ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2004
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.3

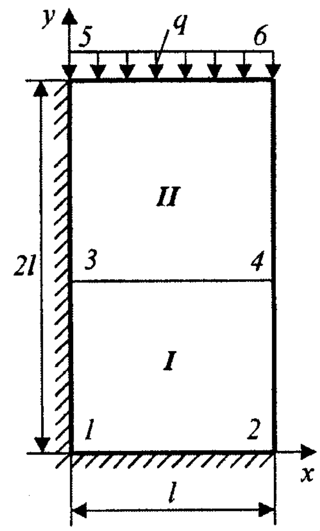
А. Е. КРУШЕВСКИЙ, В. Ф. КОНДРАТЮК

К ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Белорусский национальный технический университет,
Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь

(Поступила в редакцию 02.08.2002)

Известно, что краевые задачи для упругого прямоугольника в общем случае не получили замкнутого решения [1]. К такой задаче относится и задача равновесия прямоугольника (плоская деформация) при следующих условиях (см. рисунок): при $x{=}0$ $u = v{=}0$; при $y{=}0$ $u = v{=}0$; при $x = l$ $\tau_{xy} = \sigma_x = 0$; при $y = 2l$ $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = q$ (q — распределенная нагрузка).



Если решать задачу классическим методом конечных элементов (МКЭ) [2] путем разбиения области на прямоугольные конечные элементы, то вследствие того, что узлы *1*, *2*, *3* и *5* неподвижны, линейная аппроксимация невозможна. Требуется нелинейная аппроксимация. Так, для элемента ***I*** имеем:

$$u = a_1 + b_1x + c_1y + A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2,$$

$$v = a_2 + b_2x + c_2y + A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2.$$

Прежде всего подчиняем эти полиномы условию равновесия внутри ($\operatorname{div} T = 0$, T — тензор напряжений, объемными силами игнорируем). В результате получим:

$$u = a_1 + b_1x + c_1y + A_1(x^2 - \gamma y^2) + B_1xy - 0,5(\gamma - 1)B_2y^2,$$

$$v = a_2 + b_2x + c_2y + A_2(x^2 - \gamma^{-1}y^2) + B_2xy - 0,5\gamma^{-1}(\gamma - 1)B_1y^2. \quad (1)$$

Аналогичные полиномы имеем и для элемента ***II***:

$$u = a_3 + b_3x + c_3y + A_3(x^2 - \gamma y^2) + B_3xy - 0,5(\gamma - 1)B_4y^2,$$

$$v = a_4 + b_4x + c_4y + A_4(x^2 - \gamma^{-1}y^2) + B_4xy - 0,5\gamma^{-1}(\gamma - 1)B_3y^2,$$

где $\gamma = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$ ν — коэффициент Пуассона.

Если при линейной аппроксимации непрерывность сохраняется автоматически при переходе от одного элемента к другому за счет равенства перемещений в узлах элементов, то при квадратичной аппроксимации непрерывность не сохраняется. Требуется выполнить условие: при $y = l$ $u_I = u_{II}$, $v_I = v_{II}$. В результате выполнения условий непрерывности получаем: для элемента ***I*** выражение (1) при $a_1 = a_3 + c_3l - 0,5(\gamma - 1)l(b_2 - b_4) - c_1l$, $a_2 = a_4 + c_4l - 0,5(\gamma - 1)l(b_1 - b_3) - c_2l$, а для элемента ***II***

$$u = a_3 + b_3x + c_3y + A_1(x^2 - \gamma y^2) + [l^{-1}(b_1 - b_3) + B_1]xy - 0,5(\gamma - 1)[l^{-1}(b_2 - b_4) + B_2]y^2,$$

$$v = a_4 + b_4x + c_4y + A_2(x^2 - \gamma^{-1}y^2) + [l^{-1}(b_2 - b_4) + B_2]xy - 0,5\gamma^{-1}(\gamma -)[l^{-1}(b_1 - b_3) + B_1]y^2.$$

Теперь выполним условие закрепления: $u = v = 0$ в точках *1* ($x = 0$, $y = 0$), *2* ($x = l$, $y = 0$), *3* ($x = 0$, $y = l$), *5* ($x = 0$, $y = 2l$).

В результате имеем для ***I*** элемента:

$$u = -A_1xl + [\gamma A_1 l + 0,5B_2(\gamma - 1)l]y + A_1(x^2 - \gamma y^2) + B_1xy - 0,5(\gamma - 1)B_2y^2,$$

$$v = -A_1xl + [\gamma^{-1}A_1 l + 0,5\gamma^{-1}B_1(\gamma - 1)l]y + A_1(x^2 - \gamma^{-1}y^2) + B_2xy - 0,5\gamma^{-1}(\gamma - 1)B_1y^2,$$

для ***II*** элемента:

$$u = (y-l)[3\gamma A_1 l + 1,5(\gamma - 1)l(B_2 - A_1 - l^{-1}b_4)] + \gamma A_1 l^2 + 0,5(\gamma - 1)l^2(B_2 - A_1 - l^{-1}b_4) +$$
$$b_3x + A_1(x^2 - \gamma y^2) + (B_1 - A_1 - l^{-1}b_3)xy - 0,5(\gamma - 1)(B_2 - A_1 - l^{-1}b_4)y^2,$$

$$v = (y-l)[3\gamma^{-1}A_1 l + 1,5\gamma^{-1}(\gamma - 1)l(B_1 - A_1 - l^{-1}b_3)] + \gamma^{-1}A_1 l^2 + 0,5\gamma^{-1}(\gamma - 1)l^2(B_1 - A_1 - l^{-1}b_3) +$$
$$b_4x + A_1(x^2 - \gamma^{-1}y^2) + (B_2 - A_1 - l^{-1}b_4)xy - 0,5\gamma^{-1}(\gamma - 1)(B_1 - A_1 - l^{-1}b_3)y^2.$$

Мы получили полиномы с пятью неизвестными коэффициентами A_1, B_1, B_2, b_3, b_4. Один из коэффициентов можно обнулить, а остальные выразить через перемещения узлов u_3, v_3, u_4, v_4. Но вопрос в том, стоит ли это делать? По мнению авторов это лишняя процедура. Дело в том, что экстремум потенциальной энергии можно обеспечить, не выражая искомые коэффициенты через перемещения узлов, так как перемещения узлов представляют собой линейную комбинацию коэффициентов. Итак, при использовании полиномов второй степени теряет смысл представление структуры решения через перемещения узлов.

Функционал энергии представляем в виде

$$E = \int\limits_0^l \int\limits_0^{2l} (\sigma_x\varepsilon_x + \tau_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_y\varepsilon_y)\,dxdy + \int\limits_0^l qv|_{y=2l}\,dx.$$

Искомые коэффициенты находим из условий:

$$\frac{\partial E}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial B_2} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b_3} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b_4} = 0.$$

При этом мы получили решение, в котором кинематические условия выполняются лишь в четырех точках (*1*, *2*, *3*, *5*), а в других точках выполнения кинематических условий можно достигнуть только за счет увеличения числа конечных элементов. Как известно, кинематические условия являются главными для вариационного принципа Лагранжа. Их нужно выполнять заранее в обязательном порядке. Поэтому МКЭ для задач со сложными кинематическими условиями не является достаточно эффективным, так как требуется очень большое число конечных элементов для достижения необходимой точности.

В связи с вышесказанным для задач с кинематическими условиями следует отдать предпочтение аналитическим вариационным методам при точном выполнении всех кинематических условий. Оказывается, что точное выполнение всех кинематических и статических условий могут осуществить полиномы пятой степени:

$$u = xy \sum_{m=0,\ n=0}^{m+n=3} A_{mn}x^m y^n, \quad v = xy \sum_{m=0,\ n=0}^{m+n=3} B_{mn}x^m y^n. \qquad (2)$$

Кинематические условия выполняются за счет множителей xy, а статические — за счет уравнений связей на сторонах $x = l$, $y = 2l$.

Выполнение всех статических условий позволяет построить структуру решения в виде полинома пятой степени лишь с одним неизвестным коэффициентом, для нахождения которого записывается условие экстремума функционала энергии.

Для улучшения решения можно использовать полиномы шестой, седьмой и других высших степеней. Такой подход представляет собой модификацию метода Галеркина и позволяет построить аналитическое решение при точном выполнении всех краевых условий и приближенно осуществить с той или иной степенью точности равновесие внутри. Представляет интерес также построить решение задачи с помощью рядов (2), используя уравнения внутренних связей ($\operatorname{div} T = 0$), т. е. реализовать модифицированный метод Треффтца.

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.
2. Варвак П. М., Бузун И. М., Городецкий А. С. и др. Метод конечных элементов. Киев, 1981.
3. Крушевский А. Е., Кондратюк В. Ф. О линейной зависимости вариационных уравнений при решении краевых задач теории упругости. М., 1999. Деп. в ВИНИТИ 08.07.99, № 2226–В99 // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 4. С. 138.

A. E. KRUSHEVSKI, V. F. KONDRATYUK

ON THE PROBLEM OF EQUILIBRIUM OF THE ELASTIC RECTANGULAR WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Summary

Original solution of one problem of elasticity theory with Galiorkin method is presented.