 = 423 \text{ см/с}^2.$$

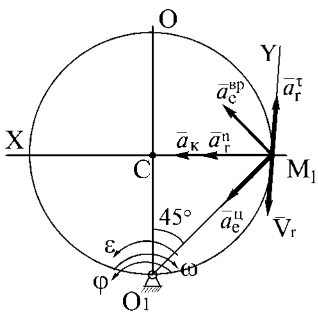


Рис. 6

Угловое ускорение направлено противоположно угловой скорости (рис. 6), так как производная имеет другой знак. Вектор $\bar{a}_e^{\ddot{o}}$ направлен по M_1O_1 к оси переносного вращения. Вектор $\bar{a}_e^{\hat{a}\eth}$ перпендикулярен M_1O_1 и направлен в соответствии с угловым ускорением.

Тангенциальное относительное ускорение

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi R}{2}(4t - 3t^2)\right) = \frac{\pi R}{2}(4 - 6t).$$

При $t_1 = 1\text{c}$ $a_r^\tau = -\pi R = -50\pi = -157$ см/с^2.

Нормальное относительное ускорение

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{(25\pi)^2}{50} = 123,25 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_r^n$ направлен по M_1C от точки M_1 к точке C. Вектор $\bar{a}_r^\tau$ направлен противоположно вектору $\bar{V}_r$, так как a_r^τ меньше нуля.

Находим ускорение Кориолиса:

$$a_{\hat{e}} = 2\,|\bar{\omega}\times\bar{V}_r| = 2\,|\bar{\omega}|\,|\bar{V}_r|\,\sin(\widehat{\bar{\omega},\bar{V}_r}),$$

$$\angle\bar{\omega},\bar{V}_r = 90^\circ,$$

$$a_{\hat{e}} = 2\cdot 3\cdot 78,5 = 471 \text{ м/с}^2.$$

Направление $\bar{a}_{\hat{e}}$ находим по правилу Жуковского. Так как вектор $\bar{V}_r$ находится в плоскости, перпендикулярной переносной оси вращения, то повернем $\bar{V}_r$ на 90° в направлении ω, т. е. по ходу часовой стрелки. Вектор $\bar{a}_{\hat{e}}$ будет направлен от M_1 к C.

Проектируем (6) на выбранные координатные оси:

$$a_x = a_e^{\hat{a}\eth}\cos 45^\circ + a_e^{\ddot{o}}\cos 45^\circ + a_r^n + a_{\hat{e}} =$$
$$= 423\cdot 0,707 + 634,5\cdot 0,707 + 123,25 + 471 = 1341,9 \text{ ñì}/\text{ñ}^2,$$

$$a_y = a_{\hat{a}}^{\hat{a}\eth}\cos 45^\circ - a_e^{F}\cos 45^\circ + a_r^\tau =$$
$$= 423\cdot 0,707 - 634,5\cdot 0,707 + 157 = 7,47 \text{ ñì}/\text{ñ}^2,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1341,9^2 + 7,47^2} = 1341,92 \text{ см/с}^2.$$

Ответ. $a = 1341,92$ см/с^2.

Вопросы для повторения

1. Какое движение точки называют сложным?
2. Какое движение точки называют абсолютным?
3. Какое движение точки называют относительным?
4. Какое движение точки называют переносным?
5. Сформулируйте и запишите теорему о сложении скоростей.
6. Сформулируйте и запишите теорему о сложении ускорений.
7. Что характеризует ускорение Кориолиса?
8. Как определить модуль вектора ускорения Кориолиса?
9. Сформулируйте правило Жуковского.
10. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?
11. Запишите теорему о сложении ускорений в случае поступательного переносного движения.

5. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоским или плоскопараллельным называют такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Пример 1.

Цилиндр катится по поверхности, совершая плоское движение (рис. 1). Основание цилиндра движется параллельно плоскости *ZOY.* Все точки, лежащие на перпендикулярах к основанию цилиндра, т. е. параллельно оси *X*, перемещаются аналогично точкам, принадлежащим основанию. Поэтому достаточно исследовать движение основания или другого сечения, лежащего на плоскости, параллельной *ZOY*, чтобы определить движение всего цилиндра. Таким образом при изучении плоского движения твердого тела будем исследовать движение плоской фигуры, т. е. движение сечения тела.

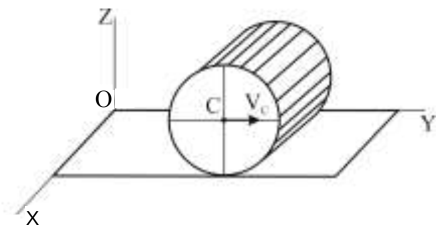


Рис. 1

Уравнения плоского движения твердого тела

Для задания движения сечения твердого тела достаточно описать движение какого-либо отрезка *CA,* принадлежащего этому сечению. Положение отрезка *CA* определяется координатами точки *C,* выбранной за полюс, и углом поворота отрезка, который отсчитывается от выбранного начального положения (рис. 2). Тогда уравнениями плоского движения твердого тела будут

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{à) } X_C = f_1(t), \\ \text{á) } Y_C = f_2(t), \\ \text{â) } \varphi = \varphi(t). \end{array}} \qquad (1)$$

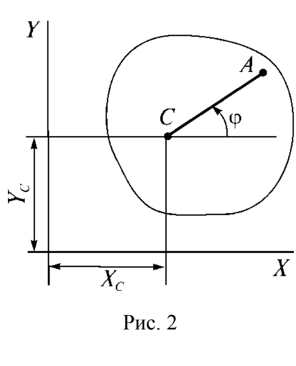


Рис. 2

Выражения *а*), *б*) формулы (1) описывают поступательное движение плоской фигуры, определяемое движением полюса *C.* Поступательное движение плоской фигуры зависит от выбора полюса. Если выбрать за полюс точку *A,* то выражения *а*), *б*) будут иметь другой вид. Выражение *в*) формулы (1) описывает вращательное движение плоской фигуры, которое не

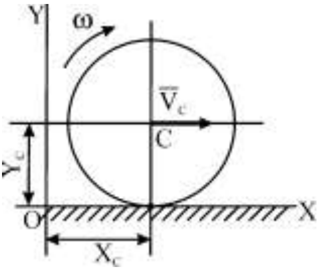


Рис. 3

зависит от выбора полюса.

Пример 2.

Колесо радиуса R = 0,4 м катится по прямолинейному горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью ω = 2 рад/с (рис. 3). Записать уравнения плоского движения колеса, если центр колеса имеет постоянную скорость: V_c = 0,8 м/с.

Решение. Так как колесо движется равномерно, то координата центра колеса по оси *X* будет равна:

$$X_{\tilde{n}} = V_{\tilde{n}} t = 0,8t, \text{ м.}$$

Координата центра колеса по оси Y постоянна и равна радиусу:

$$Y_{\tilde{n}} = R = 0,4 \text{ м.}$$

Угол поворота колеса при равномерном вращении равен:

$$\varphi = \omega t = 2t, \text{ рад.}$$

Ответ. $X_{\tilde{n}} = 0,8t$, м; $Y_{\tilde{n}} = 0,4$ м; $\varphi = 2t$, рад.

Скорость точек плоской фигуры

Определим положение точки *B* в выбранной системе отсчета, принимая за полюс точку *A* (рис. 4):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r} \; . \qquad (2)$$

Вектор $\bar{r}$ постоянного модуля (расстояние между точками *A* и *B* не изменяется) меняет свое направление вследствие вращения плоской фигуры. Дифференцируем формулу (2) по времени:

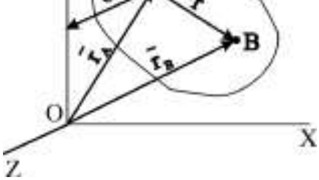


Рис. 4

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt},$$

где $\bar{V}_B = \dfrac{d\bar{r}_B}{dt}$ — скорость выбранной точки *B*; $\bar{V}_A = \dfrac{d\bar{r}_A}{dt}$ — скорость полюса *A*; $\bar{V}_{BA} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ — скорость точки *B* во вращательном движении вокруг полюса *A,* которую определим по формуле Эйлера:

$$\overline{V}_{BA} = \overline{\omega} \times \overline{r} \ .$$

В соответствии с правилом векторного произведения вектор $\overline{V}_{BA}$ лежит в плоскости фигуры, перпендикулярен *ВА* ($\overline{V}_{BA} \perp \overline{\hat{A}\grave{A}}$) и направлен в сторону вращения плоской фигуры, т. е. в соответствии с направлением ω. Модуль вектора $\overline{V}_{BA}$ равен:

$$V_{BA} = \omega r \sin\left(\overline{\omega}, \hat{\ } \overline{r}\right).$$

Так как $\overline{\omega} \perp \overline{r}$, то $\sin\left(\overline{\omega}, \hat{\ } \overline{r}\right) = 1.$

Поэтому

$$\boxed{V_{BA} = \omega r.}$$

Получим

$$\boxed{\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA},} \qquad (3)$$

или

$$\boxed{\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{\omega} \times \overline{r}.} \qquad (4)$$

Скорость любой точки тела в плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса.

Так как вектор скорости $\overline{V}_{BA}$ перпендикулярен отрезку, соединяющему точки *А* и *В,* то из этого вытекает следствие.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющие эти точки, равны между собой. При этом проекции должны иметь одинаковый знак.

Пример 3.

Определить скорость точки *М* обода колеса, используя условие примера 2.

Решение. Применим формулу (3). За полюс примем точку *С,* скорость которой известна:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_C + \overline{V}_{MC}.$$

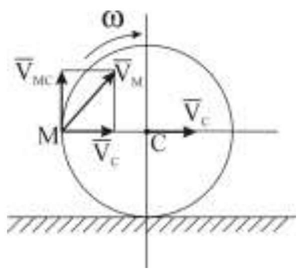


Рис. 5

Вращательная скорость точки *М* относительно полюса *С* равна:

$$V_{MC} = \omega MC = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}.$$

Вектор $\bar{V}_{MC}$ перпендикулярен отрезку *MC* и направлен в соответствии с угловой скоростью. Поэтому вектор $\bar{V}_{MC}$ относительно полюса *C* должен показывать направление угловой скорости (рис. 5).

Так как $\bar{V}_{MC} \perp \bar{V}_C$, то

$$V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{MC}^2} = \sqrt{(0,8)^2 + (0,8)^2} = 1,13 \text{ м/с},$$

$$\cos\left(\bar{V}_M \hat{,} \bar{V}_C\right) = \frac{V_C}{V_M} = \frac{0,8}{1,13} = 0,707,$$

$$\angle \bar{V}_M, \bar{V}_C = 45°.$$

Ответ. $V_M = 1,13$ м/с.

Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка в плоскости движения плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Докажем, что если угловая скорость плоской фигуры не равна нулю, то такая точка существует. Известна скорость точки *A* и $\omega \neq 0$. Повернем вектор $\bar{V}_A$ на 90° по направлению вращения и проведем луч *AK*. От точки *A* отложим отрезок *AP*:

$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

Определим скорость точки *P* во вращательном движении вокруг точки *A*, приняв ее за полюс:

$$V_{PA} = \omega AP = \omega \frac{V_A}{\omega} = V_A.$$

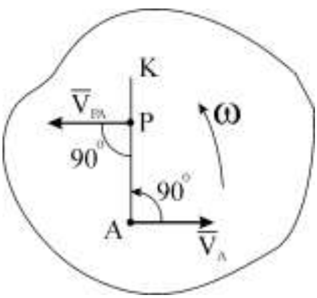


Рис. 6

Вектор $\bar{V}_{PA}$ перпендикулярен *AP* и направлен в соответствии с угловой скоростью (рис. 6), т. е. $\bar{V}_{PA} = -\bar{V}_A$. Запишем уравнение (3) теоремы о сложении скоростей плоской фигуры для точки *P*, приняв за полюс точку *A*:

$$\bar{V}_P = \bar{V}_A + \bar{V}_{PA} = \bar{V}_A - \bar{V}_A = 0.$$

Скорость точки *P* равна нулю, следовательно, точка *P* является МЦС. Если за полюс выбрать точку *P,* то уравнение (3) принимает вид

$$\bar{V}_A = \bar{V}_P + \bar{V}_{AP}.$$

Однако

$$\bar{V}_P = 0, \qquad \bar{V}_{AP} = \bar{\omega} \times \overline{PA},$$

тогда

$$\bar{V}_A = \bar{\omega} \times \overline{PA}. \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что скорости точек тела в плоском движении распределяются так же, как и при вращательном движении. МЦС является мгновенной неподвижной осью. Поэтому векторы скоростей точек плоской фигуры перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с МЦС, и направлены в соответствии с угловой скоростью, а модули скоростей пропорциональны расстояниям точек до МЦС (рис. 7):

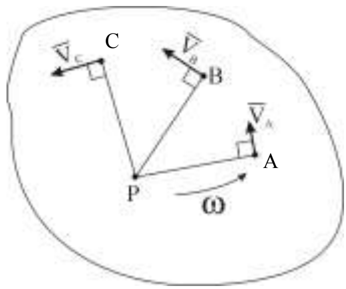


Рис. 7

$$V_A = \omega AP,$$
$$V_B = \omega BP,$$
$$V_C = \omega CP.$$

Откуда $\omega = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_B}{BP} = \dfrac{V_C}{CP}.$

Отношение скорости любой точки плоской фигуры к ее расстоянию до МЦС является величиной, равной угловой скорости вращения.

Если известны направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей в точках их приложения.

Если известны МЦС и угловая скорость вращения, то вектор скорости любой точки будет перпендикулярен отрезку, соединяющему МЦС с данной точкой, и направлен в соответствии с угловой скоростью. Модуль скорости равен произведению угловой скорости на расстояние от точки до МЦС.

Частные случаи определения МЦС

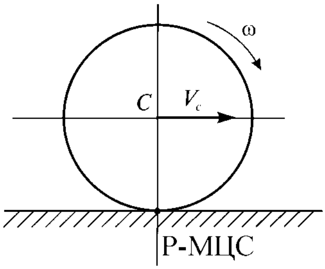


Рис. 8

а) Колесо катится без скольжения. МЦС находится в точке соприкосновения колеса с неподвижной поверхностью (рис. 8).

$$\omega = \frac{V_c}{CP}.$$

б) Известны скорости двух точек или величина и направления скорости одной точки $(\bar{V}_A)$ и направление другой. Для нахождения МЦС проводим перпендикуляры к векторам скоростей в точках *A* и *B*. Точка пересечения перпендикуляров будет МЦС (рис. 9).

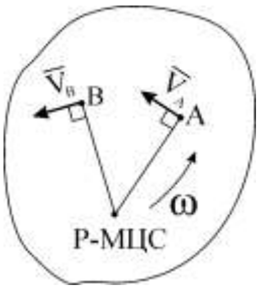


Рис. 9

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}.$$

в) Известны скорости точек *A* и *B* механизма

$$V_B = \omega_{OA}\left(r_1 + r_2\right), \quad V_A = \omega_1 r_1,$$

$$V_B > V_A, \quad \bar{V}_A \parallel \bar{V}_B.$$

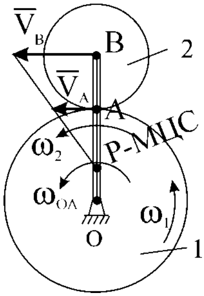


Рис. 10

МЦС находится на пересечении двух прямых, одна из которых проведена через точки *A* и *B,* вторая — через концы векторов скоростей. Колесо 1 и кривошип *OA* вращаются вокруг точки *O*. Колесо 2 совершает плоское движение (рис. 10).

$$\omega_2 = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A}{AP}, \ \hat{A}\text{Đ} = \grave{A}\text{Đ} + r_2,$$

$$V_B AP = V_A BP = V_A\left(AP + r_2\right),$$

или

$$AP\left(V_B - V_A\right) = V_A r_2 \Rightarrow AP = \frac{V_A r_2}{V_B - V_A}.$$

Откладываем на прямой *BA* отрезок *AP* и получаем точку *P* (МЦС).

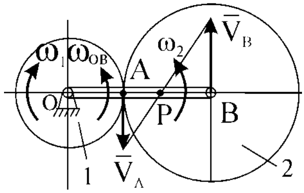


Рис. 12

$$\boxed{\omega_2=\frac{V_A}{AP}=\frac{V_A\left(V_B-V_A\right)}{V_A r_2}=\frac{V_B-V_A}{r_2}.}$$

Направление угловой скорости ω_2 определяется направлениями скоростей (рис. 10).

г) Известны угловая скорость кривошипа *OB* и угловая скорость колеса *1*:

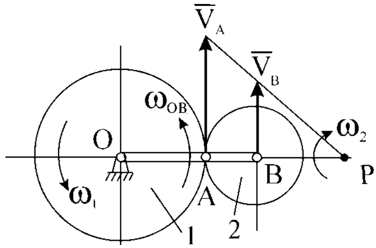


Рис. 11

$$V_A > V_B,\ \ \bar{V}_A \parallel \bar{V}_B,$$

$$V_A=\omega_1 r_1,\ \ V_B=\omega_{O\hat{A}}\left(r_1+r_2\right).$$

Колесо *1* и кривошип *OA* вращаются вокруг точки *O*. Колесо *2* совершает плоское движение:

$$\omega_2=\frac{V_B}{BP}=\frac{V_A}{AP},\quad AP=BP+r_2.$$

$$V_B AP=V_A BP,\ \ V_B\left(BP+r_2\right)=V_A BP\ \Rightarrow\ BP=\frac{V_B r_2}{V_A-V_B}.$$

Откладываем на прямой *AB* отрезок *BP* и получаем точку *P* (МЦС).

$$\boxed{\omega_2=\frac{V_B}{BP}=\frac{V_B\left(V_A-V_B\right)}{V_B r_2}=\frac{V_A-V_B}{r_2}.}$$

Направление угловой скорости определяется векторами скоростей (рис. 11).

д) Известно, что векторы скоростей точек *A* и *B* параллельны и противоположно направлены.

$$V_A=\omega_1 r_1,\ \ V_B=\omega_{O\hat{A}}\left(r_2+r_1\right).$$

Колесо *1* и кривошип *OA* вращаются вокруг точки *O*. Колесо *2* совершает плоское движение. МЦС находится в точке пересечения прямой, соединяющей концы векторов скоростей точек *A* и *B*, и прямой *AB*:

$$\omega_2=\frac{V_B}{BP}=\frac{V_A}{AP},\ \ BP=r_2-AP,$$

$$V_B AP=V_A BP=V_A\left(r_2-AP\right),$$

$$AP=\frac{V_A r_2}{V_B+V_A},$$

$$\boxed{\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A\left(V_B + V_A\right)}{V_A r_2} = \frac{V_B + V_A}{r_2}.}$$

Направление угловой скорости ω_2 определяется векторами скоростей (рис. 12).

е) Четырехзвенник $OABO_1$ занимает положение, показанное на рис. 13, $OA \parallel O_1B$, $V_A = \omega_{OA} OA$. Вектор скорости $\bar{V}_A$ перпендикулярен AO и направлен в соответствии с угловой скоростью. Скорость точки B также перпендикулярна BO_1, так как звенья OA и O_1B совершают вращательное движение. Стержень AB совершает плоское движение. Строим МЦС стержня AB. Перпендикуляры к скоростям точек A и B будут параллельны, т. е. пересекаются в бесконечности. Поэтому МЦС не существует. Стержень AB совершает мгновенное поступательное движение,

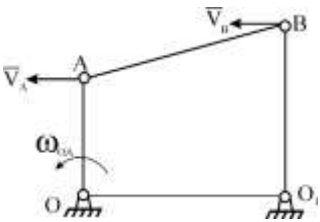


Рис. 13

и скорости всех точек стержня будут одинаковыми по величине и направлению. В данный момент угловая скорость стержня AB равна нулю ($\omega_{AB} = 0$).

Пример 4.

В положении механизма, схема которого приведена на рис. 14, определить угловую скорость шатуна AB и скорости точек B и C, если $\omega_{OA} = 2$ рад/с, $OA = 0{,}2$ м, $AB = 1{,}6$ м, $BC = 0{,}8$ м, $h = 0{,}8$ м.

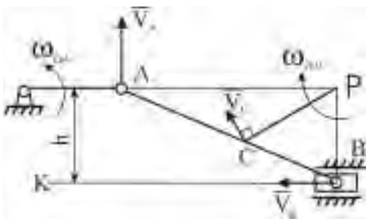


Рис. 14

Решение. Найдем скорость точки A:

$$V_A = \omega_{OA} OA = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \text{ м/с},$$

$$\bar{V}_A \perp \overline{AO}.$$

Скорость ползуна B должна быть направлена по прямой KB. Мгновенный центр шатуна AB находится в точке P пересечения перпендикуляров, восстановленных к направлениям векторов скоростей точек A и B.

Угловая скорость шатуна AB равна:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_B}{BP}.$$

Определим величины *AP, BP, CP*:

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{1,6^2 - 0,8^2} = 1,39\,\text{ì}\ , \quad BP = h = 0,8\,\text{ì}\ ,$$

$$\cos\angle PBC = \frac{h}{AB} = \frac{0,8}{1,6} = 0,5, \quad \angle PBC = 60^\circ.$$

Тогда ΔPBC равносторонний:

$$CP = BP = BC = 0,8 \text{ м.}$$

Находим:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0,4}{1,39} = 0,29 \text{ рад/с},$$

$$V_B = \omega_{AB} BP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с},$$

$$V_C = \omega_{AB} CP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с}.$$

Направление угловой скорости шатуна ω_{AB} определяется по направлению вращения вектора $\bar{V}_A$ скорости точки *A* относительно мгновенного центра скоростей. Угловая скорость шатуна *AB* направлена по часовой стрелке. Скорости точек *B* и *C* должны показывать такое же направление. Для построения вектора $\bar{V}_C$ восстанавливаем перпендикуляр к отрезку *CP* и направляем вектор $\bar{V}_C$ в соответствии с направлением ω_{AB} .

Ответ. ω_{AB} = 0,29 рад/с, $V_B = V_C$ = 0,23 м/с.

Пример 5.

Колесо катится без скольжения по прямолинейному рельсу. Скорость центра колеса равна 20 м/с, Радиус колеса 1 м. Найти скорости точек *A, B, D* и угловую скорость колеса (рис. 15).

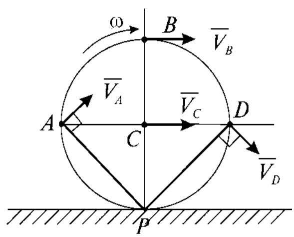


Рис. 15

Решение. Мгновенный центр скоростей находится в точке *P* соприкосновения колеса и неподвижной поверхности:

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R} = \frac{20}{1} = 20 \text{ рад/с}.$$

Угловая скорость направлена по часовой стрелке. Определим расстояние точек *A, B, D* до МЦС:

$$AP = DP = R\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = 1,41\ \text{ì}\ ,$$
$$BP = 2R = 2\ \text{ì}\ ,$$
$$V_A = V_D = \omega AP = 20 \cdot 1,41 = 28,2\ \text{ì / ñ},$$
$$V_B = \omega BP = 20 \cdot 2 = 40\ \text{ì / ñ}.$$

Вектор $\bar{V}_A$ перпендикулярен прямой *AP*, а вектор $\bar{V}_B$ перпендикулярен прямой *BP*. Вектор $\bar{V}_D$ перпендикулярен $\overline{DP}$. Направления векторов $\bar{V}_A$, $\bar{V}_B$, $\bar{V}_D$ должны соответствовать угловой скорости колеса (рис. 15).

Ответ. $V_A = 28,2\ \text{ì / ñ},\quad V_D = 28,2\ \text{ì / ñ},\ V_B = 40\ \text{ì / ñ}.$

Ускорения точек плоской фигуры

Для определения ускорения дифференцируем формулу (4) по времени:

$$\frac{d\bar{V}_B}{dt} = \frac{d\bar{V}_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right) = \frac{d\bar{V}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt},$$

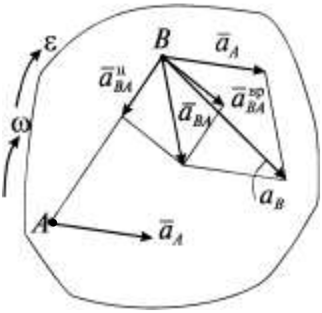


Рис. 16

где

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{V}_B}{dt}, \quad \bar{a}_A = \frac{d\bar{V}_A}{dt},$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{V}_{BA}.$$

Тогда

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}_{BA},$$

где $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}^{\text{âð}}_{BA}$ — вращательное ускорение точки *B* во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса *A*;

$\bar{\omega} \times \bar{V}_{BA} = \bar{a}^{\text{ö}}_{BA}$ — центростремительное ускорение точки *B* во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса *A*.

Векторы $\bar{a}^{\text{âð}}_{BA}$ и $\bar{a}^{\text{ö}}_{BA}$ в соответствии с правилом векторного произведения будут направлены следующим образом (рис. 16). Вектор $\bar{a}^{\text{âð}}_{BA}$ перпендикулярен отрезку $\overline{BA}$ и направлен в соответствии с угловым ускорением. Вектор $\bar{a}^{\text{ö}}_{BA}$ направлен от точки *B* к полюсу *A*. Модули этих ускорений:

$$a_{BA}^{\text{ö}} = \omega^2 AB\,, \quad a_{BA}^{\text{âð}} = \varepsilon AB\,.$$

Получим

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\text{âð}} + \bar{a}_{BA}^{\text{ö}},} \qquad (6)$$

или

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.} \qquad (7)$$

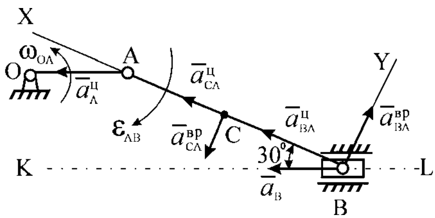
Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.

Для нахождения модуля ускорения точки строим, согласно уравнению (6), план ускорений (многоугольник ускорений) или проектируем это уравнение на выбранные оси координат. Построение плана ускорений показано в примере 5.

Пример 5.

Используя условие примера 4, определить ускорение точек *B* и *C*.

Решение. За полюс выберем точку *A,* так как ускорение этой точки можно найти:



$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\text{âð}} + \bar{a}_A^{\text{ö}},$$

$$a_A^{\text{âð}} = \varepsilon \text{ÀÎ} = 0,$$

так как кривошип *OA* вращается равномерно, $\omega = \text{const} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon = \dot{\omega} = 0\,.$$

$a_A^{\text{ö}} = \omega_{OA}^2 OA = 2^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$ м/с^2. Вектор $\bar{a}_A^{\text{ö}}$ направлен по $\overline{AO}$ от точки *A* к точке *O.*

Применим формулу (6), задавая направление вектора $\bar{a}_B$ (рис. 17):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\text{âð}} + \bar{a}_{BA}^{\text{ö}}. \qquad (8)$$

Находим $\bar{a}_{BA}^{\text{âð}}$ и $\bar{a}_{BA}^{\text{ö}}$:

$$a_{BA}^{\text{âð}} = \left|\varepsilon_{AB}\right| AB\,,$$

так как ε_{AB} неизвестно, то зададим направление вектора $\bar{a}_{BA}^{âð}$, учитывая, что $\bar{a}_{BA}^{âð} \perp \overline{BA}$.

$$a_{BA}^{ö} = \omega_{AB}^{2} AB = 0,29^{2} \cdot 1,6 = 0,135 \text{ м/с}^{2}.$$

Вектор $\bar{a}_{BA}^{ö}$ направлен по $\overline{BA}$ от точки *B* к полюсу *A*. Проектируем выражение (8) на выбранные оси (*X, Y*):

$$\text{Ось } X\text{:}\quad a_B \cos 30^\circ = a_A^{ö} \cos 30^\circ + a_{BA}^{ö}. \qquad (9)$$

$$\text{Ось } Y\text{:}\quad -a_B \cos 60^\circ = a_{BA}^{âð} - a_A^{ö} \cos 60^\circ. \qquad (10)$$

Находим из (9)

$$a_B = \frac{a_A^{ö} \cos 30^\circ + a_{BA}^{ö}}{\cos 30^\circ} = \frac{0,8 \cdot 0,87 + 0,135}{0,87} = 0,96 \text{ м/с}^{2},$$

из (10)

$$a_{BA}^{âð} = -a_B \cos 60^\circ + a_A^{ö} \cos 60^\circ = -0,96 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,5 = -0,08 \text{ м/с}^{2}.$$

Минус показывает, что вектор $\bar{a}_{BA}^{âð}$ направлен в сторону, противоположную направлению, выбранному на рис. 17.

Определим угловое ускорение шатуна *AB:*

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^{âð}\right|}{AB} = \frac{0,08}{1,6} = 0,05 \text{ рад/с}^{2}.$$

Направление ε_{AB} будет по часовой стрелке. Определим ускорение точки *C,* выбрав за полюс точку *A*. Вектор $\bar{a}_{Ñ}$ разложим по выбранным осям координат:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{CX} + \bar{a}_{CY} = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^{âð} + \bar{a}_{CA}^{ö}. \qquad (11)$$

Находим $\bar{a}_{CA}^{âð}$ è $\bar{a}_{CA}^{ö}$:

$a_{CA}^{âð} = \varepsilon_{AB} AC = 0,05 \cdot 0,8 = 0,04$ м/с^2, $\bar{a}_{CA}^{âð} \perp \overline{CA}$ и направлен в соответствии с ε_{AB}.

$a_{CA}^{ö} = \omega_{AB}^{2} AC = 0,29^{2} \cdot 0,8 = 0,068$ м/с^2, вектор $\bar{a}_{CA}^{ö}$ направлен по *CA* от точки *C* к полюсу *A*.

Проектируем выражение (11) на оси координат:

$$a_{CX} = a_A^{ö}\cos 30^\circ + a_{CA}^{ö} = 0,8\cdot 0,87 + 0,068 = 0,764 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{CY} = -a_A^{ö}\cos 60^\circ - a_{CA}^{âð} = -0,8\cdot 0,5 - 0,04 = -0,44 \text{ м/с}^2,$$

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = \sqrt{(0,764)^2 + (-0,44)^2} = 0,88 \text{ м/с}^2.$$

Построение плана ускорений. В произвольно выбранной точке *M* (рис. 18) строим векторный многоугольник ускорений по формуле (8). Из точки *M* проводим линию, параллельную вектору $\bar{a}_{À}^{ö}$, и откладываем отрезок *MD*, равный в масштабе модулю этого ускорения. Из точки *D* проводим отрезок *DE*, параллельный ускорению $\bar{a}_{BÀ}^{ö}$ и равный в масштабе модулю этого ускорения. Из точки *E* проводим линию, параллельную ускорению $\bar{a}_{BÀ}^{âð}$, учитывая, что $\bar{a}_{BÀ}^{âð} \perp \bar{a}_{BÀ}^{ö}$. Из точки *M* проводим линию, параллельную вектору ускорения $\bar{a}_{Â}$. Получим точку *F*, где сходятся векторы $\bar{a}_{BÀ}^{âð}$ è $\bar{a}_{Â}$. Отрезок *EF* в масштабе равен модулю ускорения $\bar{a}_{BÀ}^{âð}$. Отрезок *MF* равен в масштабе модулю ускорения точки *B*.

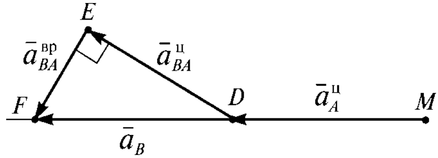


Рис. 18

Ответ. $a_B = 0,96$ м/с^2, $a_C = 0,88$ м/с^2.

Мгновенный центр ускорений

Мгновенный центр ускорений (МЦУ) — это точка в плоскости движения плоской фигуры, ускорение которой равно нулю.

Для построения МЦУ при известных ускорении точки плоской фигуры, угловых скорости и ускорении необходимо (рис. 19):

1. Определить угол μ по формуле: $\mathrm{tg}\,\mu = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.
2. Повернуть вектор ускорения точки на угол μ в направлении углового ускорения.
3. Отложить отрезок *AQ*: $AQ = \dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ по направлению повернутого вектора ускорения $\bar{a}_A$.

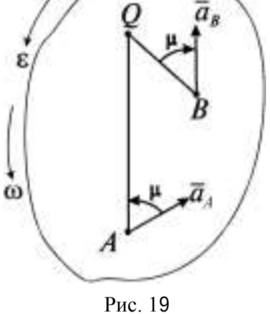


Рис. 19

С помощью МЦУ можно найти ускорение любой точки. Для этого находим величину ускорения точки *B*: $a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. От отрезка BQ под углом μ откладываем в направлении, противоположном угловому ускорению, вектор ускорения точки *B* (рис. 19).

МЦУ и МЦС в общем случае — разные точки.

Пример 6.

Колесо радиуса $R = 0,5$ м катится без скольжения равнозамедленно по прямолинейному горизонтальному рельсу. Скорость центра колеса $V_C = 0,5$ м/с Ускорение центра $a_C = 0,5$ м/с^2. Найти ускорение точки *A* с помощью МЦУ и по теореме об ускорениях точек плоской фигуры.

Решение. Находим угловые скорость и ускорение колеса:

$$\omega = \frac{V_C}{R} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \text{ рад/с},$$

$$\varepsilon = \frac{a_C}{R} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \text{ рад/с}^2.$$

Угловая скорость направлена по часовой стрелке, так как вектор скорости $\bar{V}_C$ относительно МЦС поворачивается по часовой стрелке. Угловое ускорение направлено противоположно в соответствии с направлением вектора ускорения центра колеса $\bar{a}_C$.

I способ. Определим угол μ:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1, \qquad \mu = \operatorname{arctg}1 = 45°.$$

Повернем a_C на угол 45° по направлению углового ускорения. Определим расстояние от точки *C* до МЦУ (рис. 20):

$$CQ = \frac{a_C}{\varepsilon^2 + \omega^2} = \frac{0,5}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,36 \text{ м},$$

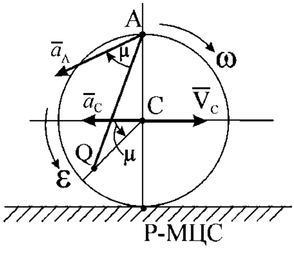


Рис. 20

Находим расстояние точки *A* до МЦУ из ΔACQ:

$$AQ = \sqrt{CQ^2 + AC^2 - 2CQ \cdot AC \cos 135°} =$$

$$= \sqrt{0,36^2 + 0,5^2 + 2 \cdot 0,36 \cdot 0,5 \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$AQ = 0,8 \text{ м}$$

В точке A от отрезка AQ отложим вектор ускорения точки A в направлении, противоположном угловому ускорению. Величина a_A ускорения точки A равна:

$$a_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,8\sqrt{1^2 + 1^2} = 1,12 \text{ м/с}^2.$$

II способ. Применим формулу (6), приняв за полюс точку C:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{a}_{AC}^{\text{âð}} + \bar{a}_{AC}^{\text{ö}}. \qquad (12)$$

Находим $\bar{a}_{AC}^{\text{âð}}$, $\bar{a}_{AC}^{\text{ö}}$:

$$a_{AC}^{\text{âð}} = \varepsilon AC = \varepsilon R = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2,$$

$\bar{a}_{AC}^{\text{âð}} \perp \overline{AC}$ и направлен в соответствии с угловым ускорением (рис. 21):

$$a_{AC}^{\text{ö}} = \omega^2 AC = W\ ^2R = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

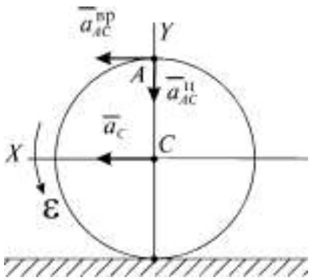


Рис. 21

Вектор $\bar{a}_{AC}^{\text{ö}}$ направлен от точки A к полюсу C (рис. 21).

Проектируем выражение (12) на выбранные оси координат:

$$a_{AX} = a_C + a_{AC}^{\text{âð}} = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{AY} = -a_{AC}^{\text{ö}} = -0,5 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A = \sqrt{a_{AX}^2 + a_{AY}^2} = \sqrt{1 + (-0,5)^2} = 1,12 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $a_A = 1,12$ м/с^2.

Вопросы для повторения

1. Какое движение твердого тела называется плоским?
2. Из каких движений состоит плоское движение твердого тела и какое движение зависит от выбора полюса?
3. Запишите уравнения плоского движения твердого тела.
4. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
5. Как определить вращательную скорость точки плоской фигуры относительно полюса?
6. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры?
7. Что называется мгновенным центром скоростей?
8. Как определить мгновенный центр скоростей в общем случае?

9. Как определить скорость любой точки плоской фигуры, если известен мгновенный центр скоростей?
10. Как определить ускорение любой точки плоской фигуры?
11. Какая точка называется мгновенным центром ускорений?
12. Как определить ускорение любой точки плоской фигуры, если известен мгновенный центр ускорений?

6. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ (СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ)

Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, называют вращением твердого тела вокруг неподвижной точки. Это движение также называют сферическим, поскольку траекториями всех точек тела являются сферы, центр которых находится в неподвижной точке. Для задания движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, используют углы Эйлера (рис. 1).

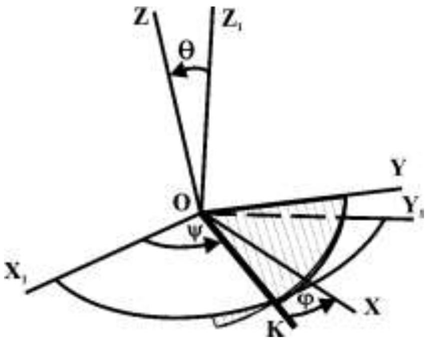


Рис. 1

Точка *O* — начало подвижной и неподвижной систем координат.

$OX_1Y_1Z_1$ — неподвижная система координат;

OXYZ — подвижная система координат, связанная с твердым телом;

OK — линия узлов (линия пересечения неподвижной плоскости OX_1Y_1 и подвижной *OXY*);

Ψ — угол процессии (угол между осью OX_1 и линией узлов);

φ — угол собственного вращения (угол между линией узлов и подвижной осью *OX*);

θ — угол нутации (угол между неподвижной осью OZ_1 и подвижной осью *OZ*).

Все углы откладываются в направлении против хода часовой стрелки от осей OX_1, OZ_1 и линии узлов *OK*.

Положение тела в любой момент времени определяется углами Эйлера (прецессии, собственного вращения и нутации), которые должны быть однозначными функциями времени:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \psi(t), \\ \theta &= \theta(t), \\ \varphi &= \varphi(t), \end{aligned}\right\} \text{ уравнения или закон вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.} \quad (1)$$

Угловая скорость

По теореме Эйлера—Даламбера всякое перемещение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно заменить поворотом вокруг оси *OP*, проходящей через эту точку (рис. 2). Ось *OP* будет мгновенной осью вращения, на которой все точки имеют скорость, равную нулю. Век-

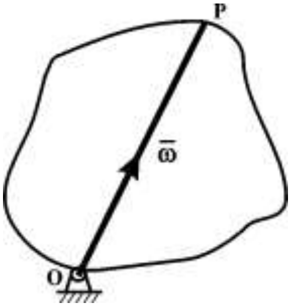


Рис. 2

тор угловой скорости будет направлен по мгновенной оси вращения в сторону, откуда виден поворот тела против хода часовой стрелки. Модуль вектора угловой скорости равен:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2)$$

Вектор угловой скорости в отличие от вращательного движения вокруг неподвижной оси может изменяться по величине и направлению.

Угловое ускорение

Угловое ускорение — производная вектора угловой скорости по времени:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}. \qquad (3)$$

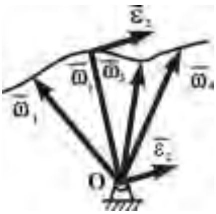


Рис. 3

Вектор углового ускорения, как производная вектора по скалярному аргументу, направлен по касательной к годографу вектора угловой скорости, который изменяется по величине и направлению (рис. 3). Поэтому вектор углового ускорения в общем случае не направлен по мгновенной оси вращения, как вектор угловой скорости.

Вектор углового ускорения изображают в неподвижной точке параллельно касательной к годографу вектора угловой скорости (рис. 3).

Скорость точки

Скорости точек твердого тела в сферическом движении определяют по формуле Эйлера (рис. 4):

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}\,, \qquad (4)$$

где $\overline{\omega}$ — вектор угловой скорости; $\overline{r}$ — радиус-вектор данной точки относительно неподвижной точки.

Модуль скорости равен:

$$V = \omega r \sin\left(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}}\right) = \omega h, \tag{5}$$

где h — кратчайшее расстояние точки до мгновенной оси вращения.

Направление вектора скорости $\bar{V}$ определяется направлением векторного произведения $(\bar{\omega} \times \bar{r})$, т. е. вектор скорости $\bar{V}$ будет направлен перпендикулярно плоскости векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$, откуда поворот вектора $\bar{\omega}$ к вектору $\bar{r}$ виден на наименьший угол против хода часовой стрелки (рис. 4).

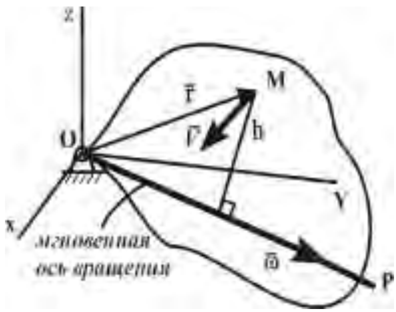


Рис. 4

Пример 1.

Конус с углом при вершине $2\alpha = 60°$ и радиусом основания $r = 20\sqrt{3}$ см катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной поверхности. Определить скорость точки *A*, если скорость центра основания постоянна и равна $V_C = 90$ см/с.

Решение. Движение конуса является сферическим. Мгновенная ось вращения конуса совпадает с образующей *OB*, так как скорости точек образующей равны нулю (рис. 5).

Используя формулу (5), находим угловую скорость вращения конуса вокруг мгновенной оси вращения:

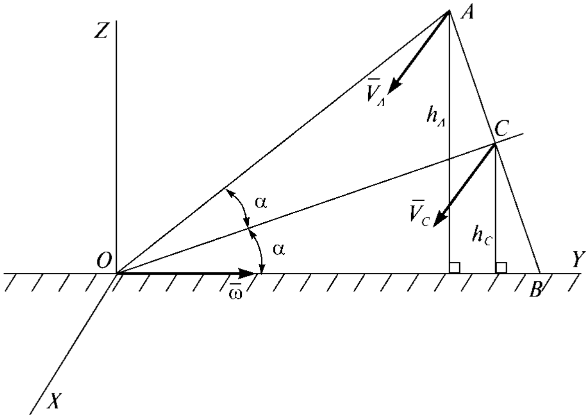


Рис. 5

$$\omega = \frac{V_C}{h_C},$$

где $h_C = BC\cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 30$ см. Тогда

$$\omega = \frac{90}{30} = 3 \text{ рад/с.}$$

Вектор угловой скорости направлен по мгновенной оси вращения от точки *O* к точке *B*.

Скорость точки *A* определим как вращательную скорость вокруг мгновенной оси вращения:

$$V_A = \omega h_A,$$

где $h_A = AB\cos 30^\circ = 2r\cos 30^\circ = 2\cdot 20\sqrt{3}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 60$ см;

$$V_A = 3\cdot 60 = 180 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости точки *A* направлен аналогично вектору скорости точки *C*, т. е. перпендикулярно плоскости *OXY* в соответствии с направлением угловой скорости вращения.

Ответ. $V_A = 180$ см/с.

Ускорение точки

Дифференцируем формулу (4) по времени

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right) = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}, \qquad (6)$$

где $\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt}$ — ускорение точки;

$\bar{\varepsilon} = \dfrac{d\bar{\omega}}{dt}$ — угловое ускорение тела;

$\bar{V} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ — скорость точки.

Тогда

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{V}\,. \qquad (7)$$

Слагаемое $\bar{\varepsilon}\times\bar{r} = \bar{a}^{\text{âð}}$ представляет собой вектор вращательного ускорения точки, величина которого равна:

$$a^{\text{âð}} = \varepsilon r \sin\left(\widehat{\bar{\varepsilon}, \bar{r}}\right) = \varepsilon h_1,$$

где $h_1 = r \sin\left(\widehat{\bar{\varepsilon}, \bar{r}}\right)$ — расстояние от точки до вектора $\bar{\varepsilon}$. Вектор $a^{\text{âð}}$ направлен в соответствии с направлением векторного произведения $(\bar{\varepsilon} \times \bar{r})$ (рис. 6).

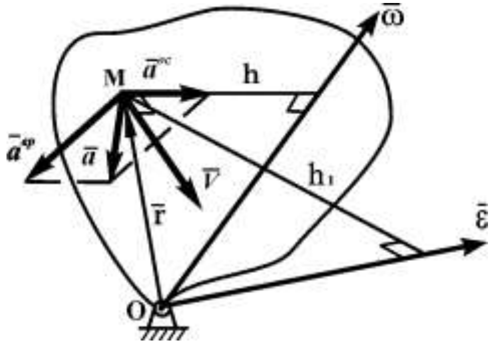


Рис. 6

Слагаемое $\bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{a}^{\text{ос}}$ — вектор осестремительного ускорения, который направлен в соответствии с векторным произведением, т. е. по направлению перпендикуляра h, опущенного из точки на мгновенную ось вращения. Величина осестремительного ускорения равна:

$$a^{\text{ос}} = \omega V = \omega^2 h. \tag{8}$$

Ускорение точки в сферическом движении равно геометрической сумме вращательного и осестремительного ускорений:

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}^{\text{âð}} + \bar{a}^{\text{ос}}.} \tag{9}$$

Так как вращательное и осестремительное ускорения не перпендикулярны друг другу, то величина ускорения точки равна:

$$a = \sqrt{\left(a^{\text{âð}}\right)^2 + \left(a^{\text{ос}}\right)^2 + 2a^{\text{âð}} a^{\text{ос}} \cos\left(\widehat{\bar{a}^{\text{âð}}, \bar{a}^{\text{ос}}}\right)}. \tag{10}$$

Пример 2.

Используя условие примера 1, найти ускорение точки *A*.

Решение. Определим угловое ускорение конуса. При качении конуса по горизонтальной поверхности вектор угловой скорости будет вращаться вокруг вертикальной оси *OZ*. Так как модуль вектора угловой скорости постоянен, то конец вектора $\bar{\omega}$ описывает окружность постоянного радиуса, равного модулю вектора угловой скорости в горизонтальной плоскости. Угловую скорость вращения вектора $\bar{\omega}$ вокруг оси *OZ* определяем, как угловую скорость вращения оси конуса вокруг оси *OZ*:

$$\omega_1 = \frac{V_c}{CD},$$

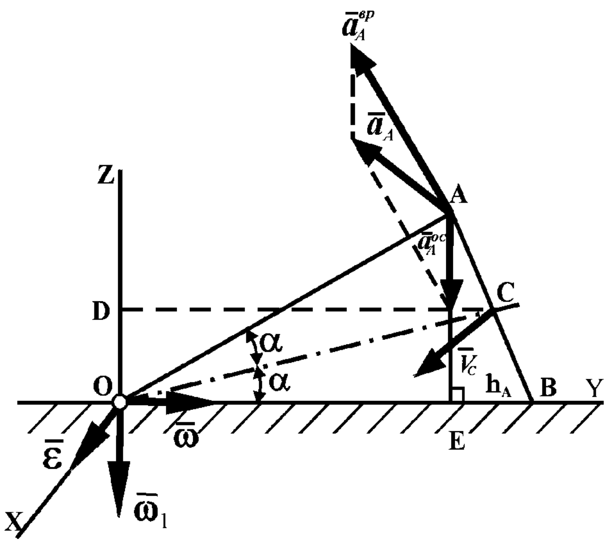


Рис. 7

где $CD = OC\cos 30^\circ = BC\,\mathrm{tg}\,60^\circ \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\,\sqrt{3}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$ см,

$$\omega_1 = \frac{90}{30\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ рад/с}.$$

Вектор $\bar{\omega}_1$ будет направлен противоположно положительному направлению оси *Z.*

Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ геометрически равен скорости конца вектора угловой скорости $\bar{\omega}$. Ее можно определить, как вращательную скорость точки, радиус вращения которой равен модулю угловой скорости ω:

$$\varepsilon = \omega_1 \omega = 10\sqrt{3}\cdot 3 = 30\sqrt{3} \text{ рад/с}^2.$$

Вектор углового ускорения будет находиться в плоскости *OXY,* приложен в неподвижной точке и направлен в сторону положительного направления оси *OX*.

Ускорение точки в сферическом движении равно:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{вр} + \bar{a}_A^{ос}.$$

По формулам (7), (8) находим $a_A^{вр}$ и $a_A^{ос}$:

$$a_A^{вр} = \varepsilon h_1,$$

где $h_1 = AO = 2r$ — отрезок перпендикуляра, опущенного из точки *A* на вектор углового ускорения;

$$a_A^{\text{âð}} = 30\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 20\sqrt{3} = 3600 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_A^{\text{âð}}$, перпендикулярный отрезку *AO*, находится в плоскости *ZOY* и направлен в соответствии с угловым ускорением, т. е. если смотреть с конца вектора $\bar{\varepsilon}$, то вектор $\bar{a}_A^{\text{âð}}$ должен вращаться против хода часовой стрелки.

$$a_A^{\text{ос}} = \omega^2 h,$$

где $h = AE = 2r\cos 30^\circ$;

$$a_A^{\text{ос}} = \omega^2 2r\cos 30^\circ = 3^2 \cdot 2 \cdot 20\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 540 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $a_A^{\text{ос}}$ направлен по *AE* к мгновенной оси вращения:

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{\text{âð}}\right)^2 + \left(a_A^{\text{ос}}\right)^2 + 2\left(a_A^{\text{âð}}\right)\left(a_A^{\text{ос}}\right)\cos\left(\bar{a}_A^{\text{âð}} \widehat{,}\, \bar{a}_A^{\text{ос}}\right)},$$

$$\angle \bar{a}^{\text{âð}},\ \bar{a}_A^{\text{ос}} = 120^\circ,$$

$$a_A = \sqrt{3600^2 + 540^2 + 2 \cdot 3600 \cdot 540 \cdot \cos 120^\circ} = 3362{,}68 \text{ см/с}^2.$$

Ответ. a_A =3362,68 см/с^2.

Вопросы для повторения

1. По каким траекториям движутся точки твердого тела, закрепленного в неподвижной точке?
2. Запишите уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.
3. Как формулируется теорема Эйлера—Даламбера о перемещении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?
4. Как определить угловую скорость и как направлен вектор угловой скорости?
5. Как определить угловое ускорение тела, имеющего одну неподвижную точку?

6. Как направлен вектор углового ускорения?
7. Как определить скорость точки твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, если известна мгновенная ось вращения?
8. Как определить вращательное и осестремительное ускорения точки твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?
9. Как направлено осестремительное ускорение?
10. Как направлено вращательное ускорение?

7. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение свободного твердого тела разложим на поступательное вместе с полюсом относительно неподвижной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и вращательное вокруг полюса. В полюсе O введем две подвижные системы координат. Система $OX_2Y_2Z_2$ имеет с телом одну неподвижную точки (полюс O) и движется поступательно, а движение второй системы $OXYZ$ описывается углами Эйлера (рис. 1).

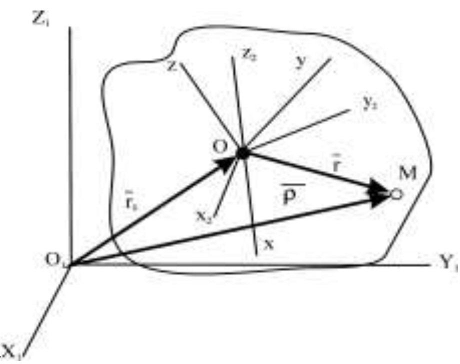


Рис. 1

Уравнениями движения свободного твердого тела будут:

1. $X_0 = f_1(t)$.	2. Y	
4. $\Psi = \Psi(t)$.	5. $\theta = \theta(t)$.	6. $\varphi = \varphi(t)$.

Скорость точки

Дифференцируем $\bar{\rho} = \bar{r}_0 + \bar{r}$ по времени:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt},$$

где $\bar{V}_M = \dfrac{d\bar{\rho}}{dt}$ — скорость точки;

$\bar{V}_0 = \dfrac{d\bar{r}_0}{dt}$ — скорость полюса O;

$\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ — скорость точки M во вращательном движении тела вокруг полюса O;

$$\boxed{\bar{V}_M = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}.} \qquad (2)$$

Скорость любой точки твердого тела равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении тела вокруг полюса.

Ускорение точки

Дифференцируем (2) по времени

$$\frac{d\bar{V}_M}{dt} = \frac{d\bar{V}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt},$$

где $\bar{a}_M = \dfrac{d\bar{V}_M}{dt}$ — ускорение точки;

$\bar{a}_0 = \dfrac{d\bar{V}_0}{dt}$ — ускорение начала подвижной системы координат $OX_2Y_2Z_2$;

$\bar{\varepsilon} = \dfrac{d\bar{\omega}}{dt}$ — угловое ускорение тела в подвижной системе координат;

$\bar{V} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ — скорость точки.

Получим

$$\boxed{\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}.} \tag{3}$$

Ускорение точки свободного твердого тела равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее движении вокруг полюса.

Вопросы для повторения

1. На какие составляющие можно разложить движение свободного твердого тела?
2. Запишите уравнения движения свободного твердого тела.
3. Как определить скорость точек свободного твердого тела?
4. Как определить ускорение точек свободного твердого тела?

8. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела называют сложным, если тело одновременно участвует как минимум в двух движениях. Относительным движением твердого тела называют его движение относительно подвижной системы координат. Переносным движением твердого тела называют его движение вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной.

Сложение поступательных движений твердого тела

При сложении двух поступательных движений твердого тела получаем поступательное движение со скоростью, равной геометрической сумме скоростей составляющих поступательных движений:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 . \tag{1}$$

Пример 1.

По платформе движется тележка со скоростью $V_2 = 2$ м/с. Платформа движется в ту же сторону со скоростью $V_1 = 1$ м/с. Найти скорость тележки (рис. 1).

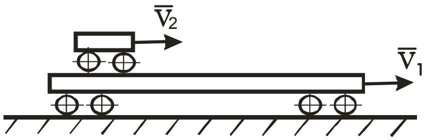


Рис. 1

Решение. Скорости тележки и платформы направлены в одну сторону. Применим формулу (1) в скалярном виде и получим абсолютную скорость тележки:

$$V = V_1 + V_2 = 2 + 1 = 3ì\ / ñ.$$

Ответ. $V = 3$ м/с.

Сложение вращательных движений твердого тела. Сложения вращений вокруг пересекающихся осей

При сложении вращений вокруг пересекающихся осей получаем вращательное движение, происходящее вокруг мгновенной оси вращения, с абсолютной угловой скоростью, равной геометрической сумме угловых скоростей составляющих вращений:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 . \tag{2}$$

Пример 2.

Найти абсолютную угловую скорость подвижного конуса, равномерно катящегося без скольжения по неподвижному конусу, оси которых взаимно перпендикулярны (рис. 2). Известно, что $OA = 60$ см, скорость точки

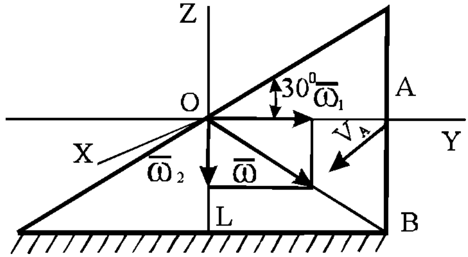


Рис. 2

A, лежащей на оси конуса, V_A = 120 см/с и направлена перпендикулярно плоскости чертежа на читателя.

Решение. Точка *O* при вращении конуса остается неподвижной. Скорость точки *B* при качении без скольжения равна нулю. Мгновенная ось вращения проходит по прямой *OB*. Абсолютная угловая скорость вращения будет направлена по мгновенной оси вращения *OB*. Угловая скорость вращения конуса вокруг оси *OA* равна:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AB} = \frac{120\sqrt{3}}{60} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ ðàä/ñ},$$

$$\grave{A}\hat{A} = \hat{I}\ \grave{A}\,\mathrm{tg}30° = \frac{60}{\sqrt{3}}.$$

Вектор $\overline{\omega}_1$ будет направлен по *OA* от точки *O* к точке *A*. Угловая скорость вращения конуса вокруг оси *OZ* равна:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{OA} = \frac{120}{60} = 2 \text{ ðàä/ñ}.$$

Вектор $\overline{\omega}_2$ будет направлен по оси *OZ* вниз от точки *O* к точке *L*. Так как $\overline{\omega}_1 \perp \overline{\omega}_2$, то абсолютная угловая скорость равна:

$$\omega = \sqrt{\omega_1 + \omega_2} = \sqrt{3,46^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ ðàä/ñ}.$$

Вектор абсолютной угловой скорости направлен по *OB* от точки *O* к точке *B* (рис. 2).

Ответ. ω = 4 рад/с.

Сложение вращений вокруг параллельных осей

1. Вращения имеют одинаковые направления

Сложение двух одинаково направленных вращений вокруг параллельных осей приводит к одному вращению вокруг параллельной мгновенной оси вращения с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений. Мгновенная ось проходит через точку, которая делит внутренним образом расстояние между осями на части, обратно пропорциональные угловым скоростям составляющих вращений. Абсолютное угловое ускорение направлено по мгновенной оси вращения.

Пример 3.

Кривошип *OA* вращается с постоянной скоростью ω_{OA} = 2 рад/с и приводит в движение колесо *II* (рис. 3).

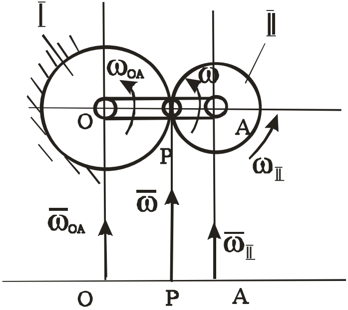


Рис. 3

Определить положение мгновенной оси вращения и абсолютную угловую скорость, если *OA* = 40 см, r_{II} = 10 см, ω_{OA} = 2 рад/с, ω_{II} = 6 рад/с.

Решение. Так как угловые скорости имеют одинаковое направление, то абсолютная угловая скорость равна сумме угловых скоростей кривошипа и колеса *II*:

$$\omega = \omega_{OA} + \omega_{II} = 2 + 6 = 8 \text{ ðàä/ ñ.}$$

Для определения положения мгновенной оси вращения составим пропорцию:

$$\frac{\omega_{OA}}{\omega_{II}} = \frac{AP}{OP}, \qquad AP = AO - OP,$$

$$\omega_{OA} OP = \omega_{II} AP = \omega_{II} (AO - OP),$$

$$(\omega_{OA} + \omega_{II}) OP = \omega_{II} AO,$$

$$OP = \frac{\omega_{II} AO}{\omega_{OA} + \omega_{II}} = \frac{6 \cdot 40}{2 + 6} = 30 \text{ ñì}.$$

Следовательно, мгновенная ось вращения будет проходить через точку соприкосновения подвижного *I* и неподвижного *II* колес (рис. 3).

Ответ. ω = 8 рад/с, *OP* = 30 см.

2. Вращения имеют противоположные направления с неравными угловыми скоростями

Сложение двух противоположно направленных вращений с неравными угловыми скоростями приводит к одному вращению вокруг параллельной мгновенной оси вращения с угловой скоростью, равной разности угловых скоростей составляющих вращений. Мгновенная ось вращения проходит через точку, которая делит внешним образом расстояние между осями на части, обратно пропорциональные угловым скоростям составляющих вращений, и находится за осью вращения с большей угловой скоростью. Абсолютная угловая скорость направлена в сторону большей угловой скорости.

Пример 4.

Кривошип *OA* длины l = 60 см вращается с угловой скоростью ω_1 = 4 рад/с и приводит во вращение колесо радиуса r = 20 см (рис. 4). Угловая скорость колеса вокруг оси, проходящей через точку *A*, равна ω_2 = 16 рад/с. Определить абсолютную угловую скорость.

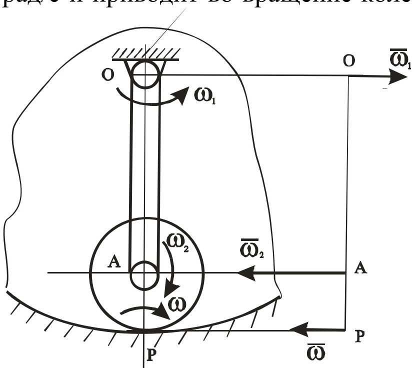


Рис. 4

Решение. Так как угловые скорости вращений колеса вокруг оси, проходящей через точку *A*, и кривошипа вокруг оси, проходящей в точке *O*, направлены в разные стороны, то

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = 12\ \text{ðàä/ ñ}.$$

Абсолютная угловая скорость ω направлена в сторону большей угловой скорости и находится за осью, проходящей через точку *A*:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{AP}{OP}, \quad OP = OA + AP,$$

$$\omega_1 OP = \omega_2 AP, \quad \omega_1(OA + AP) = \omega_2 AP,$$

$$AP(\omega_2 - \omega_1) = \omega_1 OA,$$

$$AP = \frac{\omega_1 AO}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{4 \cdot 60}{16 - 4} = \frac{4 \cdot 60}{12} = 20\ \text{ñì}\ .$$

Мгновенная ось вращения находится на расстоянии 20 см, т. е. в точке *P*, которая является мгновенным центром скоростей в плоском движении колеса (рис. 4).

Ответ. ω = 12 рад/с, *AP* = 20 см.

3. Пара вращений (вращения имеют противоположные направления с равными угловыми скоростями)

Парой вращений называют совокупность двух вращений твердого тела вокруг параллельных осей с равными и противоположно направленными угловыми скоростями. Абсолютное движение твердого тела будет мгновенно поступательным, т. е. скорости всех точек будут одинаковы, перпендикулярны осям пары вращений и равны произведению любой угловой скорости пары вращений на кратчайшее расстояние между осями d:

$$V = \omega_1 d = \omega_2 d\ . \tag{3}$$

Пример 5.

Парой вращений является движение велосипедной педали AB относительно рамы велосипеда (рис. 5). Это движение представляет собой совокупность переносного вращения вместе с кривошипом O_1O_2 вокруг оси O_1 и относительно оси, проходящей через точку O_2. Педаль AB во время движения остается параллельной своему первоначальному положению, т. е. совершает поступательное движение вследствие того, что угловые скорости составляющих вращений ω_1 и ω_2 равны по модулю
и противоположны по направлению.

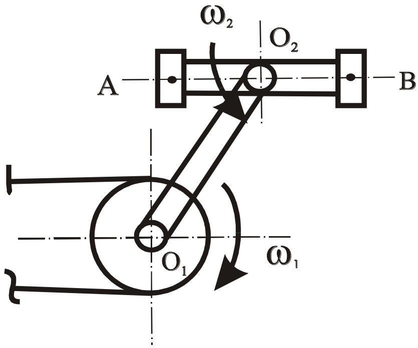


Рис. 5

Пример 6.

Определить угловую скорость шестерни *3* планетарного механизма, если радиусы всех шестерен одинаковы, а кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 6).

Решение. Переносная угловая скорость — это угловая скорость кривошипа ω_0. Найдем относительные угловые скорости шестерен:

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0 = -\omega_0$$

(шестерня *1* неподвижна, $\omega_1 = 0$),

$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0,$$

$$\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0.$$

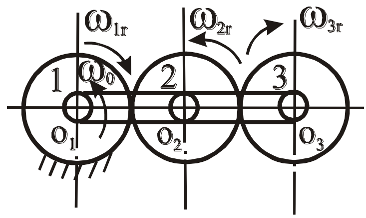


Рис. 6

Зацепления шестерен являются внешними. Поэтому составим следующие отношения:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1}, \tag{4}$$

$$\frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}} = -\frac{r_3}{r_2}. \tag{5}$$

Перемножим отношения (4) и (5):

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{3r}} = \frac{r_3}{r_1} = 1,$$

подставив значения ω_{1r} и ω_{3r}, получим

$$\frac{-\omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = 1,$$

откуда $\omega_3 = \omega_0 - \omega_0 = 0$, следовательно, $\omega_{3r} = -\omega_0$.

Так как угловая скорость шестерни *3* равна нулю, то она совершает поступательное движения. Угловая скорость кривошипа и угловая скорость шестерни *3* составляют пару вращения, так как они имеют равные и противоположно направленные угловые скорости.

4. Кинематический расчет зубчатых передач методом Виллиса

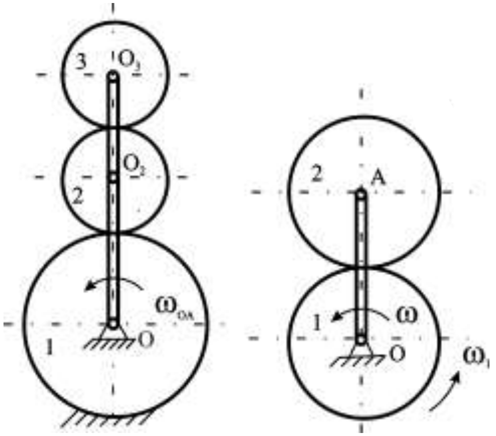
Метод Виллиса применяют для определения угловых скоростей зубчатых механизмов, в которых имеются зубчатые колеса, вращающиеся относительно подвижных осей, т. е. планетарные или дифференциальные механизмы.

На рис. 7, *а* изображена схема планетарного зубчатого механизма, в котором колесо *1* неподвижно, а остальные колеса приводятся в движение кривошипом, который называют водилом. Ось водила совпадает с осью неподвижного колеса. На рис. 7, *б* изображена схема дифференциального зубчатого механизма, в котором колесо *1* и водило (кривошип) вращаются вокруг одной и той же оси.

Метод Виллиса основан на теории сложения вращений вокруг параллельных осей. Зубчатые колеса участвуют в двух движениях:

а) в относительном вращении зубчатых колес по отношению к водилу,

б) в переносном вращении вместе с водилом вокруг его оси (переносной угловой скоростью для каждого зубчатого колеса будет угловая скорость водила).



а *б*

Рис. 7

При расчете определяют зависимость между относительными угловыми скоростями, которые равны разности абсолютных и переносных угловых скоростей. В этом случае отношения между относительными угловыми скоростями обратно пропорциональны радиусам колес или числу зубьев, взятые со знаком минус, если зацепление внешнее, и со знаком плюс, если зацепление внутреннее.

Пример 7.

Определить угловую скорость колеса *2* дифференциального механизма (рис. 8), если ω_{OA} = 4 рад/с, ω_1 = 8 рад/с, r_1 = 30 см, r_2 = 15 см.

Решение. В механизме переносная угловая скорость — это угловая скорость кривошипа (водила) *OA*. Тогда относительная скорость каждого колеса будет равна (направление абсолютной скорости колеса *2* выбираем против часовой стрелки):

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_{OA},$$

$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_{OA}.$$

Составим отношение для механизма, учитывая, что колеса *1* и *2* имеют внешнее зацепление:

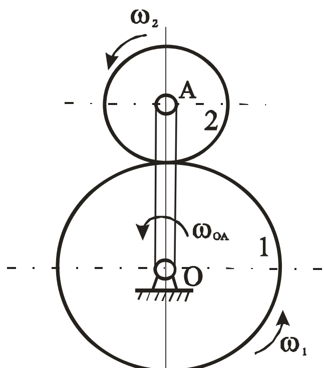


Рис. 8

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{\omega_1 - \omega_{OA}}{\omega_2 - \omega_{OA}} = -\frac{r_2}{r_1},$$

$$-\left(\omega_1 - \omega_{OA}\right)\frac{r_1}{r_2} = \omega_2 - \omega_{OA},$$

$$\omega_2 = \omega_{OA} - \left(\omega_1 - \omega_{OA}\right)\frac{r_1}{r_2},$$

$$\omega_2 = 4 - (8-4)\frac{30}{15} = 4 - 8 = -4 \text{ ðàä/ ñ.}$$

Минус показывает, что колесо *2* вращается по часовой стрелке, т. е. противоположно водилу и колесу *1*.

Ответ. $\omega_2 = -4$ рад/с. Угловая скорость колеса *2* имеет направление, противоположное принятому на рис. 8.

Пример 8.

Определить угловую скорость колеса *2* дифференциального механизма в случае внутреннего зацепления, если $\omega_{OA} = 8$ рад/с, $\omega_1 = 12$ рад/с, $r_1 = 60$ см, $r_2 = 15$ см.

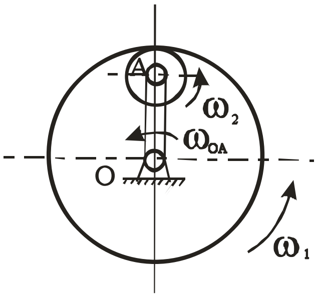


Рис. 9

Решение. Переносная угловая скорость — это угловая скорость кривошипа (водила) *OA*. Относительная скорость каждого колеса равна (абсолютную угловую скорость колеса *2* считаем направленной против часовой стрелки):

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_{OA},$$

$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_{OA}.$$

Составим отношение для механизма, учитывая, что колеса *1* и *2* имеют внутреннее зацепление:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{\omega_1 - \omega_{OA}}{\omega_2 - \omega_{OA}} = \frac{r_2}{r_1},$$

$$\left(\omega_1 - \omega_{OA}\right)\frac{r_1}{r_2} = \omega_2 - \omega_{OA},$$

$$\omega_2 = \omega_{OA} + \left(\omega_1 - \omega_{OA}\right)\frac{r_1}{r_2},$$

$$\omega_2 = 8 + (12-8)\frac{60}{15} = 8 + 16 = 24 \text{ ðàä/ ñ.}$$

Так как ω_2 положительна, то угловая скорость колеса *2* направлена против часовой стрелки, как было принято на рис 9.

Ответ. $\omega_2 = 24$ рад/с.

Сложение поступательного и вращательного движений

Твердое тело одновременно совершает переносное поступательное движение со скоростью $\bar{V}$ и относительное вращательное с угловой скоростью $\bar{\omega}$.

1. Скорость поступательного движения перпендикулярна оси относительного движения $(\bar{V} \perp \bar{\omega})$

Сложение поступательного переносного и вращательного относительного движений, при которых вектор скорости поступательного движения перпендикулярен вектору угловой скорости вращательного, приводит к одному вращению вокруг мгновенной оси, параллельной оси относительного вращения, с угловой скоростью, равной угловой скорости вращательного движения. Расстояние между мгновенной осью вращения и осью вращательного движения равно:

$$d = \frac{V}{\omega}. \qquad (6)$$

Пример 9.

Колесо катится без скольжения по горизонтальному прямолинейному рельсу (рис. 10). Скорость центра колеса $V_0 = 2$ м/с, радиус $R = 0{,}5$ м, относительная угловая скорость $\omega_0 = 4$ рад/с. Найти результирующее движение и положение мгновенной оси вращения.

Решение. Ось относительного вращения колеса перпендикулярна плоскости чертежа. Скорость переносного движения перпендикулярна этой оси. Поэтому два движения можем заменить одним вращательным движением вокруг мгновенной оси вращения. Угловая скорость результирующего абсолютного движения равна угловой скорости относительного вращения:

$$\omega_{ð} = \omega_0 = 4 \text{ ðàä/ ñ.}$$

Расстояние между осями будет равно:

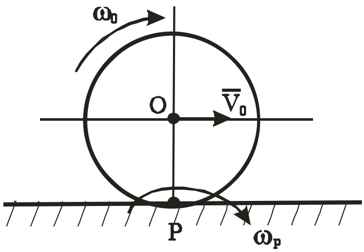


Рис. 10

$$d = \frac{V_0}{\omega_0} = \frac{2}{4} = 0{,}5\ \text{ì}\ .$$

Ответ. Мгновенная ось вращения будет проходить через точку P.

2. Скорость поступательного переносного движения параллельна вектору угловой скорости относительного вращения

Движение, при котором вектор скорости поступательного переносного движения параллелен вектору угловой скорости относительного вращательного движения, называют винтовым или кинематическим винтом. Винтовое движение нельзя заменить одним результирующим движением, т. е. его нельзя упростить. Если тело совершает винтовое движение, то векторы поступательной и угловой скоростей могут иметь как одинаковые, так и противоположные направления. Винтовые движения тела характеризуются параметром винта, который равен:

$$P = \frac{V}{\omega}. \tag{7}$$

Параметр винта — это перемещение тела вокруг оси винтового движения при повороте тела на 1 рад. Если скорость и угловая скорость переменны, то параметр винта также переменный. Винтовые движения характеризуются величиной шага винта, т. е. расстоянием, на которое переместится точка тела при одном обороте тела вокруг оси винтового движения. Если угловая скорость поступательного движения постоянна, то шаг винта можно определить по следующей формуле:

$$h = 2\pi P = \frac{2\pi V}{\omega}. \tag{8}$$

Если угловая скорость и скорость поступательного движения переменны, то движение твердого тела будет мгновенным винтовым движением.

Пример 10.

По образующей цилиндра радиуса R = 20 см движется тело с постоянной скоростью V_M = 10 см/с (рис. 11). Определить вид движения тела и шаг винта, если цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω = 4 рад/с.

Решение. Составим уравнение движения точки M в декартовой системе координат:

$$X = R\cos\varphi,\ Y = R\sin\varphi,\ \ Z = V_M t,$$

где $\varphi = \omega t$.

Тогда

$$X = R\cos\omega t,\ Y = R\sin\omega t,\ \ Z = V_M t,$$

или

$$X = 20\cos 4t,\ Y = 20\sin 4t,\ \ Z = 10t$$

— это уравнения винтовой линии в параметрическом виде.

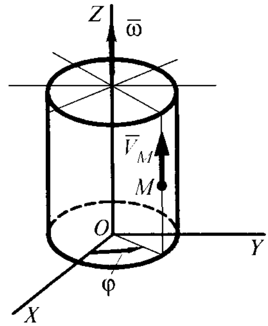


Рис. 11

Шаг винта равен:

$$h = \frac{2\pi V_M}{\omega} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10}{4} = 15{,}7\ \text{ñì}\ .$$

Ответ. Движение тела винтовое, h = 15,7 см.

3. Скорость поступательного переносного движения направлена под углом к вектору угловой скорости относительно вращательного движения

Сложение поступательного переносного и вращательного относительного движений, при которых вектор скорости поступа-

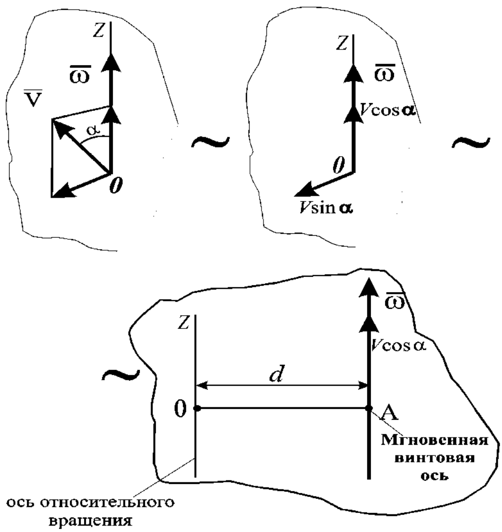


Рис. 12

тельного и вектор угловой скорости вращательного движений образуют некоторый угол, приводит к одному мгновенному винтовому движению (рис. 12). Мгновенная винтовая ось параллельна оси относительного вращения и находится от нее на расстоянии

$$d = \frac{V \sin \alpha}{\omega}. \tag{9}$$

Параметр винта равен:

$$d = \frac{V \cos \alpha}{\omega}. \tag{10}$$

Скорость поступательного движения составляет некоторый угол с вектором угловой скорости относительного вращательного движения — такое движение может быть заменено винтовым движением вокруг мгновенной винтовой оси.

Вопросы для повторения

1. Какое движение твердого тела называют сложным?
2. Какое движение получается при сложении двух поступательных движений?
3. Какое движение получается при сложении двух вращений вокруг пересекающихся осей?
4. Какое движение получается при сложении двух одинаково направленных вращений вокруг параллельных осей и где находится мгновенная ось вращения?
5. Какое движение получается при сложении двух неравных, противоположно направленных вращений вокруг параллельных осей и где находится мгновенная ось вращения?
6. Что называется парой вращения и какое движение совершает в этом случае твердое тело?
7. В чем заключается метод Виллиса?
8. Какое движение получается при сложении поступательного переносного движения и вращательного относительного, когда скорость поступательного движения перпендикулярна вектору относительной угловой скорости?
9. Какое движение называют винтовым?
10. Какое движение называют мгновенным винтовым движением?