МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

Л. Д. Матвеева
А. Н. Рудый

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Минск
БНТУ
2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

Л. Д. Матвеева
А. Н. Рудый

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Учебно-методическое пособие
для студентов энергетических специальностей*

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области энергетики и энергетического оборудования*

Минск
БНТУ
2016

УДК 512.85(075.8)
ББК 18.87я7
М 33

Рецензенты:
А. В. Чигарев, Г.М. Заяц

Матвеева, Л. Д.

М 33 Математический анализ: учебно-методическое пособие для студентов энергетических специальностей / Л. Д. Матвеева, А. Н. Рудый. – Минск : БНТУ, 2016. – 129 с.

ISBN 978-985-550-551-9.

Содержатся задания по темам «Комплексные числа», «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и др. Приводятся примеры решения типовых задач.

Содержится список рекомендуемой литературы.

Издание предназначено для студентов 1-го курса энергетического факультета БНТУ, может быть также полезно преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу.

УДК 519.85(075.8)
ББК 18.87я7

ISBN 978-985-550-551-9

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение 1.1. Многочленом (полиномом) степени n с действительными коэффициентами называется любое выражение вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1.1}$$

где $a_i \in R,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ a_0 \neq 0$;

x – переменная.

Корнем многочлена (1.1) называется любое число x_0 такое, что

$$P_n(x_0) = a_0 x_0{}^n + a_1 x_0{}^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_0 + a_n = 0. \tag{1.2}$$

Нетрудно заметить, что некоторые многочлены вообще не имеют действительных корней, например:

$$P_2(x) = x^2 + 1;\ \ x^2 + 1 \neq 0,\ \forall x \in R.$$

Расширим множество действительных чисел. Добавим к этому множеству символ i , такой что $i^2 = -1$ (i называется мнимой единицей). Тогда $\pm i$ – два корня уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Определение 1.2. Множеством комплексных чисел называется множество

$$C = \left\{ a + bi \,\middle|\, a,\quad b \in R,\quad i^2 = -1 \right\}.$$

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется число

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется число

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Для числа $z = a + bi$ число a называется действительной частью, число b – мнимой частью. Обозначения:

$$a = \mathrm{Re}(z),\quad b = \mathrm{Im}(z).$$

Относительно операций «+» и « $\cdot$ » комплексные числа C обладают такими же свойствами, как и действительные числа. Эти операции коммутативны и ассоциативны; для них существуют обратные операции: вычитание и деление (кроме деления на 0).

П р и м е р 1.1

Найти $\dfrac{3+4i}{6+7i}$.

Р е ш е н и е

$$\frac{3+4i}{6+7i}=\frac{(3+4i)(6-7i)}{(6+7i)(6-7i)}=\frac{18+28+i(24-21)}{49+36}=\frac{46+3i}{85}=\frac{46}{85}+\frac{3}{15}i.$$

Теорема 1.1 (основная теорема алгебры). Любое уравнение вида (1.2) имеет решение во множестве C.

П р и м е р 1.2

Решить уравнение $2x^2+x+1=0$.

Р е ш е н и е

$$D=b^2-4ac=1-8=-7=7i^2.$$

$$x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{7i^2}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{4}=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i.$$

Определение 1.3. Для комплексного числа $z=a+bi$ число $\bar{z}=a-bi$ называется комплексно-сопряженным, число $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем z.

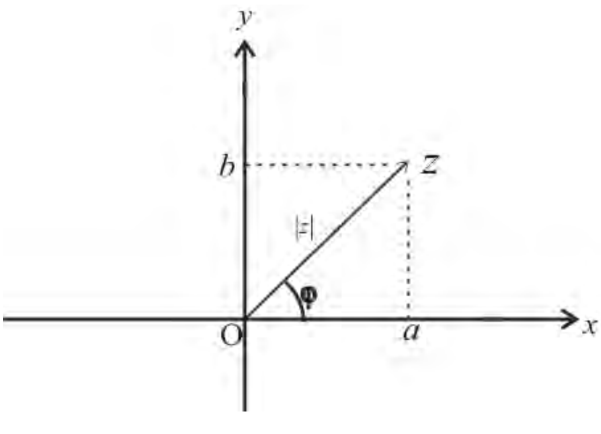


Рис. 1.1

Если рассмотреть плоскость с декартовой системой координат (O, x, y) и на оси Ox отложить a – действительную часть z, а на оси Oy – b – мнимую часть z, то получим взаимно однозначное соответствие между множеством C всех комплексных чисел и множеством точек плоскости.

Такая плоскость называется комплексной плоскостью, рис. 1.1.

При этом $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ – длина радиуса-вектора точки z.

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2.$$

Определение 1.4. Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называется угол φ, который образует радиус-вектор точки z с положительным направлением оси Ox Аргумент будем обозначать $\operatorname{Arg} z$. Аргумент определен с точностью до $2\pi n$. При этом значение $-\pi < \varphi \le \pi$ называется главным и обозначается $\arg z$.

Замечание. $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

При этом

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & z \in \text{I, IV четвертям;} \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & z \in \text{II четверти;} \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & z \in \text{III четверти;} \\ \dfrac{\pi}{2}; & a = 0, \quad b > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}; & a = 0, \quad b < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Если φ – аргумент z, то z представляется в виде

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \; - \tag{1.4}$$

тригонометрическая форма комплексного числа.

Теорема 1.2. Пусть $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\quad z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{1.5}$$

Доказательство

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) =$
$= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, что и требовалось доказать.

Из формул (1.5) следует, в частности, что

$$z_1^{\,n} = r_1^{\,n}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \; – \text{ формула Муавра.} \tag{1.6}$$

П р и м е р 1.3

$z_1 = 1+\sqrt{3}i$; $z_2 = -1+i$; $z_3 = \sqrt{3}-i$. Представить числа z_1, z_2, z_3 в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е

$$z_1 = 1+\sqrt{3}i; \quad |z_1| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2; \quad z_1 \in \text{I четверти},$$

поэтому по формуле (1.3)

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда по формуле (1.4)

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$$z_2 = -1+i; \quad |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad z_2 \in \text{II четверти},$$

поэтому по формуле (1.3)

$$\arg z_2 = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

$$z_3 = \sqrt{3}-i; \quad |z_3| = 2; \quad z_3 \in \text{IV четверти},$$

поэтому по формуле (1.3)

$$\arg z_3 = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Тогда по формуле (1.4)

$$z_3 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Из формул (1.5), (1.6) видно, что аргумент φ комплексного числа z при умножении, делении, возведении в степень ведет себя как показатель степени. Обозначим

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ – формула Эйлера.} \tag{1.7}$$

Тогда из теоремы 1.2 следует, что

1) $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

2) $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

3) $\left(e^{i\varphi_1}\right)^n = e^{in\varphi_1}$.

Учитывая (1.7), формулу (1.4) для z можно переписать в виде $z = |z|e^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа.

П р и м е р 1.4

Вычислить $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^5(-1+i)^7}{(\sqrt{3}-i)^3}$.

Р е ш е н и е

Согласно примеру 1.3

$$1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad -1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}; \quad \sqrt{3}-i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Поэтому

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^5(-1+i)^7}{(\sqrt{3}-i)^3} = \frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^7}{\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^3} = \frac{2^5(\sqrt{2})^7}{2^3}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{21\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= 2^5\sqrt{2}e^{i\frac{89}{12}\pi} = 32\sqrt{2}e^{i\frac{17}{12}\pi}.$$

Определение 1.5. Корнем n-й степени из числа $z \in C$ называется такое число $z_1 \in C$, что $z_1^n = z$, при этом z_1 обозначается $z_1 = \sqrt[n]{z}$. Таким образом

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z. \tag{1.8}$$

Из формулы (1.8) видно что $\exists\, n$ корней n-й степени из числа z, при этом, если $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_0} e^{i\cdot\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}}, \tag{1.9}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

П р и м е р 1.5

Найти $\sqrt[3]{1}$.

Р е ш е н и е

$1 = 1 \cdot e^{i\cdot 0}$, тогда по формуле (1.9)

$$w = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} e^{i\cdot\frac{0+2\pi k}{3}},\ k = 0, 1, 2;$$

$$w_1 = 1 \cdot e^{\frac{0}{3}i}; \quad w_2 = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}; \quad w_3 = 1 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

$$w_1 = 1; \quad w_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$w_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

З а д а н и я

З а д а н и е 1.1

Выполнить следующие действия:

1) $(2+3i)(2-i)$; 2) $(4+5i)(4-5i)$; 3) $(2-i)^2$;

4) $(3+2i)^3$; 5) $\dfrac{3-i}{3+i}$; 6) $\dfrac{6i}{7-i}$; 7) $\dfrac{2+5i}{1-i}$; 8) $\dfrac{(1+i)^2}{3+2i}$.

З а д а н и е 1.2

Решить уравнения.

1) $x^2+16=0$; 2) $x^2+4x+8=0$;

3) $x^2-6x+10=0$; 4) $x^2+x+3=0$.

З а д а н и е 1.3

Найти действительные решения уравнений.

1) $(3-i)x+(1+i)y=10+2i$;

2) $(2+2i)x+(1+2i)y=3+6i$;

3) $(5-3i)x+(2+i)y=1-5i$;

4) $(1+5i)x+(3-i)y=-16i$.

З а д а н и е 1.4

Записать в тригонометрической и показательной форме следующие комплексные числа:

1) $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; 2) $z=1+\sqrt{3}i$; 3) $z=2-2i$;

4) $z=-2$; 5) $z=-4$; 6) $z=3i$;

7) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+i\left(1-\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$; 8) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+i\left(1+\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$;

9) $z=\sin\dfrac{3\pi}{7}+i\cos\dfrac{3\pi}{7}$; 10) $z=\sin\dfrac{3\pi}{7}-i\cos\dfrac{3\pi}{7}$.

З а д а н и е 1.5

Вычислить

1) $\sqrt[6]{-1}$; 2) $\sqrt[3]{-i}$; 3) $\sqrt[3]{2-2i}$; 4) $\sqrt[4]{1+i}$; 5) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$.

З а д а н и е 1.6

Решить уравнения

1) $z^4+4=0$; 2) $z^4+18z^2+81=0$; 3) $(z+1)^4+16=0$;

4) $z^3+8=0$; 5) $z^2+(2i-3)z+5-i=0$;

6) $z^4-(1+i)z^2+2(1+i)=0$.

З а д а н и е 1.7

Изобразить множество точек, удовлетворяющих следующим неравенствам:

1) $|z|<1$; 2) $|z+i|\le 2$; 3) $|z-i|>4$; 4) $|z+\bar{z}|<6$.

З а д а н и е 1.8

Найти $z+2\bar{z}$; $\overline{z-5\bar{z}}$; $2z\cdot\bar{z}$; $\dfrac{z}{\bar{z}}$, если

1) $z=3+5i$: 2) $z=1-i$; 3) $z=2+i$; 4) $z=4-2i$; 5) $z=1+3i$.

З а д а н и е 1.9

Доказать следующие равенства:

1) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$; 2) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$; 3) $\overline{(\bar{z})}=z$; 4) $|\bar{z}|=|z|$;

5) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; 6) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

О т в е т ы

1.1. 1) $7+4i$; 2) 41; 3) $3-4i$; 4) $-9+46i$;
5) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$; 6) $-\frac{3}{25}+\frac{21}{25}i$; 7) $-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$; 8) $\frac{4}{13}+\frac{6}{13}i$.

1.2. 1) $\pm 4i$; 2) $-2\pm 2i$; 3) $3\pm i$; 4) $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i$.

1.3. 1) (2; 4); 2) (0; 3); 3) (1; –2); 4) (–3; 1).

1.4. 1) $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z=2e^{\frac{3\pi i}{4}}$;

2) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z=2e^{\frac{\pi i}{3}}$;

3) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $z=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$;

4) $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$, $z=2e^{\pi i}$;

5) $z=4(\cos\pi+i\sin\pi)$, $z=4e^{\pi i}$;

6) $z=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $z=3e^{\frac{\pi i}{2}}$;

7) $2\sin\frac{\pi}{10}\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)$; $2\sin\frac{\pi}{10}e^{i\frac{\pi}{10}}$;

8) $2\cos\frac{\pi}{10}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$; $2\cos\frac{\pi}{10}e^{i\frac{2\pi}{5}}$;

9) $\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}$; $e^{i\frac{\pi}{14}}$;

10) $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$; $e^{-\frac{3\pi}{7}i}$.

1.5. 1) $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$; 2) i; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$;

3) $\sqrt[6]{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; $\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; $\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$;

4) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right)$;

$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(-\cos\frac{9\pi}{16}-i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$;

5) $\sqrt{3}+i$; $-\sqrt{3}-i$; $-1+\sqrt{3}i$; $1-\sqrt{3}i$.

1.6. 1) $\pm1\pm i$; 2) $z_{1,2}=z_{3,4}=\pm3i$; 3) $(-1\pm\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$; 4) $1\pm i\sqrt{3}$; -2;

5) $1+i$; $2-3i$; 6) $\pm(1+i)$; $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

1.8. 1) $9-5i$; $-12-30i$; 68; $-\frac{8}{17}+\frac{15}{17}i$;

2) $3+i$; $-4+6i$; 4; $-i$;

3) $6-i$; $-8-6i$; 10; $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$;

4) $12+2i$; $-16+12i$; 40; $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$;

5) $3-3i$; $-4-18i$; 20; $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$.

2. ПРЕДЕЛЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Определение 2.1. Пусть X и Y – множества произвольной природы и каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y \in Y$. Такое соответствие называется ***функцией.*** Обозначим его *f*, или $f: X \to Y$, или $x \to y = f(x)$. При этом множество X называется областью определения $D(f)$ функции f , $D(f) = X$, а множество $f(X) \subset Y$, $f(X) = \{y | \exists x \in X,\ f(x) = y\}$ называется *областью значений* $E(f)$ функции *f:* $E(f) = f(X)$, рис. 2.1.

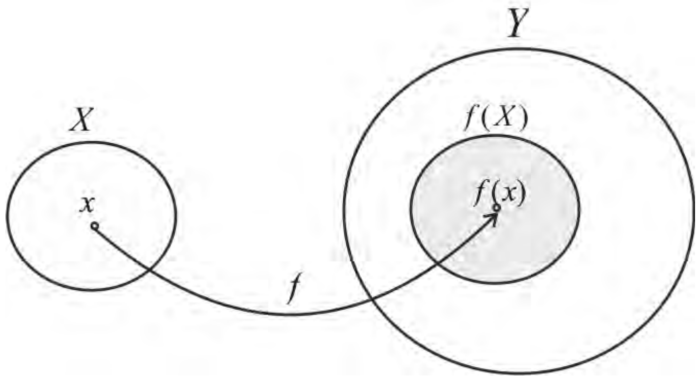


Рис. 2.1

Пример 2.1

$f: R \to R,\ f: x \to x^2$ или $f(x) = x^2$. $D(f) = R, E(f) = R^{\geq 0}$ – множество всех неотрицательных чисел из R.

$g: R \to R,\ g: x \to \frac{1}{x}$ или $g(x) = \frac{1}{x}$.

$D(g) = R \setminus \{0\}$; $E(g) = R \setminus \{0\}$.

Определение 2.2. Числовой последовательностью называется произвольная функция $f: N \to R$. При этом числа $f(1), f(2), ..., f(n)$ из области значений $E(f)$ обозначаются: $a_1 = f(1), a_2 = f(2), ..., a_n = f(n)$. Число a_n называется n-м членом последовательности.

Для задания последовательности достаточно задать a_n.

Пример 2.2

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$. Подставив $n = 1, 2, 3, ...$ получим

$$\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ -\frac{3}{4};\ \ ...;\ (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}\right\}.$$

Определение 2.3. Число a называется пределом числовой последовательности a_n, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, если $\forall\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$, такое что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Более коротко будем записывать это определение в виде

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \qquad (2.1)$$

Последовательности, имеющие предел, называются сходящимися, а не имеющие предела – расходящимися.

П р и м е р 2.3

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$.

Доказательство

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим цепочку эквивалентных неравенств

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Пусть N – натуральное число, большее $\dfrac{2}{\varepsilon} - 1$, например $N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} - 1\right] + 1$, тогда N удовлетворяет соотношению (2.1), что и требовалось доказать.

У п р а ж н е н и е 2.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} = 1$.

Геометрически равенство $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ означает, что $\forall\varepsilon > 0$ все члены последовательности a_n, начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$, попадают в ε – окрестность $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ точки a (рис. 2.2).

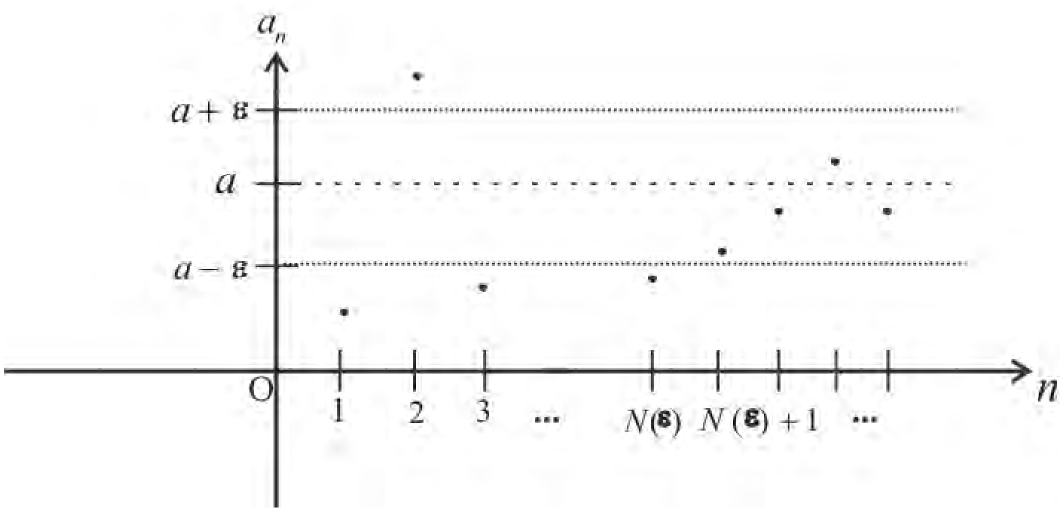


Рис. 2.2

Например, для последовательности $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ из примера 2.3, если $\varepsilon = 0{,}01$, то $N = 200$, если $\varepsilon = 0{,}001$, то $N = 2000$.

Определение 2.4. Последовательность a_n называется ограниченной, если $\exists\, M \in R$, такое что $\forall n \in N \Rightarrow |a_n| \le M$.

Теорема 2.1. (необходимый признак сходимости последовательности).

Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство

Из соотношений (2.1) следует, что все члены сходящейся последовательности после номера N лежат в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, далее доказательство очевидно.

Определение 2.5. Последовательность a_n называется бесконечно большой, если $\forall\, M > 0$, $\exists\, N = N(M): n > N \Rightarrow |a_n| > M$.

Говорят, что бесконечно большая последовательность имеет предел ∞, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Если все члены бесконечно большой последовательности, начиная с некоторого номера, становятся положительными, то есть

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, N = N(M): n > N \Rightarrow a_n > M,$$

то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Если все члены бесконечно большой последовательности, начиная с некоторого номера, становятся отрицательными, то есть

$$\forall\, M < 0,\ \exists\, N = N(M): n > N \Rightarrow a_n < M,$$

то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

П р и м е р 2.4

$$a_n = n^2,\ \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty,\ a_n = (-1)^n n^2,\ \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n^2 = \infty.$$

Бесконечно большие последовательности не являются сходящимися и отличаются по своим свойствам от свойств сходящихся последовательностей.

Определение 2.6. Числовая последовательность называется возрастающей (убывающей), если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ ($a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$).

Возрастающие (убывающие) последовательности называются строго монотонными.

Числовая последовательность называется неубывающей (невозрастающей), если

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots \; (a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots).$$

Неубывающие (невозрастающие) последовательности называются монотонными.

П р и м е р 2.5

1. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. При $n = 1, 2, 3, \ldots, n, n+1$ имеем

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4} < \ldots < \dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n+1}{n+2} < \ldots$ – возрастающая последовательность.

2. Последовательность

$$3 \le 3{,}1 \le 3{,}14 \le 3{,}141 \le 3{,}1415 \le \ldots$$

последовательных приближений к числу π – неубывающая последовательность.

Теорема 2.2. (достаточный признак сходимости последовательности). Монотонная ограниченная последовательность сходится.

П р и м е р 2.6

Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Она монотонно возрастает и ограничена, следовательно – сходится:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281\ldots \qquad (2.2)$$

e – трансцендентное число, служащее основанием натурального логарифма: $\ln a = \log_e a$.

Определение 2.7. Суммой, разностью, произведением, частным последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ будем называть последовательности, n-й член которых равен соответственно:

$$a_n + b_n; \;\; a_n - b_n; \;\; a_n \cdot b_n; \;\; \frac{a_n}{b_n} \; (b_n \ne 0, \forall n \in N).$$

Теорема 2.3. Пусть последовательности a_n и b_n сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$; c – постоянное число. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b;\ \lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot a;\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a\cdot b;\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}(b \neq 0).$$

Доказательство

Докажем, например, формулу $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a\cdot b$. Так как последовательность a_n сходится, то она ограничена, то есть $\exists$ число $M > 0$, такое что $|a_n| < M$. Пусть

$$\varepsilon > 0,\ |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab - a_n b + a_n b| =$$

$$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq M\,|b_n - b| + |b|\cdot|a_n - a|. \qquad (2.3)$$

Так как последовательность b_n сходится, то $\exists\ N_1$, такой что при

$$n > N_1 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Так как последовательность a_n сходится, то $\exists\ N_2$, такой что при $n > N_2 \Rightarrow |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ (считаем, что $b \neq 0$; если $b = 0$, то второго слагаемого в формуле (2.3) нет).

Пусть $N = \max\{N_1,\ N_2\}$. Тогда из (2.3) при $n > N$ следует

$$|a_n b_n - ab| \leq M\,|b_n - b| + |b|\cdot|a_n - a| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\cdot\frac{\varepsilon}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 2.2. Доказать формулу $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ в условиях теоремы 2.3.

Определение 2.8. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тогда последовательность a_n называется бесконечно малой. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ называется неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Вычисление таких пределов называется раскрытием неопределенности. Аналогично определяются неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty - \infty)$, $(0\cdot\infty)$, (1^{∞}).

П р и м е р 2.7

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n+1}{n+3n^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\text{делим почленно на } n^3\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2}+3}=\frac{2}{3}.$$

П р и м е р 2.8

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{\sqrt{n^2+5}\cdot\sqrt[3]{2n^3+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n\cdot\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}\cdot n\cdot\sqrt[3]{2+\dfrac{1}{n^3}}}=$$

$$=\left|\text{делим числитель и знаменатель на } n^2\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}\cdot\sqrt[3]{2+\dfrac{1}{n^3}}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}.$$

П р и м е р 2.9

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{(\sqrt{n^2+3n}+n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}.$$

П р и м е р 2.10

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{3n}=\left(1^{\infty}\right)=\left|\textit{сведем к пределу } (2.2)\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{n+3}{n+1}-1\right)\right)^{3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{2}{n+1}\cdot 3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{6}{1+\frac{1}{n}}}=e^6.$$

Теорема 2.4. а. Пусть последовательность $\{a_n\}$ – бесконечно малая ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) и $a_n \neq 0, \forall n$. Тогда последовательность $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ – бесконечно большая $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = \infty\right)$.

б. Пусть последовательность $\{a_n\}$ – бесконечно большая ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), тогда последовательность $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ – бесконечно малая.

Пример 2.11

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n+1}{\sqrt{n^4+1}} = \left|\text{делим почленно на } n^3\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^6}}} = \infty.$$

Упражнение 2.3. Пусть последовательность $\{a_n\}$ – сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$; последовательность $\{b_n\}$ – бесконечно малая. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

Упражнение 2.4. Пусть $a_n = n^2$, $b_n = (-1)^n n^2$.
Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

Упражнение 2.5. Пусть $a_n = (-1)^n\cdot n$, $b_n = (-1)^{n+1}n$.
Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

Теорема 2.5. (о трех последовательностях).

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ и $a_n \le c_n \le b_n, \forall n$, тогда c_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Упражнение 2.6. Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{3^n}{n!}, n > 3$.
Тогда

$$0 \le \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{n} \le \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}.$$

Используя теорему о трех последовательностях, найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}$.

Упражнение 2.7. Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{n^{\alpha}}{3^n}$, $\alpha > 0$. Тогда

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{3^{n+1}} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}3} \cdot \frac{n^{\alpha}}{3^n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}}{3} \cdot \frac{n^{\alpha}}{3^n} < \frac{n^{\alpha}}{3^n} = a_n$$

при $n > \alpha$, поэтому по теореме 2.2 a_n сходится.

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 3$.
2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Необходимо помнить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0;\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{a^n} = 0\ \ (a > 1,\ \alpha > 0)$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{\alpha}} = 0,\ \alpha > 0.$$

Упражнение 2.8.

а. Пусть a_n, b_n – сходящиеся последовательности, $a_n > 0;\ \ b_n > 0;\ \ \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$.

б. Пусть $a_1, a_2 > 0$ – основания трапеции. Рассмотрим последовательность средних линий:

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1),\quad a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_2),\ \ldots,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$.

Определение 2.9. Последовательность a_n имеет предел при $n \to \infty$, если $\exists a \in R$, $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Легко видеть, что число a в определении 2.9 единственно, поэтому определения 2.3 и 2.9 эквивалентны.

Из определения 2.9 следует, что последовательность a_n – расходящаяся (не имеет предела), если

$$\forall a \in R,\quad \exists \varepsilon > 0\ \ \forall N,\ \exists n > N \Rightarrow |a_n - a| \geq \varepsilon. \qquad (2.4)$$

Упражнение 2.9. Рассмотрим последовательность $a_n = n$; a_n – бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Используя (2.4) доказать, что a_n – расходящаяся.

Задания

Задание 2.1

Доказать, что заданные последовательности являются бесконечно малыми.

1) $x_n = n^k (k < 0)$; 2) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$;

3) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; 4) $x_n = \dfrac{n}{2n^3 + 1}$.

Задание 2.2

Доказать, что заданные последовательности – бесконечно большие.

1) $x_n = n^k (k > 0)$; 2) $x_n = n \cdot (-1)^n$;

3) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$; 4) $x_n = \log_2(\log_2 n),\ n \geq 2$.

Задание 2.3

Доказать, что последовательность $\left\{n + (-1)^n n\right\}$ неограниченная, однако не является бесконечно большой.

Задание 2.4

Найти наименьший член последовательности $\left\{x_n\right\}$, если:

1) $x_n = n^2 - 9n - 100$; 2) $x_n = n + \dfrac{100}{n}$;

3) $x_n = n^2 - 5n + 1$; 4) $x_n = n + \dfrac{1}{n}$;

5) $x_n = \dfrac{1}{2^{-n} + 1}$; 6) $x_n = n^2 - 4n$.

Задание 2.5

Найти наибольший член последовательности.

1) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$; 2) $x_n = \dfrac{2n^3 + 3}{n^3 + 1}$;

3) $x_n = -n^2 + 6n - 8$; 4) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

З а д а н и е 2.6

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n + 1}{\sqrt{n^2+2}}$; 2) $x_n = \sin n$;

3) $x_n = \left[1 - (-1)^n\right]$; 4) $x_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2}$.

З а д а н и е 2.7

Найти формулу общего члена последовательности x_n.

1) $x_1 = a,\ x_n = x_{n-1} + d$; 2) $x_1 = b,\ x_{n+1} = x_n \cdot q\ (q = \text{const},\ q \neq 0)$.

З а д а н и е 2.8

Доказать, что последовательность не является ограниченной.

1) $x_n = n^{(-1)^n}$; 2) $x_n = (-1)^n \cdot n$; 3) $x_n = n \cdot \log_{1/2} n$; 4) $x_n = \operatorname{tg} n$.

З а д а н и е 2.9

Доказать, что последовательность монотонна.

1) $x_n = 3^n - 2^n$; 2) $x_n = \sqrt{n^2-1}$; 3) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$.

З а д а н и е 2.10

Пользуясь определением, доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+3}{2n-1} = \dfrac{5}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{n} = 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4}{5n^2-2} = \dfrac{1}{5}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty\ (a > 1)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^3 - n) = \infty$.

З а д а н и е 2.11

Используя основные теоремы о пределах, вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(2n-1)!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{7n+3}\right)^n$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n}{2n-3}\right)^n$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n^2+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n^2}{n^3+8}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}}{n!}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{3^{n^2}}$.

З а д а н и е 2.12

Упражнение 2.12. Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+7+10+...+(3n+1)}{1+6+11+...+(5n-4)}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{n\sqrt{n^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a(n+1)!}{\log_a n!}(a>1)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)!+n!}{(n+k)!-n!}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(5^n+1)}{\ln(4^n+1)}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n+1}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+2n}{\sqrt{2n^2+1}+4}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n}{5n+\sqrt{9n^2+4n}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+n^4}+2\sqrt[3]{1+n^6}}{(n+\sqrt{1+n^2})^2}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{n^2-5n+7}}{n^2-6n+8}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\ln\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\ln(n+2\sqrt{n}+2)-\ln n\right)$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\cdot\mathrm{tg}\,2^{-n}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)$, $x>0$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+19n}-n)$; 16) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4-3n+1}-n^2)$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2+4+6+...+2n}-\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)})$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(5n+\sqrt{n^2+3n+9})-\ln(n+\sqrt{4n^2-7n+1}))$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+4n+9}{n^2+3n+5}\right)^{6n}$; 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-2n^2+3n+4}{n^3+1}\right)^{n}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$; 22) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{3}{\ln n}}$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+2(n+2)!}$; 24) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+n\cdot(n+2)!}{n^2\cdot(n+1)!-(n+2)!}$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^{n}$; 26) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n-1}\right)^{n}$; 27) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^{n^2}$;

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n-1}\right)^{n^2}$; 29) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-7}}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}$;

30) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^3+1}-\sqrt{n^3-7}}{\sqrt{2n+5}-\sqrt{n+3}}$; 31) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4}-n}{\sqrt{n^2+1}-n}$;

32) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-5)^3}{\sqrt[3]{5-n^3}.\sqrt{n^4+1}}$.

Ответы

2.4. 1) $x_4=x_5=-120$; 2) $x_{10}=20$; 3) $x_2=x_3=-5$; 4) $x_1=2$; 5) $x_1=\dfrac{2}{3}$; 6) $x_2=-4$.

2.5. 1) $x_1=x_2=2$; 2) $x_1=\dfrac{5}{2}$; 3) $x_3=1$; 4) $x_3=\dfrac{8}{9}$.

2.7. 1) $x_n=a+(n-1)d$; 2) $x_n=bq^{n-1}$.

2.11. 1) 0; 2) 0; 3) ∞; 4) 0; 5) 0; 6) 0; 7) 0.

2.12. 1) $\dfrac{3}{5}$; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) $\dfrac{\ln 5}{\ln 4}$; 6) 0; 7) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; 8) $\dfrac{7}{8}$; 9) $\dfrac{3}{4}$; 10) 0; 11) $\dfrac{1}{2}$; 12) 2; 13) 1; 14) $\ln x$; 15) $\dfrac{19}{2}$; 16) 0; 17) $\dfrac{1}{2}$; 18) $\ln 2$; 19) e^6; 20) e^{-2}; 21) $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$; 22) 3; 23) $\dfrac{1}{2}$; 24) 2; 25) $e^{-1/3}$; 26) $e^{1/3}$; 27) 0; 28) ∞; 29) 0; 30) ∞; 31) 4; 32) –8.

3. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

Определение 3.1. δ-окрестностью точки $x_0 \in R$ называется множество $O_\delta(x_0) = \{x \,|\, |x - x_0| < \delta\}$, рис. 3.1.

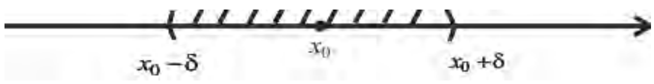


Рис. 3.1

Выколотой δ-окрестностью точки $x_0 \in R$ называется множество $\overset{\bullet}{O}_\delta(x_0) = \{x \,|\, 0 < |x - x_0| < \delta\}$, рис 3.2.

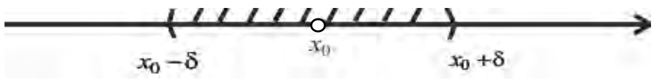


Рис. 3.2

Левой выколотой δ-окрестностью точки $x_0 \in R$ называется множество $\overset{\bullet}{O}_\delta(x_0 - 0) = \{x \,|\, 0 < x_0 - x < \delta\}$, рис. 3.3.

Рис. 3.3

Правой выколотой δ-окрестностью точки $x_0 \in R$ называется множество $\overset{\bullet}{O}_\delta(x_0 + 0) = \{x \,|\, 0 < x - x_0 < \delta\}$, рис. 3.4.

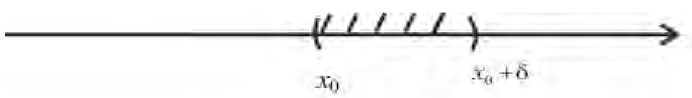


Рис. 3.4

Окрестности точек необходимы для того, чтобы строго определить понятие близости точек и понятие предела функции.

Определение 3.2. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (пишут $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), если

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,. \qquad (3.1)$$

С учетом определения 3.1 вместо (3.1) можно записать

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \overset{\bullet}{O}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,. \qquad (3.2)$$

П р и м е р 3.1

Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} 1 - x^2,\ x \neq 0; \\ 2,\ x = 0,\ \text{рис. } 3.5. \end{cases}$

Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} y = 1$.

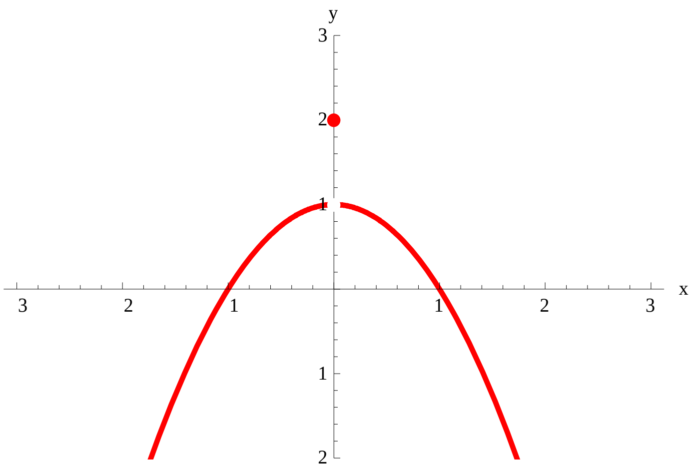


Рис. 3.5. Функция $y = \begin{cases} 1 - x^2,\ x \neq 0; \\ 2,\ x = 0 \end{cases}$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $x \neq 0$, тогда $|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |1 - x^2 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$, поэтому при $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ соотношение (3.2) будет выполняться.

У п р а ж н е н и е 3.1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$.

Определение 3.2 подразумевает, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (или в выколотой окрестности точки x_0) и называется определением предела функции по Коши.

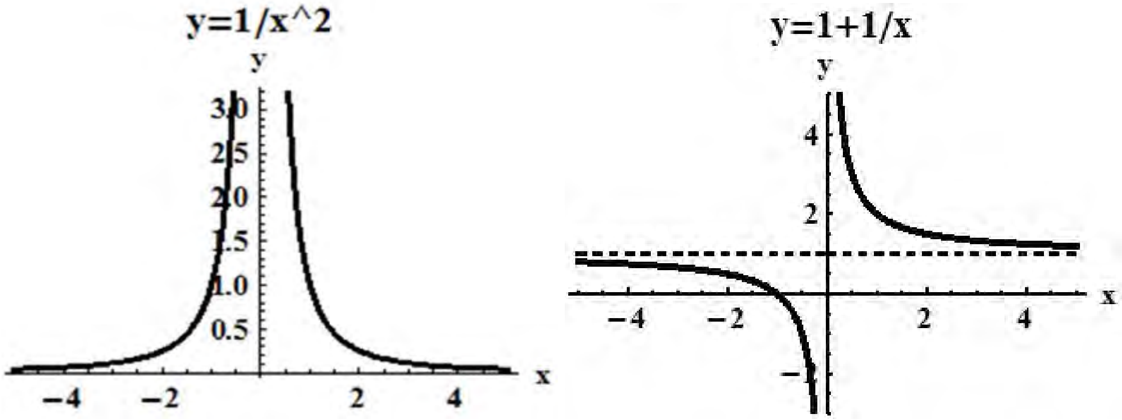
Определение 3.3 (предел функции по Гейне).

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ ($x \to \infty$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$), если $\forall$ последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq x_0; \forall n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

При этом пишут $A = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty;+\infty;-\infty)}} f(x_n)$.

П р и м е р 3.2

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + 1 = 1$, рис. 3.6.



а *б*

Рис. 3.6. Функции: *а* – $y = \dfrac{1}{x^2}$; *б* – $y = \dfrac{1}{x} + 1$; $-5 \le x \le 5$

По Коши $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ записывается в виде

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0: |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

У п р а ж н е н и е 3.2. Записать по Коши определения

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Теорема 3.1. Определения 3.2 и 3.3 эквивалентны.

Определение 3.4. Число A называется левым пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (пишут $A = \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x)$), если

$$\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in \overset{\cdot}{O}_{\delta}(x_0-0)\Rightarrow \left| f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

Число A называется правым пределом функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ ($A=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$), если

$$\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in \overset{\cdot}{O}_{\delta}(x_0+0)\Rightarrow \left| f(x)-A\right|<\varepsilon .$$

П р и м е р 3.3

Рассмотрим функцию сигнум (signum – знак):

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}=\begin{cases}1, & x>0;\\ -1, & x<0;\\ 0, & x=0, \text{ рис. } 3.7.\end{cases}$$

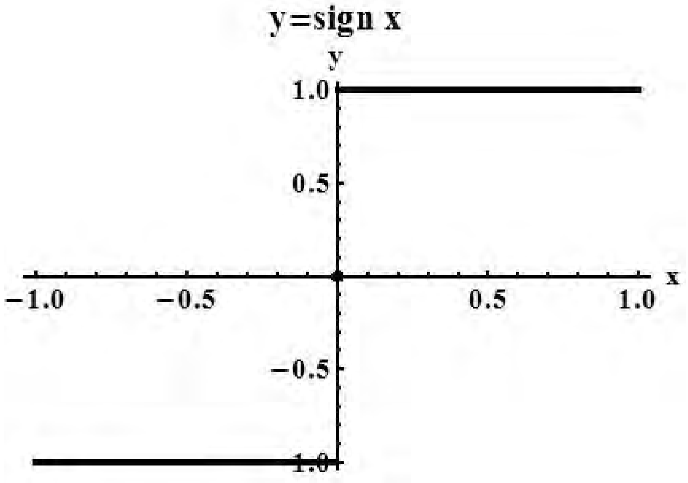


Рис. 3.7. Функция $y=\operatorname{sign} x,\quad -1\le x\le 1$

Тогда $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{sign} x=1,\ \lim\limits_{x\to-0} \operatorname{sign} x=-1.$

У п р а ж н е н и е 3. Записать по Гейне определение

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=A.$$

Теорема 3.2. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности $O_{\delta}(x_0)$ точки x_0 или в выколотой окрестности $\overset{\bullet}{O}_{\delta}(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0),\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$.

Пусть $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Доказательство

Пусть $\varepsilon>0$, тогда по определению 3.4 $\exists\, \delta_1$ и δ_2 такие, что

$$\forall x\in \dot{O}_{\delta_1}(x_0-0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon,\ \forall x\in \dot{O}_{\delta_2}(x_0+0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Поэтому, если $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, то $\forall x\in \dot{O}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B;\ \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B;$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

Доказательство

Следует из теоремы 2.3. Докажем, например, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$. Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, такая что $\forall n\ \ x_n\neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. Тогда по определению 3.3

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} g(x_n)=B,$$

далее по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\cdot g(x_n)=A\cdot B \Rightarrow$ с учетом определения 3.3 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.4. Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$ определены в некоторой выколотой окрестности $\dot{O}_{\delta}(x_0)$ точки x_0 и $f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$, $\forall x\in \dot{O}_{\delta}(x_0)$.

Предположим, что

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=\lim_{x\to x_0} f_2(x)=A.$$

Тогда

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) \ \text{ и } \ \lim_{x\to x_0} g(x)=A.$$

Доказательство легко получается, если использовать определение предела по Гейне и теорему 2.5 о трех последовательностях (доказать самостоятельно).

Упражнение 3.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, рис. 3.8.

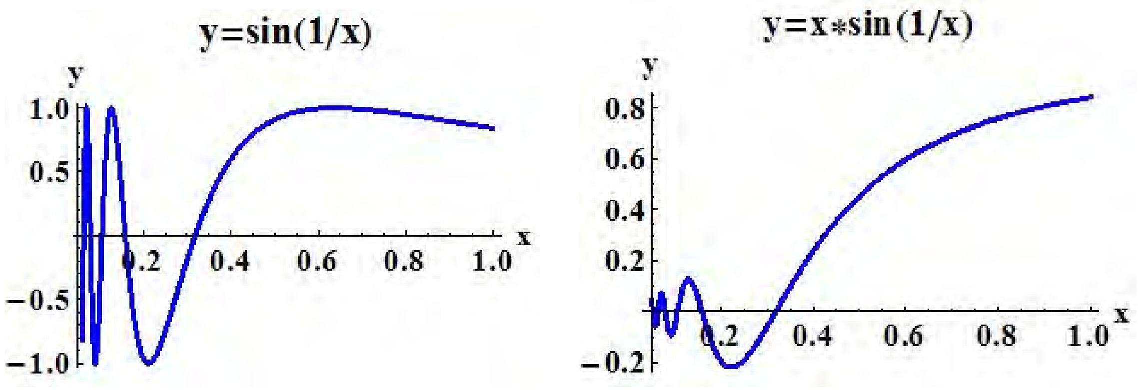


Рис. 3.8. Графики функции $y=\sin(1/x)$, $y=x\sin(1/x)$; $0{,}05\le x\le 1$

Определение 3.5. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой в точке x_0, если $\forall\, |\, M>0, \exists\, \delta=\delta(M)>0$ такое, что

$$\forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M\,.$$

При этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Аналогично определяются бесконечно-большие функции при $x\to x_0+0$, $x\to x_0-0$ (справа и слева в точке x_0).

Упражнение 3.5. Дать определение по Коши для

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty\,,$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty\,.$$

Упражнение 3.6. Дать определение по Гейне для бесконечно больших функций из упражнения 3.5.

Пример 3.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,\ \lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\,.$$

Упражнение 3.7. Рассмотрим функцию $y=(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}\cdot\frac{1}{x}$ (рис. 3.9), где $[x]$ означает целую часть числа x. Найти $\lim\limits_{x\to+0}(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}\cdot\frac{1}{x}$.

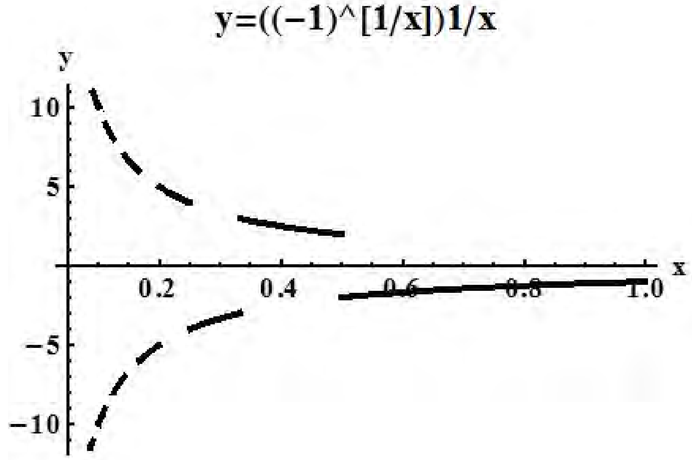


Рис. 3.9. Функция $y=(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}\cdot\frac{1}{x};\ 0,05\le x\le 1$

Упражнение 3.8. Рассмотрим функцию $y=(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$ (рис. 3.10). Найти $\lim\limits_{x\to+0}(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$.

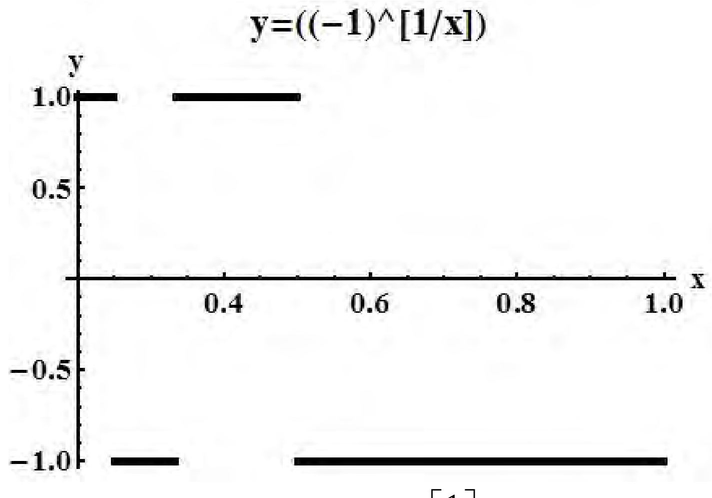


Рис. 3.10. Функция $y=(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]};\ 0,2\le x\le 1$

Бесконечно большая в точке x_0 функция не имеет предела в точке x_0 .

Определение 3.6. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0 , если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечномалые функции в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ называется неопределенностью типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Нахождение таких пределов называется раскрытием неопределенности.

Аналогично раскрываются неопределенности типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty - \infty)$, (1^{∞}).

П р и м е р 3.5

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3+1}{3x^3-x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\text{разделим почленно на } x^3\right| = \lim_{x \to \infty} \frac{2+\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}} = \frac{2}{3}.$$

П р и м е р 3.6

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x+2}{|x| \cdot \sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}.$$

Пусть $x \to +\infty$, тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+2}{x \cdot \sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}} = 3.$

Пусть $x \to -\infty$, тогда $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+2}{-x \cdot \sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}} = -\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}} = -3.$

П р и м е р 3.7

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3+1}{3x^4+x^2+1} = \left|\text{разделим почленно на } x^4\right| = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^4}}{3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},\ a_0\neq 0,\ b_0\neq 0\,.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)=\begin{cases}0,\ n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0},\ n=m\\ \infty,\ n>m\end{cases}.$

П р и м е р 3.8

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^3+x+2}}=\left|\text{разделим почленно на } x^2\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}}=+\infty\,.$$

П р и м е р 3.9

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x^2+1})=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+4}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+4}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}=\begin{cases}\dfrac{5}{2},\ x\to+\infty;\\ -\dfrac{5}{2},\ x\to-\infty.\end{cases}$$

П р и м е р 3.10

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\left|\text{сократим на } x-1\text{, так как } x\neq1\text{; см. определение 3.2}\right|=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x+1}=-1\,.$$

П р и м е р 3.11

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

У п р а ж н е н и е 3.9. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Найти $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

У п р а ж н е н и е 3.10. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ A\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Найти $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Определение 3.7. Функция $y=f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$, если $\exists\, A\in R$ такое что $\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое что

$$\forall x,\ 0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

Легко видеть, что A в определении 3.7 единственно, поэтому определения 3.2 и 3.7 эквивалентны.

Из определения 3.7 следует, что функция $y=f(x)$ не имеет предела при $x\to x_0$, если

$$\forall\, A\in R,\ \exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x,$$

удовлетворяющий условию $0<\left|x-x_0\right|<\delta$, для которого выполнено условие $\left|f(x)-A\right|\geq\varepsilon$.

У п р а ж н е н и е 3.11. Сформулировать отрицание определения предела по Гейне (см. определение 3.3).

У п р а ж н е н и е 3.12. Рассмотрим функцию $y=\dfrac{1}{x}$ бесконечно большую в точке $x_0=0$.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ не существует.

Также определить, имеет ли функция предел при $x\to x_0$, можно используя критерий Коши.

Теорема 3.5. (критерий Коши). Для того чтобы $y = f(x)$ имела предел при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$$

такое что

$$\forall x_1, x_2,\ x_1 \in \overset{\bullet}{O}_\delta(x_0),\ \ x_2 \in \overset{\bullet}{O}_\delta(x_0) \Rightarrow \left| f(x_1) - f(x_2) \right| < \varepsilon.$$

Из теоремы следует, что функция $y = f(x)$ не имеет предела при $x \to x_0$, если

$$\exists \varepsilon > 0, \forall\ \delta > 0,$$

$$\exists x_1,\ x_2,\ x_1 \in \overset{\bullet}{O}_\delta(x_0),\ x_2 \in \overset{\bullet}{O}_\delta(x_0) \Rightarrow \left| f(x_1) - f(x_2) \right| \geq \varepsilon. \qquad (3.3)$$

Упражнение 3.13. Используя (3.1), доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ не существует.

Задания

Задание 3.1

Пользуясь определением предела функции, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + 2x + 3) = 3$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 + x + 1) = 13$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x+1}{x} = 3$;

4) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x+7}{9x+2} = \frac{1}{2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x+7} = 2$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} 3^x = 1$;

7) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3}$; 8) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x}{x+1} = \infty$; 9) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2 - 4x) = +\infty$;

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x+1}{x} = 4$.

Задание 3.2

Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{x}{[x]} = 2$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{x}{[x]} = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} = 0$; 4) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{2x+4} = \infty$.

З а д а н и е 3.3

Используя основные теоремы о пределах, вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+2)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(2^x-\dfrac{x^2+1}{3x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{3\arcsin x+\pi x}{\lg 2x+3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -3}(x^2-5x+6+3^{-x})$;

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x+3\cos x-4}{\operatorname{ctg} x-\cos 2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{4x}+4\ln(x+e)}{x^2-2\cos x}$.

З а д а н и е 3.4

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+1}{4x^3+6x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+\sqrt{x^2+1}+2x+1}{\sqrt[3]{8x^9+9x^2+5}+3x^3+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+2x}{4x+9}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+3)^{12}-(5x^{12}+1)^2}{(2x^4-x^2-1)^6}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^4}+2\sqrt[3]{1+x^6}}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+1}{3^x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^{40}(5x+10)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$; 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$; 11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; 14) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{3x^2+14x+15}$;

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x^2}$;

17) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$; 18) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 19) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; 21) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$; 22) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3x^2+x+2}$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^5}{2x^5+7}$; 24) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3x^4+x^2+1}$; 25) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+5}\cdot\sqrt[3]{3x^3+7}}$;

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)$; 27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2-4x^2}{(1+x)^3-x^3}$;

28) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+1}\right)$; 29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2+1}-\dfrac{x^2+1}{3x+2}\right)$;

30) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{3(x-2)}-\dfrac{1}{x^2-x-2}\right)$; 31) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{2x^2-x-1}\right)$;

32) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{x+1}+2^x}{3^x-2^{x+1}}$; 33) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^{x+1}+2^x}{3^x-2^{x+1}}$.

З а д а н и е 3.5

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$.

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=-\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$ (при $b\neq0$);

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$; 4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\infty$ (при $b\neq0$).

Ответы

3.3. 1) 2; 2) 1; 3) $\dfrac{2\pi}{3}$; 4) 57; 5) –2; 6) –3.

3.4. 1) $\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{2}{5}$; 3) $\dfrac{3}{4}$; 4) $-\dfrac{3}{8}$; 5) $\dfrac{3}{4}$; 6) $\dfrac{\pi}{4}$; 7) 0; 8) $\dfrac{5^{10}}{3^{25}}$; 9) 1; 10) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 11) $\dfrac{4}{5}$; 12) 1; 13) $-\dfrac{1}{2}$; 14) 1; 15) $\dfrac{1}{2}$; 16) $-\dfrac{1}{2}$; 17) $\dfrac{9}{8}$; 18) $\dfrac{4}{3}$; 19) –2; 20) $\dfrac{1}{4}$; 21) 1; 22) ∞; 23) $-\dfrac{1}{2}$; 24) 0; 25) $\pm\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$; 26) 0; 27) 0; 28) $\dfrac{3}{2}$; 29) $\dfrac{2}{9}$; 30) $\dfrac{1}{9}$; 31) $\dfrac{2}{3}$; 32) 3; 33) $-\dfrac{1}{2}$.

4. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Теорема 4.1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ – первый замечательный предел.} \qquad (4.1)$$

Доказательство

Докажем, что $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Пусть $x > 0$. Рассмотрим круг единичного радиуса и центральный угол в x радиан, рис. 4.1.

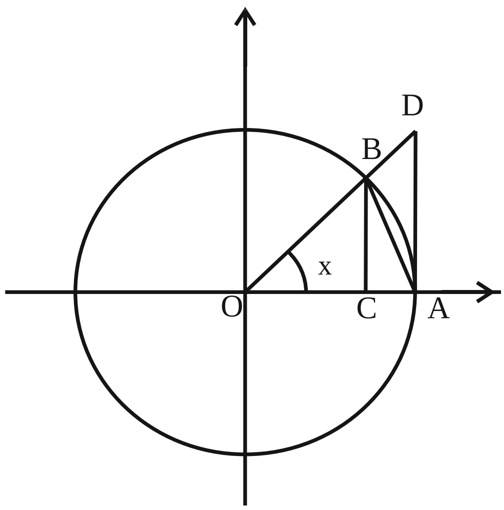


Рис. 4.1

Тогда

$$\sin x = BC < BA < \cup BA < AD = \operatorname{tg} x .$$

Так как радиус круга равен 1, то

$$\cup BA = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot x = x ,$$

поэтому

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} ,$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x \to +0} \cos x \le \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x \to +0} 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+0}\cos x = 1$, то по теореме $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Аналогично

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (по теореме 3.2).}$$

Пример 4.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 8x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}\cdot\cos 8x = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7x}{8x}\cdot\frac{8x}{\sin 8x}\cdot\cos 8x =$$

$$= \frac{7}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{8x}{\sin 8x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 8x = \frac{7}{8}.$$

Из (4.1) следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

При этом если $g(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(g(x))}{g(x)} = 1.$$

Пример 4.2

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 8x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(7(x-\pi)+7\pi)}{\operatorname{tg}(8(x-\pi)+8\pi)} = \left|\text{по формулам приведения}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\pi} -\frac{\sin 7(x-\pi)}{\operatorname{tg} 8(x-\pi)} = -\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7(x-\pi)}{7(x-\pi)}\cdot\frac{7(x-\pi)}{8(x-\pi)}\cdot\frac{8(x-\pi)}{\operatorname{tg} 8(x-\pi)} = -\frac{7}{8}.$$

Пример 4.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\text{по формуле } 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

П р и м е р 4.4

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x-\pi} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left| \text{по формуле } \sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \right| =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Теорема 4.2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ – второй замечательный предел.} \qquad (4.2)$$

Формула (4.2) аналогична формуле (2.2). Верны также формулы

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad (4.3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad (4.4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a. \qquad (4.5)$$

Формулы (4.4) и (4.5) следуют из (4.3).
Докажем, например, (4.4):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left|\text{по формуле (4.3)}\right| = \ln e = 1.$$

П р и м е р 4.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-3}\right)^{x^2}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x^2+4}{x^2-3}-1\right)\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x^2-3}\right)^{x^2}=$$

$$=\left|\frac{7}{x^2-3}\text{ – бесконечно малая функция при } x\to\infty\Rightarrow\text{по формуле (4.2)}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{7}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2-3}{7}}\right)^{\frac{7}{x^2-3}\cdot x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{7}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2-3}{7}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2}{x^2-3}}=e^7.$$

П р и м е р 4.6

$$\lim_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to0}\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\left|(\cos x-1)\text{ – бесконечно малая функция при } x\to0\Rightarrow\text{по формуле (4.2)}\right|=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}},$$

так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ (смотри пример 4.3).

П р и м е р 4.7

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{5x}-1\right)-\left(e^{2x}-1\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot5-\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2\right)=\left|\text{по формуле (4.5)}\right|=5-2=3.$$

П р и м е р 4.8

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{2x^2-3}\right)^{x^2}=\left(\frac{1+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0.$$

Определение 4.1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to x_0$. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, тогда $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $g(x)$ при $x \to x_0$. При этом пишут $f(x) = o(g(x))$, (о – «о – малое»).

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c;\ c \neq 0,\ c \neq \infty$, тогда $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые одного порядка малости при $x \to x_0$. А если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $f(x)$ и $g(x)$ – эквивалентные бесконечно малые при $x \to x_0$. При этом пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

П р и м е р 4.9

$f(x) = x^2,\ g(x) = x,\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \Rightarrow$

$x^2 = o(x)$ при $x \to 0$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Аналогично $\operatorname{tg} x \sim x,\ \operatorname{arctg} x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \ln(1+x) \sim x,\ \sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{2}x$,

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$. Все эквивалентности при $x \to 0$.

Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$. Поэтому, согласно примеру 4.9:

$$\sin x = x + o(x),\ \operatorname{tg} x = x + o(x),\ \ldots,\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).$$

Все равенства при $x \to 0$.

Упражнение 4.1. Используя формулу (4.5) доказать, что $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ при $x \to 0$.

Упражнение 4.2. Рассмотрим функции (рис. 4.2, 4.3):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ – гиперболический синус;}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ – гиперболический косинус;}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ – гиперболический тангенс;}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ – гиперболический котангенс.}$$

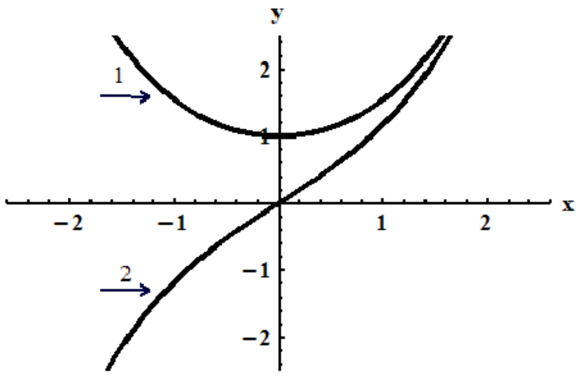


Рис. 4.2. Графики: *1* – *y* = ch(*x*); *2* – *y* = sh(*x*)

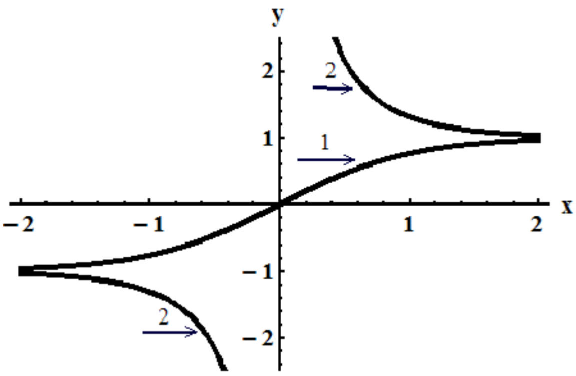


Рис. 4.3. Графики: *1* – *y* = th(*x*); *2* – *y* = cth(*x*)

Проверить свойства гиперболических функций:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

2) $\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1$;

3) $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$;

4) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

Если закрепить концы однородной нерастяжимой нити, то форма, которую она принимает под действием силы тяжести:

$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ – цепная линия.

Упражнение 4.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th} x}{x}=1$ и верны разложения:

$\operatorname{sh} x = x + o(x)$ при $x \to 0$,

$\operatorname{th} x = x + o(x)$ при $x \to 0$.

Теорема 4.3. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, $h(x)$ – произвольная функция и пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{h(x)}$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ и эти пределы равны.

Действительно, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{h(x)}$.

Пример 4.10

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x^3)}{\sin^2(2x)\cdot\ln(1+5x)}$.

Решение

$\arcsin(3x^3) \sim 3x^3$ при $x \to 0$,

$\sin^2(2x) \sim (2x)^2$ при $x \to 0$,

$\ln(1+5x) \sim 5x$ при $x \to 0$.

Тогда, согласно теореме 3.3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x^3)}{\sin^2(2x)\cdot\ln(1+5x)}=\frac{3x^3}{(2x)^2\cdot 5x}=\frac{3}{20}.$$

Задания

Задание 4.1

Раскрыть неопределенность $\dfrac{0}{0}$:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{7x\cdot\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{x^2\sin^2 x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2x-2)}{3x^2-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 6x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$; 9) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sin(2x-6)}{\sqrt{x+6}-3}$;

10) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{5x}-e^{-5x}}{8x}$; 11) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+2x)}{4x}$; 12) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\operatorname{arctg}(2-x)}{4x-8}$;

13) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\sin6x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin3x}$; 15) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3^x-1}{5^x-1}$; 16) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{5^x-3^x}{7^x-4^x}$;

17) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2^x-3^x}{x}$; 18) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\cos2x}{x^2}$; 19) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3^{2x}-3^{8x}}{\operatorname{tg}2x+x}$;

20) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{\sin3x-\sin7x}$; 21) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos2x}{1-\cos7x}$; 22) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin6x}{\operatorname{tg}7x}$;

23) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\arcsin(x^2+2x)}{\cos\frac{\pi x}{4}}$.

Задание 4.2

Раскрыть неопределенности $0\cdot\infty$ $(\infty\cdot0)$, $\infty-\infty$:

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x}-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to0} x^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{tg}x)\cdot\operatorname{tg}2x$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\operatorname{ctg}2x$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x\cdot\operatorname{tg}2^{-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+9x}-x)$; 9) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-x}+x)$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+5x^2}-\sqrt[3]{x^3+8x}\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}\right)$;

12) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}-\dfrac{2}{x^2}\right)$; 13) $\lim\limits_{x\to0} (\operatorname{cosec}^2 x-4\operatorname{cosec}^2 2x)$;

14) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x}-\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\right)$; 15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}x}-\operatorname{tg}2x\right)$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+5}-x\right)$; 17) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}-\dfrac{3}{x^2}\right)$.

З а д а н и е 4.3

Раскрыть неопределенность 1^{∞}:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)^{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{1+3x}\right)^{4x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+15x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)(\ln(x+2)-\ln x)$;

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)(\ln(x+3)-\ln(x-4))$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-8}{4x+5}\right)^{\frac{4}{x}}$;

13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{x^2-\pi^2/4}}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln(1-x^2)}}$.

Ответы

4.1. 1) $\dfrac{6}{7}$; 2) ∞; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) $\dfrac{1}{6}$; 5) 1; 6) $\sqrt{2}$; 7) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 8) 0;

9) 12; 10) $\dfrac{5}{4}$; 11) $\dfrac{1}{2}$; 12) $-\dfrac{1}{4}$; 13) $\dfrac{1}{2}$; 14) $\dfrac{1}{6}$; 15) $\dfrac{\ln 3}{\ln 5}$; 16) $\dfrac{\ln\frac{5}{3}}{\ln\frac{7}{4}}$;

17) $\ln\dfrac{2}{3}$; 18) -2; 19) $-\ln 9$; 20) $-\dfrac{1}{2}$; 21) $\dfrac{4}{49}$; 22) $\dfrac{6}{7}$; 23) $\dfrac{4}{\pi}$.

4.2. 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) -2; 4) 1; 5) $\ln 2$; 6) $\dfrac{1}{2}$; 7) 1; 8) $\dfrac{9}{2}$;

9) $\dfrac{1}{2}$; 10) $\dfrac{5}{3}$; 11) -1; 12) $\dfrac{1}{2}$; 13) -1; 14) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 15) $\dfrac{1}{2}$; 16) 0; 17) 1.

4.3. 1) $\dfrac{1}{e^{14}}$; 2) 1; 3) $\dfrac{1}{e^2}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^4}}$; 5) $\dfrac{1}{e^2}$; 6) $\dfrac{1}{e^4}$; 7) 4; 8) 21;

9) e^3; 10) e^{12}; 11) $e^{\frac{15}{2}}$; 12) $\dfrac{1}{e^{\frac{16}{13}}}$; 13) $e^{-1/\pi}$; 14) e^{-1}.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Определение 5.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0; $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Точка, в которой функция не является непрерывной, называется точкой разрыва.

Пример 5.1

Функция

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} \; -$$

дробно-рациональная функция, непрерывная во всех точках из области определения (кроме точек, где знаменатель равен 0).

Упражнение 5.1. Найти точки разрыва функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ (рис. 5.1).

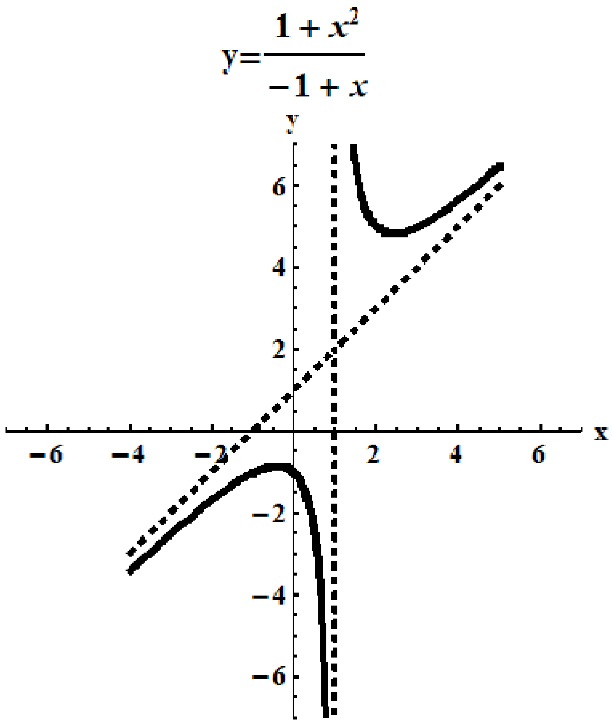


Рис. 5.1. Функция $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

Упражнение 5.2. Найти точки разрыва функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (рис. 5.2).

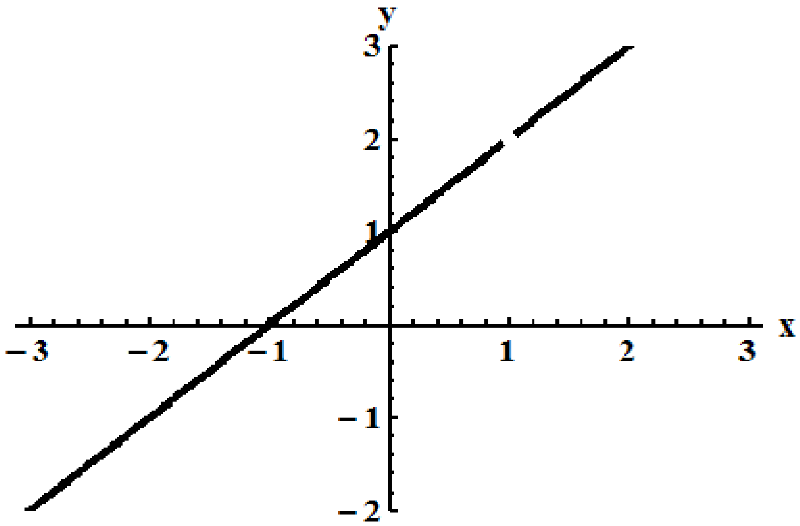


Рис. 5.2. График функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Пример 5.2

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны $\forall\ x \in R$.

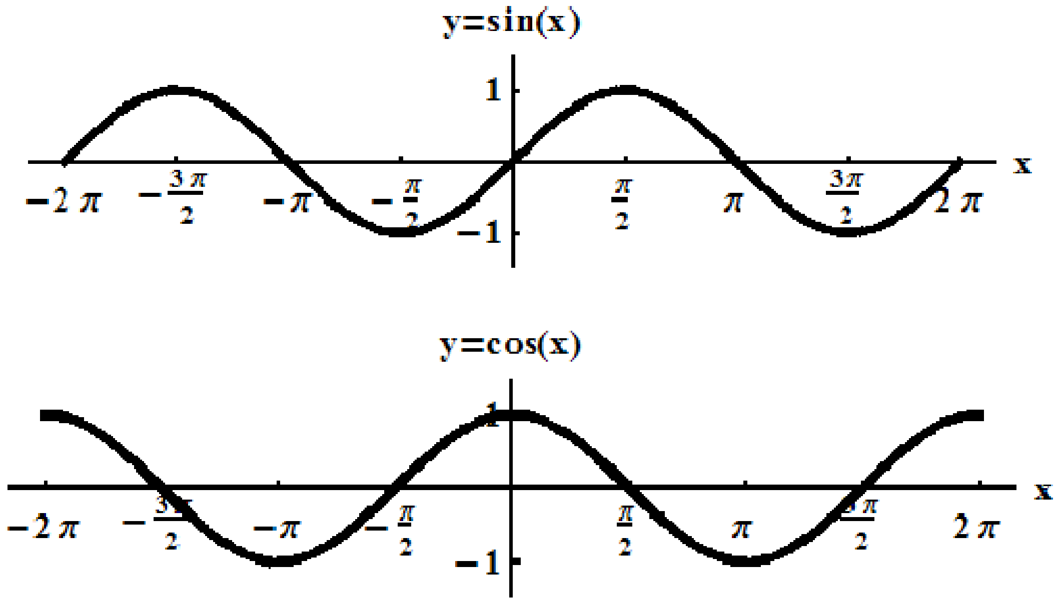


Рис. 5.3. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна $\forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна $\forall\ x \neq \pi n$.

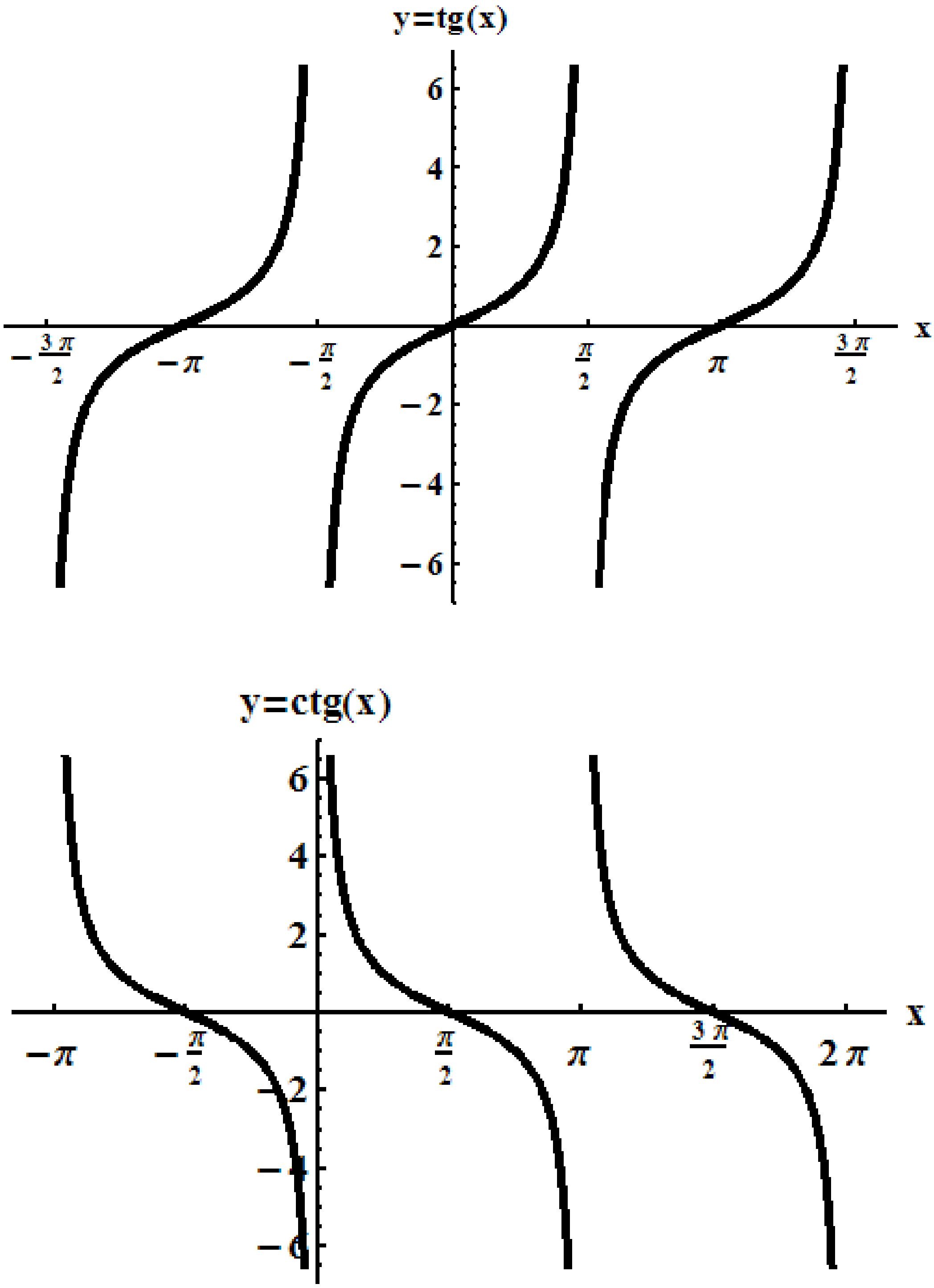


Рис. 5.4. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Функция $y = a^x$ непрерывна $\forall x \in R$,
$y = \log_a x$ непрерывна $\forall x > 0$.

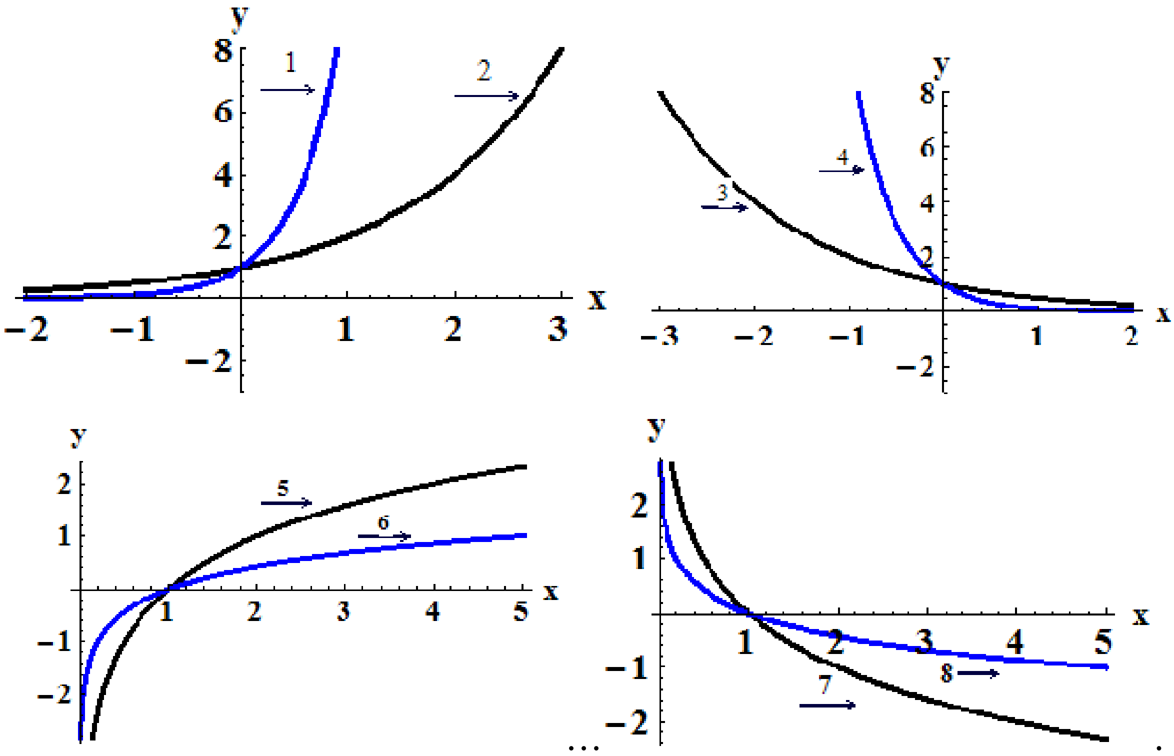


Рис. 5.5. Функции: *1* – $y = 10^x$; *2* – $y = 2^x$; *3* – $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; *4* – $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$;

5 – $y = \log_2 x$; *6* – $y = \log_5 x$; *7* – $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; *8* – $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Функция $y = x^{\alpha}$ – непрерывна $\forall$ x из области ее определения.

П р и м е р 5.3

Рассмотрим функцию Дирихле:

$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Она разрывна $\forall x \in \mathbb{R}$.

Определение 5.2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

П р и м е р 5.4

Единичная функция Хевисайда:

$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

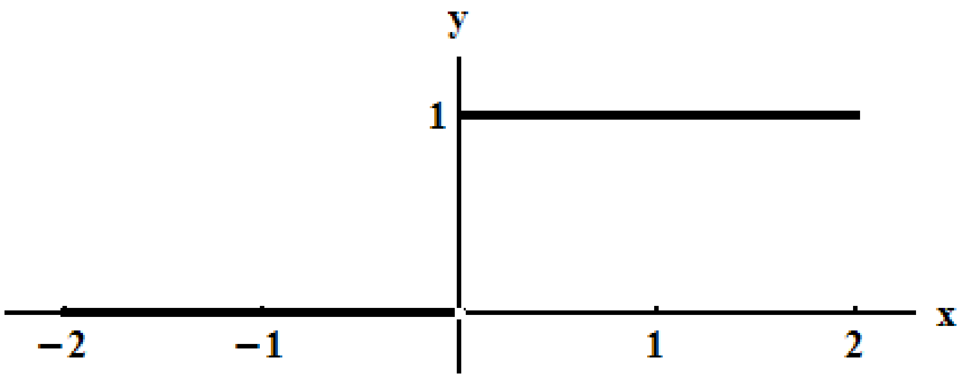


Рис. 5.6. Функции $\eta(x)$

Теорема 5.1. Пусть функции $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда и функции $u(x) \pm \upsilon(x)$, $u(x) \cdot \upsilon(x)$ непрерывны в точке x_0. Если $\upsilon(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{u(x)}{\upsilon(x)}$ – также непрерывны в точке x_0.

Доказательство следует из теоремы 3.3 и определения 5.1.

Определение 5.3. Пусть функция $u = u(x)$ определена на множестве X со значениями во множестве U и функция $y = f(u)$ определена на множестве U со значениями во множестве Y. Тогда функцию $y = f(u(x))$ будем называть сложной функцией $(f \circ u)(x)$ (композицией функций f и u), рис. 5.7.

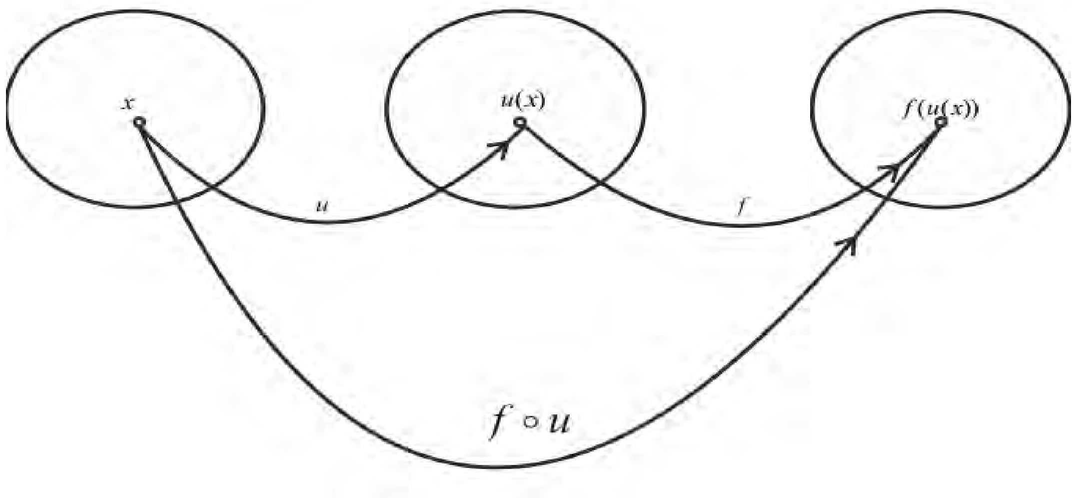


Рис. 5.7

Теорема 5.2. Пусть функция $u = u(x)$ непрерывна в точке x_0 и функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0. Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство следует из определения 3.2 и определения 5.1.

П р и м е р 5.5

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x}; & x \neq 0; \\ a; \; x = 0, \end{cases}$$

в зависимости от значений a.

Р е ш е н и е

Функция $y = \sin(x^2)$ непрерывна $\forall\, x$ (как композиция двух непрерывных функций $u = x^2$ и $y = \sin u$ (см. теорему 5.2)).

По теореме 5.1 $y = \dfrac{\sin x^2}{x}$ непрерывна $\forall\, x \neq 0$. Найдем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} x = 0\,.$$

Поэтому при $a = 0$ функция непрерывна $\forall\, x$. При $a \neq 0$ разрывна в точке $x = 0$ и непрерывна $\forall\, x \neq 0$.

Определение 5.4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0 , кроме, может быть, самой точки x_0. Пусть x_0 – точка разрыва функции $y = f(x)$ и при этом существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$. Тогда точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода функции $y = f(x)$. При этом $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции. Если скачок равен 0, то разрыв называется устранимым.

П р и м е р 5.6

Для функции

$$y(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \; x \neq 0; \\ \quad 2, \; x = 0 \end{cases}$$

(см. пример 3.1), точка $x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва.

Для функции $y = x \sin \dfrac{1}{x}$ (см. упражнение 3.4) $x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва.

Для функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$ (см. теорему 4.1) $x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва.

Для функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (см. упражнение 5.2) $x = 1$– точка устранимого разрыва.

Для функции $y = \operatorname{sign} x$ (см. пример 3.3) $x_0 = 0$ – точка разрыва 1-го рода. Разрыв – неустранимый. Скачок функции в точке $x_0 = 0$ равен 2.

Для единичной функции Хевисайда $\eta(x)$ (см. пример 5.4) $x_0 = 0$ – точка разрыва 1-го рода. Разрыв – неустранимый. Скачок функции в точке $x_0 = 0$ равен 1.

Определение 5.5. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0. Точка x_0 называется точкой разрыва 2-го рода функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен ∞ или не существует.

Пример 5.7

Для функций $y = \dfrac{1}{x^2}$; $y = \dfrac{1}{x} + 1$ (см. пример 3.2) $x_0 = 0$ – точка разрыва 2-го рода. Для функции $y = \sin\dfrac{1}{x}$ (см. упражнение 3.4) $x_0 = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

Для функций $y = (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}\dfrac{1}{x}$ и $y = (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$ (см. упражнения 3.7, 3.8) $x_0 = 0$ – точка разрыва 2-го рода. Точки $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ – точки разрыва 1-го рода. Разрывы неустранимые.

Для функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ (см. упражнение 5.1) $x_0 = 1$ – точка разрыва 2-го рода. Для функции Дирихле $D(x)$ (см. пример 5.3) любая точка $x_0 \in R$ – точка разрыва 2-го рода.

Пример 5.8

Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$, рис. 5.8.

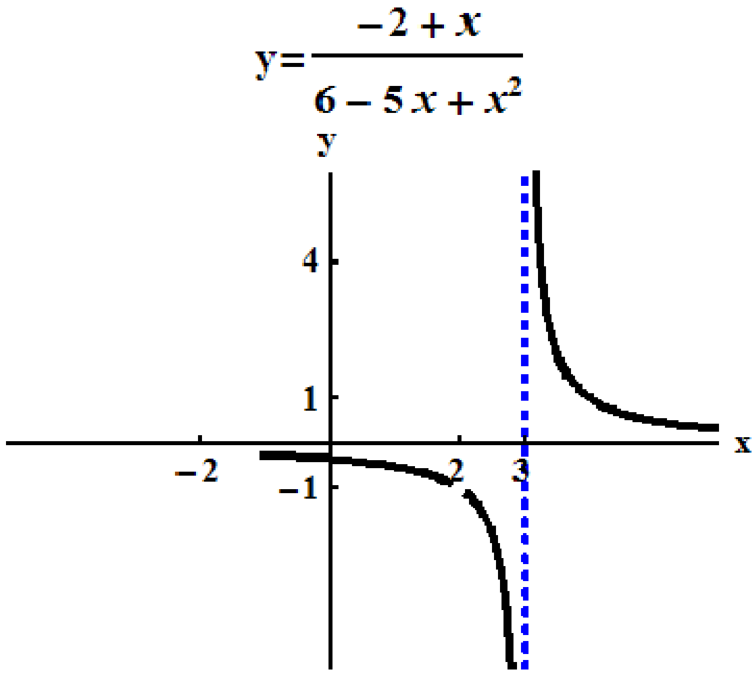


Рис. 5.8. Функция $y = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$

Р е ш е н и е

Функция – дробно-рациональная. Непрерывна везде, кроме точек, где знаменатель обращается в ноль: $x^2-5x+6=0,\ x_1=2,\ x_2=3$.

Рассмотрим точку $x=2$.

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x-2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{1}{x-3}=-1;$$

$f(2+0)=f(2-0)=-1\Rightarrow x=2.$ – точка устранимого разрыва.

Рассмотрим точку $x=3$.

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}=+\infty.$$

$\displaystyle\lim_{x\to 3-0}\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x-3}=-\infty\Rightarrow x=3$ – точка разрыва 2-го рода.

П р и м е р 5.9

Исследовать на непрерывность и определить тип точек разрыва для функции:

$$y=\begin{cases} x; \ x<-1; \\ 1-x^2; -1\le x\le 1; \\ x-1; \ x>1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е

Функции $y=x$, $y=1-x^2$, $y=x-1$ непрерывны $\forall x\in R$, поэтому и наша функция непрерывна везде, кроме, может быть, точек $x=-1$ и $x=1$. Слева и справа от точек $x=\pm 1$ функция задается различными аналитическими выражениями.

Пусть $x=1$.

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0}(x-1)=0;$$

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}(1-x^2)=0, \quad y(1)=0,$$

то есть

$$y(1-0)=y(1+0)=y(1)=0,$$

поэтому функция непрерывна в точке $x=1$.

Пусть $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1+0} y=\lim_{x\to -1+0}(1-x^2)=0; \lim_{x\to -1-0} y=\lim_{x\to -1-0} x=-1,$$

то есть

$y(-1+0)\ne y(-1-0)\Rightarrow$ $x=-1$ – точка разрыва 1-го рода (см. определение 5.3). Разрыв – неустранимый, скачок функции равен 1.

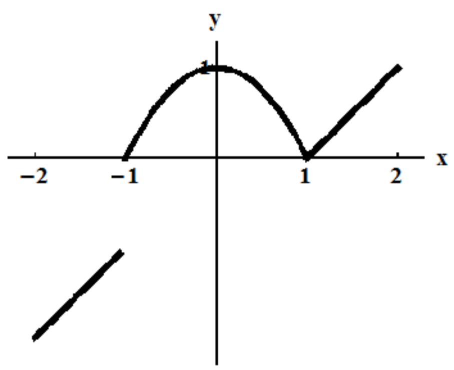


Рис. 5.9. Функция $y=\begin{cases} x; \ x<-1; \\ 1-x^2; -1\le x\le 1; \\ x-1; \ x>1 \end{cases}$

П р и м е р 5.10

Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{2}{1-3^{\frac{x}{x-2}}}$, рис. 5.10.

$x=2,\ x=0$ – точки разрыва функции.

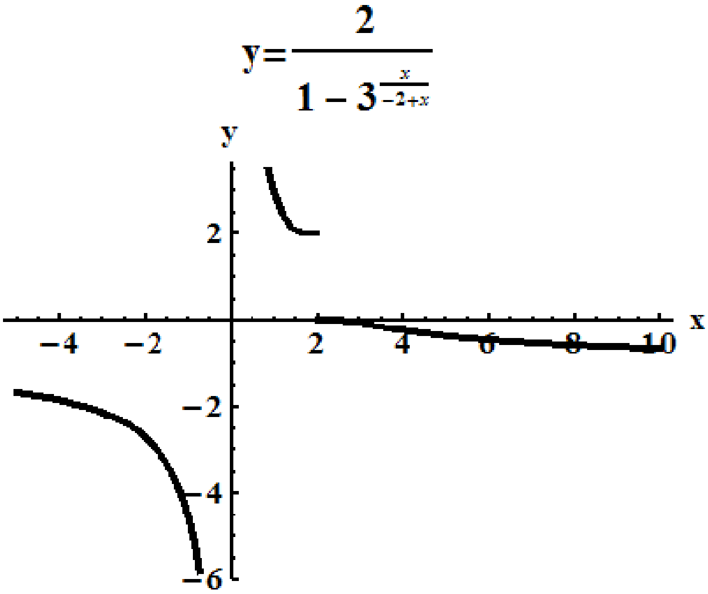


Рис. 5.10. Функция $y=\dfrac{2}{1-3^{\frac{x}{x-2}}}$

Р е ш е н и е

$\lim\limits_{x\to 2-0} y=2;\ \lim\limits_{x\to 2+0} y=0 \Rightarrow x=2$ – точка разрыва 1-го рода. Разрыв неустранимый, скачок функции равен –2.

$\lim\limits_{x\to +0} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to -0} y=-\infty \Rightarrow x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

У п р а ж н е н и е 5.1. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=1-3^{\frac{x}{x-2}}.$$

П р и м е р 5.11

Определить тип точек разрыва функции $y=\dfrac{x^2+ax-2}{x+2}$ в зависимости от значений параметра a.

Р е ш е н и е

$x=-2$ – точка разрыва функции. Найдем $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+ax-2)=2-2a$.

1. Если $a\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+ax-2)\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+ax-2}{x+2}=\infty \Rightarrow x=-2$ – точка разрыва 2-го рода.

2. Если $a=1$, то

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-1)=-3 \Rightarrow x=-2$ – точка устранимого разрыва.

Упражнение 5.2. Исследовать функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-(a-2)x+7}{x-1}; & x\neq 1;\\ b; & x=1\end{cases}$$

на непрерывность в зависимости от значений a и b.

Упражнение 5.3. В зависимости от значений k исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{kx}}{x}; \ x\neq 0;\\ 1; \ x=0.\end{cases}$$

Задания

Задание 5.1

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0.

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{|x-1|}$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;

5) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x^3}}$, $x_0=0$; 6) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}$, $x_0=0$.

З а д а н и е 5.2

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и указать тип ее точек разрыва:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3+1}$; 2) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$; 5) $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$; 6) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$;

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; 8) $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$; 9) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$;

10) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 \text{ при } x<1,\\ 3x+2 \text{ при } x\ge 1;\end{cases}$ 11) $f(x)=\begin{cases}x^3 \text{ при } x<1,\\ 2x-1 \text{ при } 1\le x\le 3,\\ \dfrac{1}{x} \text{ при } x>3;\end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases}e^{2x} \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{x^2}{2} \text{ при } 1<x\le 2,\\ 2x-2 \text{ при } x>2;\end{cases}$ 13) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} \text{ при } x<0,\\ 1 \text{ при } 0\le x\le 1,\\ x \text{ при } 1<x\le 2,\\ 3 \text{ при } 2<x\le 3;\end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{2}x \text{ при } x\le -1,\\ \dfrac{1}{x} \text{ при } -1<x<0,\\ x+2 \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$

З а д а н и е 5.3

Можно ли доопределить функцию $f(x)$ в точке x_0, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $x_0=0$; 2) $f(x)=x\operatorname{ctg}x$, $x_0=0$;

3) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_0=-1$;

5) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$, $x_0=0$; 6) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;

7) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2-x}$, $x_0=0$.

З а д а н и е 5.4

При каких значениях a и b функция будет непрерывной?

1) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3 \text{ при } x\le 0,\\ ax+b \text{ при } 0<x<1,\\ \sqrt{x} \text{ при } x\ge 1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } |x|\le 1,\\ x^2+ax+b \text{ при } |x|>1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1} \text{ при } |x|\ne 1,\\ a \text{ при } x=-1,\\ b \text{ при } x=1;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 \text{ при } x>0,\\ -x \text{ при } x\le 0;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+x^3} \text{ при } x\ne -1,\\ a \text{ при } x=-1.\end{cases}$

З а д а н и е 5.5

Имеет ли уравнение хотя бы один корень?

1) $x^4-3x^2+2x-1=0$ на отрезке $[1;\,2]$;

2) $8^x-3\cdot 2^x-16=0$ на отрезке $[0;\,2]$;

3) $\sin x-x+1=0$ на отрезке $[0;\,\pi]$.

З а д а н и е 5.6

Будет ли ограничена функция

$f(x)=5^{x^2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}+(x^2-x+2)\sin\sqrt{3+x^2}$ на отрезке $[0;\,100]$?

З а д а н и е 5.7

Принимает ли функция

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1 \text{ при } -1\le x<0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ x^2-1 \text{ при } 0<x<1\end{cases}$$

наименьшее и наибольшее значение в области ее задания?

З а д а н и е 5.8

Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}3^x+1 \text{ при } -1\le x<0,\\ 3^x \text{ при } x=0,\\ 3^x-1 \text{ при } 0<x<1\end{cases}$$

не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

З а д а н и е 5.9

Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}x,\ x\in\mathbb{Q};\\ 0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, и указать тип ее точек разрыва.

Ответы

5.1. 1) $x_0=0$ – точка устранимого разрыва 1-го рода;
2) $x_0=1$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;
3) $x_0=0$ – точка устранимого разрыва 1-го рода;
4) $x_0=0$ – точка устранимого разрыва 1-го рода;
5) $x_0=0$ – точка разрыва 2-го рода;
6) $x_0=0$ – точка устранимого разрыва 1-го рода.
5.2. 1) $x_0=-1$ – точка бесконечного разрыва 2-го рода;
2) $x_0=0$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;
3) $x_0=\frac{3}{2}$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;

4) $x_0 = 1$ – точка устранимого разрыва 1-го рода, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ – точки бесконечного разрыва 2-го рода;

5) $x_0 = 1$ – точка бесконечного разрыва 2-го рода;

6) $x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва 1-го рода;

7) $x_0 = 0$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;

8) $x_0 = 0$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;

9) $x_0 = 1$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;

10) $x_0 = 1$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;

11) $x_0 = 3$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;

12) $x_0 = 1$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;

13) $x_0 = 0$ – точка бесконечного разрыва 2-го рода; справа в точке $x_0 = 0$ функция непрерывна; $x_0 = 2$ – точка неустранимого разрыва 1-го рода;

14) $x_0 = 0$ – точка бесконечного разрыва 2-го рода.

5.3. 1) да, $f(0) = \frac{1}{2}$; 2) да, $f(0) = 1$; 3) да, $f(0) = \frac{1}{2}$; 4) да, $f(-1) = -\frac{3}{2}$; 5) да, $f(0) = 2$; 6) нельзя; 7) нельзя.

5.4. 1) $a = 2; b = -1$; 2) $a = 1; b = -1$; 3) a и b не существуют; 4) a не существует; 5) $a = \frac{1}{3}$.

5.5. 1) да; 2) да; 3) да.

5.6. Да.

5.7. Нет.

5.9. Непрерывна в точке $x = 0$. Точки разрыва 2-го рода $\forall x \neq 0$.

6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Определение 6.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0 и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Этот предел называется производной функции в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Таким образом:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{6.1}$$

Обозначим $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$, тогда (6.1) перепишется в виде

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6.2}$$

Другие обозначения производной: $y'(x_0)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

П р и м е р 6.1

$y = \sin x$. Найти $y'(x)$.

Р е ш е н и е

По формуле (6.2)

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\cdot\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$. Аналогично $(\cos x)' = -\sin x$.

П р и м е р 6.2

$y = \ln x$. Найти $y'(x)$.

Р е ш е н и е

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Аналогично $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

У п р а ж н е н и е 6.1. Для функций $y = |x|$, $y = \ln|x|$, $y = x \cdot |x|$ найти производные. Построить графики функций y и y'. Определить точки, в которых производные не существуют.

Определение 6.2. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ представляется в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{6.3}$$

где A – постоянное число, не зависящее от Δx;

$o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx, при $\Delta x \to 0$.

Теорема 6.1. Для того чтобы $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная $f'(x_0)$. При этом $A = f'(x_0)$ и формула (6.3) перепишется в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \tag{6.4}$$

Доказательство

Рассмотрим цепочку эквивалентных утверждений:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta y - f'(x_0)\Delta x = o(\Delta x),$$

что и требовалось доказать.

Определение 6.3. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Дифференциалом $\mathrm{d}f(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 будем называть линейную относительно Δx функцию вида

$$df : \Delta x \to f'(x_0)\Delta x, \qquad (6.5)$$

то есть

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \qquad (6.6)$$

Для функции $f(x) = x : dx = x'\Delta x = \Delta x$. Поэтому формулу (6.6) можно переписать в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \qquad (6.7)$$

Теорема 6.2. Если функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство

Рассмотрим цепочку эквивалентных утверждений:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6.3. Пусть функции $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ – дифференцируемы, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.

Тогда:

1) $\alpha_1 u \pm \alpha_2 \upsilon$ также дифференцируема и

$$(\alpha_1 u \pm \alpha_2 \upsilon)' = \alpha_1 u' \pm \alpha_2 \upsilon'; \qquad (6.8)$$

2) $u \cdot \upsilon$ дифференцируема и

$$(u \cdot \upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'; \qquad (6.9)$$

3) $\dfrac{u}{\upsilon}$ дифференцируема в точках, где $\upsilon(x) \neq 0$ и

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}. \qquad (6.10)$$

Доказательство

Докажем, например, формулу (6.9).

$$(u\upsilon)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\upsilon(x+\Delta x)-u(x)\upsilon(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)-u(x))\upsilon(x+\Delta x)+u(x)\upsilon(x+\Delta x)-u(x)\upsilon(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\upsilon(x+\Delta x)+u(x)\frac{\upsilon(x+\Delta x)-\upsilon(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x)\upsilon(x)+u(x)\upsilon'(x),$$

что и требовалось доказать.

Из формул (6.8)–(6.10), с учетом (6.7), получим

$$\mathrm{d}(\alpha_1 u+\alpha_2\upsilon)=\alpha_1\mathrm{d}u+\alpha_2\mathrm{d}\upsilon;$$

$$\mathrm{d}(u\upsilon)=u\mathrm{d}\upsilon+v\mathrm{d}u;$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{\upsilon}\right)=\frac{\upsilon\mathrm{d}u-u\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon^2}.$$

П р и м е р 6.3

$y=\mathrm{tg}\,x$. Найти $y'(x)$.

Р е ш е н и е

$$(\mathrm{tg}\,x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\left|\text{по формуле (6.10)}\right|=$$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Теорема 6.4. Пусть функции $y = f(u)$ и $u = u(x)$ дифференцируемы. Тогда и сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема и

$$(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x). \tag{6.11}$$

Доказательство

Пусть $x_0 \in R,\, u_0 = u(x_0)$.

$$((f \circ u)(x_0))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u_0)u'(x_0),$$

что и требовалось доказать.

П р и м е р 6.4

Найти производную $y = \sin(\ln(1 + x^2))$.

Р е ш е н и е

Данная функция представляется как композиция функций

$$x \to 1 + x^2 \to \ln(1 + x^2) \to \sin(\ln(1 + x^2)).$$

Тогда по формуле (6.11)

$$(\sin(\ln(1 + x^2)))' = \cos(\ln(1 + x^2)) \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x.$$

Найдем дифференциал функции $y = f(u(x))$. По формуле (6.7)

$$\mathrm{d}(f \circ u)(x) = (f \circ u)'_x \mathrm{d}x. \tag{6.12}$$

С другой стороны, с учетом формулы (6.11)

$$\mathrm{d}(f \circ u)(x) = (f \circ u)'_x \mathrm{d}x = f'(u(x)) \cdot u'(x)\mathrm{d}x = f'(u(x)) \cdot \mathrm{d}u = f'_u(u)\mathrm{d}u. \tag{6.13}$$

Формулы (6.12) и (6.13) показывают инвариантность (неизменяемость) формы дифференциала. В формуле (6.12) $\mathrm{d}x = \Delta x$, в формуле (6.13) $\mathrm{d}u$ – дифференциал функции $u = u(x)$. Например, для функции

$$y = \sin(\ln(1 + x^2)),\ \mathrm{d}y = \cos u \mathrm{d}u,$$

где $u = \ln(1 + x^2)$,

$$\mathrm{d}y = \cos(\ln t) \cdot \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t,$$

где $t = 1 + x^2$, $\mathrm{d}y = \cos(\ln(1 + x^2)) \cdot \dfrac{1}{1 + x^2} \cdot 2x\mathrm{d}x$.

П р и м е р 6.5

Найти производную функции $y = x^{\alpha}$, $x > 0$.

Р е ш е н и е

$\ln y = \ln(x^{\alpha})$, $\ln y = \alpha \ln x$.

$(\ln y)' = (\alpha \ln x)'$; $\quad \dfrac{1}{y} y' = \alpha \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha y \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha} \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Таким образом

$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}. \tag{6.14}$$

П р и м е р 6.6

$y = \dfrac{5}{3\sqrt{x^3}} + \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$; $x > 0$. Найти y'.

Р е ш е н и е

По формуле (6.14)

$$y' = \left(\frac{5}{3} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{5}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = -2{,}5x^{-2{,}5} + 0{,}5x^{0{,}5}.$$

П р и м е р 6.7

Найти производную функции $y = a^x$.

Р е ш е н и е

$$\ln y = \ln(a^x); \quad \ln y = x \ln a; \quad (\ln y)' = (x \ln a)'; \quad \frac{1}{y} y' = \ln a \Rightarrow$$

$$y' = y \ln a = a^x \ln a.$$

Таким образом,

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

в частности: $(e^x)' = e^x$.

П р и м е р 6.8

$y = \sin^5 x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$. Найти y'.

Р е ш е н и е

По формуле (6.9)

$$y' = (\sin^5 x)' \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \sin^5 x \cdot (\ln(\operatorname{tg} x))' = 5\sin^4 x \cdot \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \sin^5 x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

У п р а ж н е н и е 6.2. $y = \operatorname{tg}^5 3x \cdot 5^{\cos^2 x}$. Найти y'.

У п р а ж н е н и е 6.3. Найти производные функций
$y = \operatorname{sh} x$; $y = \operatorname{ch} x$; $y = \operatorname{th} x$; $y = \operatorname{cth} x$.

У п р а ж н е н и е 6.4. Проверить, что

а) $y = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$;

б) $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Определение 6.4. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X со значениями во множестве Y и такова, что если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, рис. 6.1. Пусть $f(X) \subset Y$ – множество значений функции f. Для такой функции можно определить обратную функцию f^{-1}, определенную на множестве $f(X)$ со значениями во множестве X по правилу

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

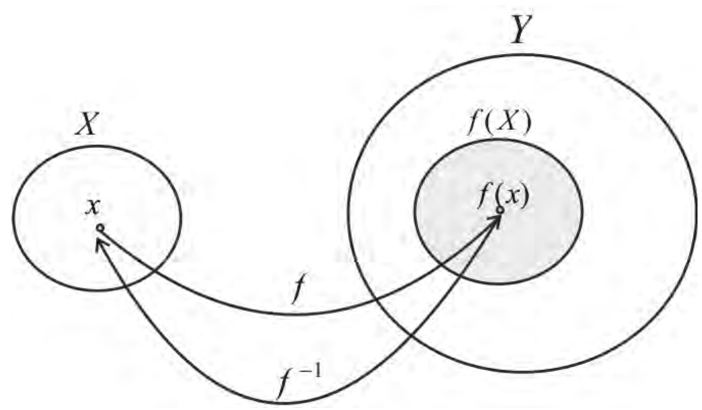


Рис. 6.1

Если $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a, b), то $f(x)$ удовлетворяет условиям определения 6.4 и для нее существует обратная f^{-1}, причем если $f(x)$ непрерывна, то f^{-1} также непрерывна; если $f(x)$ дифференцируема и $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} также дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$

и
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \tag{6.15}$$

или
$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)};\ (f^{-1})'(y_0) \neq 0. \tag{6.16}$$

П р и м е р 6.9

Для функции $y = \sqrt{x},\ x > 0$, функция $x = y^2,\ y > 0$, обратная, и тогда по формуле (6.16)

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'\big|_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

П р и м е р 6.10

Для функции $y = \arcsin x,\ x \in (-1; 1)$, функция $x = \sin y,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, обратная, и тогда по формуле (6.16)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'\big|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos y\big|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Таким образом, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Сводка формул

1) $(\alpha_1 u \pm \alpha_2 \upsilon)' = \alpha_1 u' \pm \alpha_2 \upsilon', \quad \alpha_1, \alpha_2$ – константы;
2) $(\alpha \cdot u)' = \alpha \cdot u'$, α – константа;
3) $(u \cdot \upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'$;
4) $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$;
5) $(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x)$.

Таблица производных

$y(x)$	$y'(x)$	$y(x)$	$y'(x)$
$C(C - \text{const})$	0	$\arcsin x$	$=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	arcctgx	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Упражнение 6.5. Проверить, что:

а) $y = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$;

б) $y = \arcsin\dfrac{x}{a} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Определение 6.5. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

тогда $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную.

Упражнение 6.6. Найти $y'(0)$ для функций (рис. 6.2)

а) $y = \sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \sqrt{x^2}$; в) $y = \sin\sqrt[3]{x^2}$; г) $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin\sqrt[3]{x^2}$.

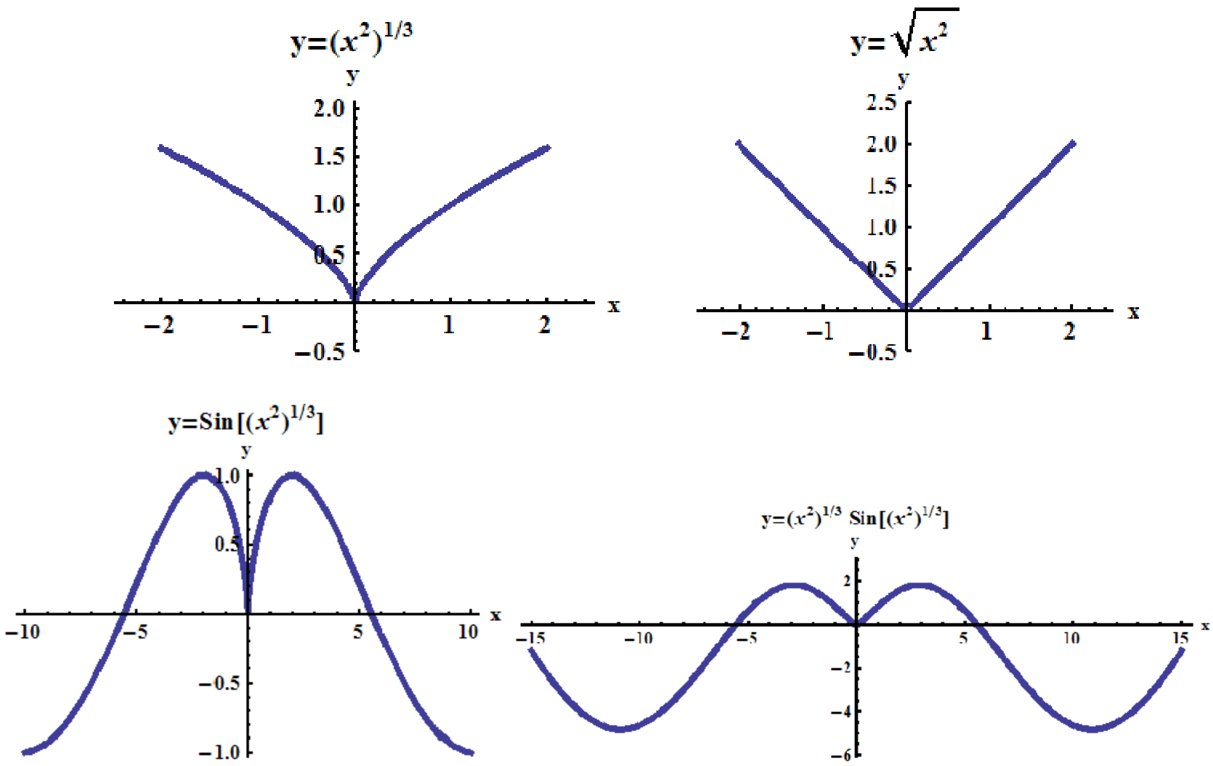


Рис. 6.2

Упражнение 6.7. $y = \begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Найти $y'(x)$. Построить графики функций $y(x)$, $y'(x)$.

Упражнение 6.8. $y=\begin{cases} 2x+2, & x\le -1; \\ 1-x^2, & -1<x\le 1; \\ -2x+2, & x>1. \end{cases}$

Найти $y'(x)$. Построить графики функций $y(x)$, $y'(x)$.

Упражнение 6.9. $y=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}; & x\ne 0; \\ 0; & x=0. \end{cases}$

Найти $y'(x)$. Исследовать $y(x)$, $y'(x)$ на непрерывность.

Упражнение 6.10. Показать, что функция $y=\sqrt{1-x^2}$ недифференцируема в точке $x_0=1$ (условие (6.3) не выполняется).

Задания

Задание 6.1

Пользуясь определением, вычислить производные функций в указанных точках:

1) $y=x^3+2$ в точке $x=2$;
2) $y=\sqrt{x}$ в точках $x=1$, $x=2$;
3) $y=\sqrt[3]{x-1}$ в точке $x=1$;
4) $y=3^x$ в точке $x=3$;
5) $y=\arcsin x$ в точке $x=0$;
6) $y=\operatorname{arctg} x$ в точке $x=1$.

Задание 6.2

Вычислить $y'_+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $y'_-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, если $y=|\cos x|$.

Задание 6.3

Исследовать дифференцируемость функции в указанной точке:

1) $y=\sqrt[3]{x^2}$ в точке $x=0$; 2) $y=x|x|$ в точке $x=0$;

3) $y=\begin{cases} \sin x \text{ при } x\ge 0, \\ -x \text{ при } x<0 \end{cases}$ в точке $x=0$;

4) $y=|\ln x|$ в точке $x=1$;

5) $y=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ при } x\neq 0, \\ 0 \text{ при } x=0 \end{cases}$ в точке $x=0$;

6) $y=e^{|x|}$ в точке $x=0$.

Задание 6.4

Пользуясь формулами дифференцирования и таблицей производных, найти производные следующих функций:

1) $y=5x^2-2x+3$; 2) $y=x^2\ln x$; 3) $y=\dfrac{3^x}{\cos x}$;

4) $y=x\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}$; 5) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; 6) $y=\ln x\cdot\arcsin x$;

7) $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$; 8) $y=x\arccos x$; 9) $y=2^x\operatorname{ctg} x$;

10) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; 11) $y=\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}+3$;

12) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^5}}+\dfrac{\sqrt{x^7}}{7}-5x$; 13) $y=5\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{2}{x}+7$;

14) $y=\operatorname{tg} x\cdot\log_7 x$; 15) $y=\operatorname{arcctg} x\cdot\sqrt[3]{x^2}$; 16) $y=\sqrt{x}(x^2+x+1)$;

17) $y=\sqrt{x}\cdot\ln x\cdot\operatorname{arctg} x$; 18) $y=(x+1)2^x\sin x$; 19) $y=\dfrac{x^2+1}{2x^3-3x^2+1}$;

20) $y=\dfrac{3^x}{7}+\dfrac{7}{3x^3}+\dfrac{2}{3^{-x}}$; 21) $y=\log_3 x+\log_3 7$;

22) $y=\lg 5\cdot\operatorname{arctg} x$; 23) $y=2x^2\ln x-x^2+5$;

24) $y=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$; 25) $y=\dfrac{x^5-1}{x-1}$.

Задание 6.5

Найти производные сложных функций.

1) $y=\cos^2 x$; 2) $y=\sin 3x$; 3) $y=\arccos\sqrt{x}$; 4) $y=\sqrt{x^2-1}$;

5) $y=\ln^2 x-\ln\ln x$; 6) $y=\operatorname{tg} x\cdot\ln\cos x+\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 7) $y=2^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$;

8) $y=\sqrt{\cos x}\cdot 2^{\sqrt{\cos x}}$; 9) $y=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)$; 10) $y=\ln\arcsin x+\dfrac{1}{2}\ln^2 x$;

11) $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$; 12) $y=\operatorname{arctg}\ln x$;

13) $y=2^{\arcsin 3x}-\arccos^2 3x$; 14) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+3})$;

15) $y=\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right)^5$; 16) $y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$; 17) $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}^3(3x)}$;

18) $y=\ln(1+\sqrt{x})$; 19) $y=\ln^3(1+\sqrt{x})$; 20) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

21) $y=\sqrt{3x^2+2}\cdot(x+3)^5$; 22) $y=\operatorname{tg}^7(5x)$; 23) $y=\sin^3(\ln x)$;

24) $y=\ln^3(\sin x)$; 25) $y=\sqrt{3x^2+x^6}$; 26) $y=e^{\sin x}$; 27) $y=e^{\sin^3 x}$;

28) $y=e^{e^x}$; 29) $y=\sin^3 x+\sin^3\dfrac{\pi}{5}$; 30) $y=\cos^5 x\cdot\ln^3(2x)$;

31) $y=\sin(\arccos x)$; 32) $y=\arcsin(\sin x)$; 33) $y=2^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

34) $y=2^{x^2}\cos^3 x$; 35) $y=\sqrt[3]{1+x^2}\cdot 3^{x^2}$; 36) $y=\cos^3 x\cdot\sqrt{\sin x}$;

37) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$; 38) $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$;

39) $y=x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arctg}x$; 40) $y=x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

41) $y=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)-2\operatorname{arctg}x$; 42) $y=\cos^3 x-3\cos x$.

Задание 6.6

Найти производную заданной функции и вычислить ее значение в указанной точке.

1) $y=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ в точке $t=\dfrac{\pi}{6}$; 2) $y=(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}}$ в точке $x=1$;

3) $y=\sin^2 2x$ в точке $x=\dfrac{\pi}{8}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ в точке $x=2$.

Задание 6.7

Найти дифференциалы заданных функций.

1) $y=x\ln x-x$; 2) $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$; 3) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$;

4) $y=\ln(1+e^{10x})+\operatorname{arctg}e^{5x}$;

5) $y=\sqrt{\arcsin x}+(\operatorname{arctg} x)^2$;   6) $y=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$.

Ответы

6.1. 1) 12;   2) $\frac{1}{2};\frac{1}{2\sqrt{2}}$;   3) $+\infty$;   4) $27\ln 3$;   5) 1;   6) $\frac{1}{2}$.

6.2. $y'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

6.3. 1) недифференцируема ($y'_+(0)=+\infty$, $y'_-(0)=-\infty$);
2) дифференцируема ($y'(0)=0$);
3) недифференцируема $y'_+(0)=1$, $y'_-(0)=-1$);
4) недифференцируема ($y'_+(1)=1$, $y'_-(1)=-1$);
5) дифференцируема ($y'(0)=0$);
6) недифференцируема ($y'_+(0)=1$, $y'_-(0)=-1$).

6.4. 1) $y'=10x-2$;   2) $y'=2x\ln x+x$;   3) $y'=\frac{3^x(\ln 3\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}$;
4) $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{4}{x^3}$;   5) $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}$;   6) $y'=\frac{1}{x}\arcsin x+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$;
7) $y'=\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$;   8) $y'=\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
9) $y'=2^x\ln 2\operatorname{ctg} x-\frac{2^x}{\sin^2 x}$;   10) $y'=\frac{2}{1+\sin 2x}$.

6.5. 1) $-\sin 2x$;   2) $3\cos 3x$;   3) $-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;   4) $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$;   5) $\frac{2\ln^2 x-1}{x\ln x}$;
6) $\frac{\ln\cos x-\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^2\cdot\cos^2 x}$;   7) $\frac{2^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}\cdot\ln 2}{x^2\cdot\sin^2\frac{1}{x}}$;
8) $-\frac{\sin x\cdot 2^{\sqrt{\cos x}}}{2\sqrt{\cos x}}(1+\ln 2\sqrt{\cos x})$;   9) $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}\cdot\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)}$;
10) $\frac{1}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}+\frac{\ln x}{x}$;   11) $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;   12) $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$;

13) $\dfrac{\ln 8 \cdot 2^{\arcsin 3x} + 6\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$; 14) $\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x+\sqrt{x^2+3}}$.

6.6. 1) $y' = \dfrac{1}{1-\sin t},\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$; 2) $y' = \dfrac{3}{2}(x^2+x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x+1),\ y'(1) = 9$;

3) $y' = 2\sin 4x,\ y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2$; 4) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1} \cdot (x-1)},\ y'(2) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6.7. 1) $\mathrm{d}y = \ln x \mathrm{d}x$; 2) $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 3) $\mathrm{d}y = \dfrac{a\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$;

4) $\mathrm{d}y = \dfrac{5e^{5x}(2e^{5x}+1)}{1+e^{10x}}\mathrm{d}x$; 5) $\mathrm{d}y = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin x(1-x^2)}} + \dfrac{2\,\mathrm{arcctg}\, x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$;

6) $\mathrm{d}y = -\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

7. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Рассмотрим плоскость с фиксированной системой координат (O, x, y). Пусть точка M (x, y) движется по плоскости, и траектория ее движения

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \tag{7.1}$$

где t – время, или

$$r(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j},$$

где $r(t)$ – радиус-вектор точки M.

Предположим, что для функции $x = x(t)$ существует обратная функция $t = x^{-1}(x)$ (например, когда $x = x(t)$ строго монотонна). Тогда (7.1) задается также в виде $y = y(x^{-1}(x))$.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка на кривой (7.1), где

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0). \end{cases}$$

Предположим, что $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t_0) \neq 0$.

Тогда по формулам (6.11), (6.15)

$$y'(x_0) = (y(x^{-1}(x)))'\Big|_{x=x_0} = y'_t(x^{-1}(x_0)) \cdot (x^{-1})'(x_0) =$$

$$= y'_t(t_0) \cdot \frac{1}{x'_t(t_0)} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

Таким образом для функции, заданной в виде (7.1), производная

$$y'_x = \begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \end{cases}. \qquad (7.2)$$

П р и м е р

Найти y'_x для функции $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$

$0 < t < \pi$.

Р е ш е н и е

Функция $x = a\cos t$ монотонно убывает на промежутке $[0;\, \pi]$. Для нее $\exists$ обратная: $t = \arccos\frac{x}{a}$. По формуле (7.2)

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y'_x = \dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = -\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{\cos t}{\sin t}, \quad t \in (0; \pi). \end{cases} \qquad (7.3)$$

Кривая в примере – параметрическое задание эллипса (верхней части), заданного уравнением $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Если из формулы (7.3) исключить t, то получим

$$y'_x = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{x}{a}\right)}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2)}},$$

что совпадает с производной $\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)'$.

Упражнение 7.1. Найти y'_x для функции

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t; \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases} \quad t > 0.$$

Упражнение 7.2. Найти y'_x для функции

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad -\pi < t < 0,$$

для параметрического задания эллипса (нижняя часть). Найти y' для явного задания $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ эллипса. Проверить совпадение найденных формул.

Сводка формул

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x(t); \\ y'_x = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}. \end{cases}$$

Задания

Задание 7.1

Вычислить производную y'_x для функции, заданной параметрически.

1) $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \cos t); \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = a(\ln\mathrm{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t + \sin t), \\ y = a(\sin t - \cos t); \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = a\,\mathrm{sh}\,t, \\ y = b\,\mathrm{ch}\,t; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = 2\ln\mathrm{ctg}\,t, \\ y = \mathrm{tg}\,t + \mathrm{ctg}\,t; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y = \cos^3 t; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x=\cos t\sin t, \\ y=\operatorname{tg}^2 t; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x=\ln\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{t^2+t}; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x=\ln\sin t, \\ y=e^{\cos 2t}; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x=\sin^{\frac{3}{2}} t, \\ y=\cos^{\frac{3}{2}} t; \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\operatorname{arctg}t; \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x=3\cos^3 t, \\ y=9\sin^3 t; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x=\dfrac{2-t}{2+t^2}, \\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2}; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2-3t+2}, \\ y=\dfrac{2}{t^2-5t+4}; \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x=\arcsin(t^2-1), \\ y=\arccos 2t. \end{cases}$

З а д а н и е 7.2

Вычислить $\dfrac{dy}{dx}$ при заданном значении параметра t.

1) $\begin{cases} x=t, \\ y=\dfrac{\ln t}{t}, \end{cases}$ при $t=1$; 2) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$ при $t=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}, \end{cases}$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$; 4) $\begin{cases} x=e^{-t^2}, \\ y=\operatorname{arctg}(2t+1), \end{cases}$ при $t=1$;

5) $\begin{cases} x=4\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}, \\ y=2^{\sin t}+3^{\cos t}, \end{cases}$ при $t=\dfrac{\pi}{2}$; 6) $\begin{cases} x=\ln^2 t, \\ y=2t^3, \end{cases}$ при $t=e$;

7) $\begin{cases} x=\sec t, \\ y=\operatorname{tg}t, \end{cases}$ при $t=\dfrac{\pi}{6}$; 8) $\begin{cases} x=\arcsin 2t, \\ y=\sqrt{1-4t^2}, \end{cases}$ при $t=\dfrac{1}{4}$;

9) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=2e^{t\sqrt{2}}+3e^{-t\sqrt{2}}, \end{cases}$ при $t=0$; 10) $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg}t, \\ y=\operatorname{ctg}t, \end{cases}$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Ответы

7.1. 1) $\dfrac{3t^2}{2}$; 2) $-\dfrac{b}{a}$; 3) -1; 4) $\dfrac{1+\sin t}{1-\cos t}$; 5) $\operatorname{tg}t$; 6) $\dfrac{\cos t-t\sin t}{1-\sin t-t\cos t}$;

7) $\frac{b\,\mathrm{th}\,t}{a}$; 8) $\frac{2t}{1-t^2}$; 9) ctg $2t$; 10) $-\frac{3\sin t}{2t}$; 11) $-2\,\mathrm{tg}^3\,t$; 12) $\frac{\mathrm{tg}\,2t}{\cos^4 t}$;

13) $\frac{2t+1}{t^2+t}$; 14) $-4\sin^2 t e^{\cos 2t}$; 15) $-\mathrm{tg}^{\frac{1}{2}}\,t$; 16) $\frac{t}{2}$; 17) $-3\,\mathrm{tg}\,t$;

18) $\frac{4t}{t^2-4t-2}$; 19) $\frac{4t-10}{2t-3}\cdot\left(\frac{t-2}{t-4}\right)^2$; 20) $\frac{-\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{1-4t^2}}$.

7.2. 1) 1; 2) -1; 3) -2; 4) $-\frac{e}{10}$; 5) $-\frac{\ln 3}{8}$; 6) $3e^3$; 7) 2; 8) $-\frac{1}{2}$; 9) $-\sqrt{2}$; 10) -1.

8. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде

$$F(x,\ y) = 0\,, \tag{8.1}$$

то есть $F(x,\ f(x)) = 0,\ \forall x \in D(f)$.

Дифференцируем уравнение (8.1) по x, при этом считаем, что y – функция от x, получим уравнение, содержащее x, y, y'. Из полученного уравнения выражаем y'.

П р и м е р 8.1

Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной неявно: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Р е ш е н и е

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)' = 1';\ \frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y};\ y \neq 0. \tag{8.2}$$

Рассмотренное в примере 8.1 уравнение эллипса определяет в неявном виде две функции: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и $x \in [-a;\ a]$.

Если рассмотреть параметрическое уравнение эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t,\ \ 0 \le t < 2\pi, \end{cases}$$

то после подстановки x и y в формулу (8.2), получим формулу (7.3) (см. пример п. 7.1), $t \neq 0,\ t \neq \pi,\ t \neq 2\pi$.

П р и м е р 8.2

Найдем производную степенно-показательной функции $y = u(x)^{\upsilon(x)}$, где $u(x)$, $\upsilon(x)$ дифференцируемы и $u(x) > 0$.

Р е ш е н и е

$$\ln y = \ln(u(x)^{v(x)});$$

$$\ln y = \upsilon(x) \cdot \ln(u(x));$$

$$(\ln y)' = (\upsilon(x) \cdot \ln(u(x)))';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \upsilon'(x) \cdot \ln(u(x)) + \upsilon(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x);$$

$$y' = y(\upsilon'(x) \cdot \ln(u(x)) + \frac{\upsilon(x)}{u(x)} \cdot u'(x)) =$$

$$= u(x)^{\upsilon(x)} \cdot \ln(u(x)) \cdot \upsilon'(x) + \upsilon(x) \cdot u(x)^{\upsilon(x)-1} \cdot u'(x).$$

У п р а ж н е н и е 8.1. Найти производную для функции $y = (1 + x^2)^{\operatorname{tg} x}$.

У п р а ж н е н и е 8.2. Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Сравнить результат с y'_x из упражнения 7.1.

З а д а н и я

З а д а н и е 8.1

Найти производную неявной функции.

1) $x^2 + 5xy + y^2 - 7 = 0$; 2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; 3) $y^2 + xy + \sin y = 0$;

4) $e^x - e^{-y} - 2xy = 0$; 5) $\operatorname{arctg}(x + y) = x$; 6) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$;

7) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; 8) $\arcsin(xy) + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = a$;

9) $\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{x + y} = y^2$; 10) $1 + x = \frac{1}{2}\ln(2y + 3)$.

З а д а н и е 8.2

Найти производную неявной функции в заданной точке.

1) $x^2-2xy+y^2-6x+2y+5=0,\ M(5,0)$;

2) $9x^2+4xy+6y^2-8x+16y-50=0,\ M(2,1)$;

3) $y^2=x+\ln\left(\dfrac{y}{x}\right),\ M(1,1)$; 4) $e^y+xy=e,\ M(0,1)$;

5) $4^x+4^y=4^{x+y},\ M(1,0)$; 6) $\sin^2(x+y)=2xy,\ M(\pi;0)$;

7) $\operatorname{tg} y=xy,\ M(2;0)$; 8) $y^3=\dfrac{2x+y}{x+y},\ M(0,1)$;

9) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=2,\ M(e,0)$; 10) $y^2+\arcsin(x+y)=x,\ M(0,0)$.

З а д а н и е 8.3

Найти производную степенно-показательной функции:

1) $y=x^{\sqrt{x}}$; 2) $y=\sqrt[x]{x}$; 3) $y=(\operatorname{arctg} x)^x$; 4) $y=x^{\cos x}$; 5) $y=(\cos x)^x$;

6) $y=(\sin^2 x)^{\ln x}$; 7) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 8) $y=(\sin 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$;

9) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}}$; 10) $y=(\sqrt{x})^{\sin^2 x}$; 11) $y=(\ln x^2)^{\cos^2 x}$;

12) $y=(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$; 13) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; 14) $y=(\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{1-x}}$;

15) $y=(\operatorname{sh}\dfrac{x}{a})^{\sin\frac{a}{x}}$; 16) $y=(x+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

Ответы

8.1. 1) $-\dfrac{2x+5y}{5x+2y}$; 2) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$; 3) $-\dfrac{y}{2y+x+\cos y}$; 4) $\dfrac{2y-e^x}{e^{-y}-2x}$; 5) $(x+y)^2$;

6) $-\dfrac{e^{-y}\sin x+e^x\sin y}{e^{-y}\cos x+e^x\cos y}$; 7) $\dfrac{x+y}{x-y}$; 8) $\dfrac{y(x^2+y^2+\sqrt{1-x^2y^2})}{x(\sqrt{1-x^2y^2}-x^2-y^2)}$;

9) $\dfrac{(x+y)^2-2\sqrt{x-x^2}}{2\sqrt{x-x^2}(2y(x+y)^2+1)}$; 10) $2y+3$.

8.2. 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $-\dfrac{8}{9}$; 3) 0; 4) $-\dfrac{1}{e}$; 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) $\dfrac{1}{3}$; 9) 1; 10) 0.

8.3. 1) $x^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt[x]{x}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$;

3) $(\operatorname{arctg}x)^x\left(\ln\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{\operatorname{arctg}x(1+x^2)}\right)$;

4) $x^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$; 5) $(\cos x)^{x-1}(\ln\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot x)$;

6) $(\sin^2 x)^{\ln x}\cdot\dfrac{\sin^2 x\cdot\ln\sin^2 x+x\cdot\ln x\cdot\sin 2x}{x\cdot\sin^2 x}$; 7) $(\ln x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x\cdot\ln\ln x}{x^2\cdot\ln x}$;

8) $(\sin 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{2\sin x\cdot\operatorname{ctg}2x-\ln\sin 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$;

9) $(\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg}x(1+x^2)}-\dfrac{\ln\operatorname{arctg}x}{x^2}\right)$;

10) $(\sqrt{x})^{\sin^2 x}\left(\sin 2x\cdot\ln\sqrt{x}+\dfrac{\sin^2 x}{2x}\right)$;

11) $(\ln x^2)^{\cos^2 x}\left(\dfrac{2\cos^2 x}{x\cdot\ln x^2}-\sin 2x\cdot\ln\ln x^2\right)$;

12) $(\operatorname{ch})^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}(\ln\operatorname{ch}x-x\operatorname{th}x)\right)$; 13) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)$;

14) $(\operatorname{ctg}x)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(-\dfrac{\ln\operatorname{ctg}x}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{\operatorname{ctg}x\cdot\sin^2 x}\right)$;

15) $\left(\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}\right)^{\sin\frac{a}{x}}\left(\dfrac{\sin\frac{a}{x}\cdot\operatorname{cth}\frac{x}{a}}{a}-\dfrac{a\cos\frac{a}{x}\ln\operatorname{sh}\frac{x}{a}}{x^2}\right)$;

16) $(x+x^2)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1+2x}{x^2+x^3}-\dfrac{\ln(x+x^2)}{x^2}\right)$.

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть (O, x, y) – прямоугольная система координат на плоскости. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (множество точек с координатами $(x, f(x))$. Пусть $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ – точки на графике (рис. 9.1).

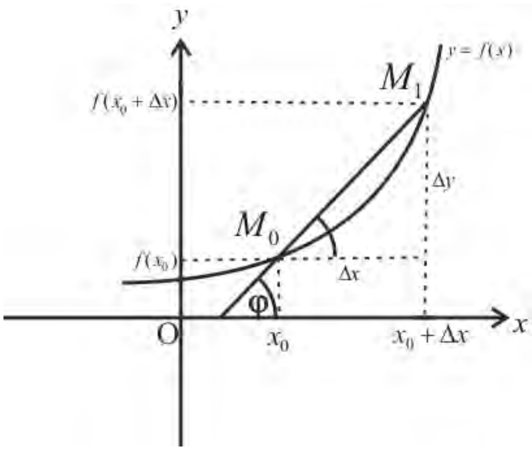


Рис. 9.1. Секущая $y = f(x_0) + \operatorname{tg}\varphi(x - x_0)$

Рассмотрим секущую на графике, проходящую через точки M_0 и M_1, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ – угловой коэффициент секущей,

и

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi. \qquad (9.1)$$

Определение 9.1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)$ – ее производная. Касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ будем называть прямую, заданную уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (9.2)$$

Из формулы (9.1) видно, что касательная – предельное положение секущей M_0M_1 при $\Delta x \to 0$.

Действительно, секущая M_0M_1 задается уравнением $y = f(x_0) + \operatorname{tg}\varphi(x - x_0)$ (уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\varphi$). Так как выполняется (9.1), то уравнение $y = f(x_0) + \operatorname{tg}\varphi(x - x_0)$ в пределе при $\Delta x \to 0$ примет вид (9.2).

Таким образом, $f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0,\ f(x_0))$, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 9.2).

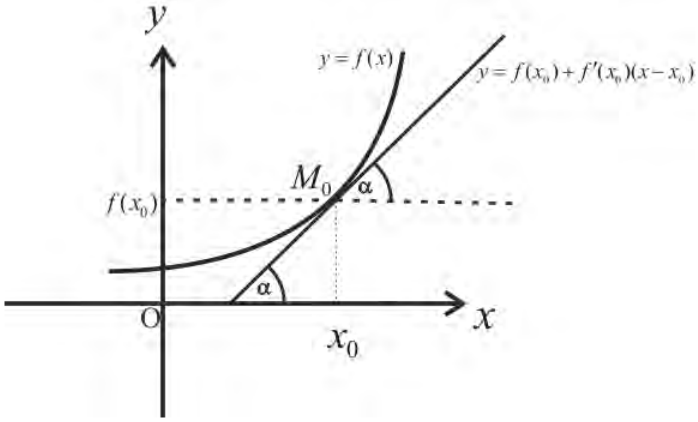


Рис. 9.2. Касательная $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Определение 9.2. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную (см. определение 6.5). Тогда касательная к графику функции в точке $(x_0,\ f(x_0))$ – вертикальная прямая $x = x_0$.

Определение 9.3. Нормалью к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$ называется прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной к графику в этой точке.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то из (9.2) следует, что уравнение нормали имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \tag{9.3}$$

(так как угловые коэффициенты k_1 и k_2 перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k_2 = -1$).

П р и м е р 9.1

$y = x^2 + 1,\ M_0\,(1,\ 2)$. Написать уравнение касательной и нормали к кривой в точке M_0.

Р е ш е н и е

$x_0 = 1;\ y(1) = 2$, поэтому точка M_0 лежит на кривой; $y' = 2x;\ y'(1) = 2$. Тогда по формуле (9.2)

$$y = 2 + 2(x - 1) = 2x \text{ – уравнение касательной.}$$

Далее по формуле (9.3)

$$y = 2 - \frac{1}{2}(x-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \text{ – уравнение нормали.}$$

П р и м е р 9.2

$y = x^2 + 1,\ M(2, 4)$. Написать уравнения касательных к кривой, проходящих через точку *M*.

Р е ш е н и е

$y(2) = 5 \neq 4$, поэтому точка *M* не лежит на кривой. По формуле (9.2)

$$y = x_0{}^2 + 1 + 2x_0(x - x_0). \tag{9.4}$$

Так как точка *M* лежит на касательной, то

$$4 = (x_0{}^2 + 1) + 2x_0(2 - x_0);\ x_0{}^2 - 4x_0 + 3 = 0; x_0 = 1;\ x_0 = 3,$$

поэтому касательные к кривой в точках $M_0(1;\ 2)$ и $M_1(3;\ 10)$ проходят через точку *M*.

Тогда из (9.4)

$$y = 2 + 2(x-1) = 2x,\ y = 10 + 6(x-3) = 6x - 8 \text{ – уравнения касательных.}$$

У п р а ж н е н и е 9.1. На кривой $y = x^3 + x^2$ найти точки, в которых касательные параллельны прямой $y = 5x + 1$.

У п р а ж н е н и е 9.2. Рассмотрим функции $y = \sqrt[3]{x^2}$; $y = \sin\sqrt[3]{x^2}$; $y = \sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x^2}$ (см. упражнение 6.6). Написать уравнение касательной и нормали к графикам этих функций в точке $M_0(0;\ 0)$.

Рассмотрим точки $M_0(x_0,\ f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x))$ на графике функции $y = f(x)$. Тогда по формуле (6.6)

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x,$$

а по формуле (9.2)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x \text{ –}$$

приращение касательной, когда приращение независимой переменной *x* равно Δx, поэтому значение $\mathrm{d}f(x_0)$ равно приращению касательной, рис. 9.3.

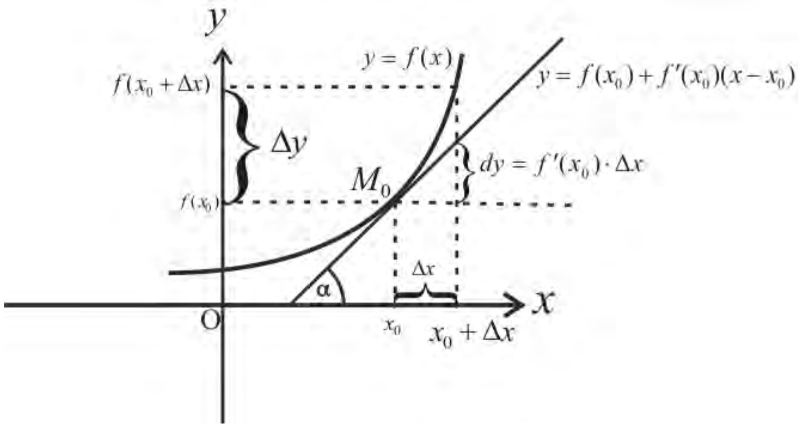


Рис. 9.3. Геометрический смысл дифференциала

Приращение Δy функции $y = f(x)$ отличается от $\mathrm{d}x$ на $o(\Delta x)$ (см. формулу 6.4), то есть

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \tag{9.5}$$

П р и м е р 9.3

$y = x^2$; $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}1$. Рассмотрим точки $M_0(1;\ 1)$ и $M_1(1{,}1;\ 1{,}21)$.
Найти $\mathrm{d}y(x_0)$ и Δy при переходе от M_0 к M_1.

Р е ш е н и е

$y' = 2x$; $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}y(x_0) = 2\mathrm{d}x$, если $\Delta x = 0{,}1$, то
$\mathrm{d}y(x_0) = 2\mathrm{d}x = 2\Delta x = 0{,}2$;
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1{,}21 - 1 = 0{,}21$.

В приближенных вычислениях Δf заменяют на $\mathrm{d}f$ и получают формулу

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{9.6}$$

П р и м е р 9.4

Вычислить приближенно $\sqrt[3]{30}$.

Р е ш е н и е

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27 + 3} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}}.$$

Пусть

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + x};\ x_0 = 0;\ \Delta x = \frac{1}{9}.$$

Тогда

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}};\ f'(0)=\frac{1}{3}.$$

По формуле (9.6)

$$f\left(\frac{1}{9}\right)=f(0)+f'(0)\cdot\Delta x=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{28}{27}.$$

Поэтому $\sqrt[3]{30}\approx 3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}=3\cdot f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{28}{9}$.

Пусть $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ – ее производная.} \qquad (9.7)$$

Числитель дроби $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ – приращение функции $f(x)$. Сама дробь задает приращение функции на единицу приращения независимой переменной x (скорость приращения функции). Поэтому, согласно (9.7), $f'(x_0)$ – мгновенная скорость приращения функции. Если тело движется прямолинейно и x задает время, а $f(x)$ – путь, пройденный телом за время t, то $f'(x_0)$ – мгновенная скорость в момент времени x_0.

Пример 9.5

Пусть $y=x^2,\ x_0=1,\ x_1=1{,}1,\ \Delta x=0{,}1$ (см. пример 9.3). Тогда

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1{,}1)-f(1)=(1{,}1)^2-1^2=0{,}21$ – путь, пройденный телом на промежутке времени $[1;1{,}1]$;

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0{,}21}{0{,}1}=2{,}1$ – средняя скорость движения на этом промежутке;

$y'(x_0)=2x_0=2$ – мгновенная скорость в момент времени $x_0=1$.

Пусть точка $M(x,y,z)$ движется в пространстве, и траектория ее движения

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t); \\ z=z(t), \end{cases} \qquad (9.8)$$

где t – время,

или $$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}, \qquad (9.9)$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор точки M.

Концы вектора (9.9) задают траекторию движения (9.8) – годограф вектор-функции $\vec{r}(t)$.

Определение 9.4. Производной векторной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется вектор

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ задает мгновенную скорость движения точки при $t = t_0$;

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k};$$

$\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к кривой (9.8) в точке $M(x(t),\ y(t),\ z(t))$.

П р и м е р 9.6

$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \geq 0$ – траектория движения точки,

$\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}$.

Найдем $\vec{r}'(t)$ при $t = 0,\ t = \dfrac{\pi}{4}$.

Р е ш е н и е

$$\vec{r}'(t) = -\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j},$$

$$\vec{r}'(0) = \vec{j};\quad \left|\vec{r}'(0)\right| = 1,\ \vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j};\quad \left|\vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 1,\ \text{рис. 9.4.}$$

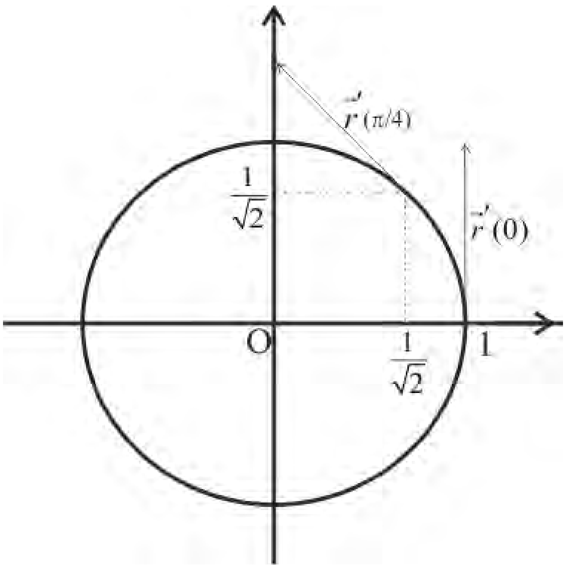


Рис. 9.4

У п р а ж н е н и е 9.3

Пусть винтовая линия

$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t, \ \ t \ge 0 \\ z = t; \end{cases}$$ – траектория движения точки $M(x,\ y,\ z)$.

Найти $\vec{r}'(t)$ при $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{4}$, $t = \dfrac{3\pi}{4}$.

З а д а н и я

З а д а н и е 9.1

Составить уравнения касательной и нормали линии, заданной уравнением, в указанной точке *M*.

1) $y = x^2 + 4x - 26,\ M(4,\ 6)$; 2) $y = 3x - x^2 + 7,\ M(5,\ -3)$;

3) $y = 2x^3 + 3x - 9,\ M(1,\ -4)$; 4) $y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1,\ M(0,\ 1)$;

5) $3x^2 + 4xy - 4x - 8y = 0,\ M\left(1,\ -\dfrac{1}{4}\right)$;

6) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 3y + 15 = 0,\ M(-2,\ 1)$;

7) $x^2 + y^2 = 9,\ M(0,\ 3)$;

8) $y^2 = 8x,\ M(2,\ 4)$;

9) $y = \operatorname{tg} 2x$ в начале координат;

10) $y = e^{1-x^2}$ в точках пересечения с прямой $y = 1$.

З а д а н и е 9.2

Составить уравнения касательной и нормали к линии, заданной параметрическими уравнениями, при указанном значении параметра *t*.

1) $x = t,\ y = t^2,\ t = 2$;

2) $x = t + 1,\ y = \dfrac{1}{t-2},\ t = 1$;

3) $x = t^3,\ y = t^4,\ t = 1$;

4) $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t),\ t = \dfrac{\pi}{2}$.

З а д а н и е 9.3

Найти угол, под которым пересекаются линии.

1) $11x^2 - 16xy - y^2 - 26x + 22y + 10 = 0,\ x = 1;$

2) $x^2 + 4xy + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0,\ x - y + 1 = 0;$

3) $x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0,\ x + y - 2 = 0;$

4) $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25, (x+2)^2 + (y-6)^2 = 32$.

З а д а н и е 9.4

В какой точке касательная к линии $y = x^3 - 11x - 15$ перпендикулярна к прямой $2x + 2y - 7 = 0$?

З а д а н и е 9.5

В какой точке касательная к линии $y = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ параллельна прямой $3x - y - 5 = 0$?

З а д а н и е 9.6

В какой точке касательная к линии $y = x^2 + 4x - 5$ образует с прямой $3x - 2y + 7 = 0$ угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$?

З а д а н и е 9.7

В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

З а д а н и е 9.8

В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c так, чтобы она касалась прямой $y = 2x - 1$ в точке $x = 1$.

З а д а н и е 9.9

Точка движется по прямой $y = 2x + 3$ так, что абсцисса ее возрастает с постоянной скоростью $\upsilon = 3$. С какой скоростью изменяется ордината?

Задание 9.10

Одна сторона прямоугольника имеет постоянную величину $a = 10$ см, а другая – b – изменяется, возрастая с постоянной скоростью 4 см/с. С какой скоростью растут диагональ и площадь прямоугольника в тот момент, когда b = 30 см?

Задание 9.11

В какой точке параболы $y^2 = 18x$ ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы?

Задание 9.12

Точка движется по параболе $y = 7 - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется с течением времени t по закону $x = t^3$. С какой скоростью изменяется ордината?

Задание 9.13

Вычислить приближенно:

1) $\cos 61^\circ$; 2) $\lg 10,21\ (\ln(10) \approx 2,303)$; 3) $\sqrt[5]{33}$; 4) $\operatorname{arctg} 1,05$.

Задание 9.14

Сторона квадрата равна 8 см. Насколько приблизительно увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить: 1) на 1 см; 2) 0,1 см?

Задание 9.15

Радиус R изменяется на величину ΔR. Вычислить, на сколько изменяются:

1) площадь круга;

2) объем шара,

и сравнить их с точными значениями.

Ответы

9.1. 1) $12x - y - 42 = 0$ – касательная, $x + 12y - 76 = 0$ – нормаль;

2) $7x + y - 32 = 0$ – касательная,

$x - 7y - 26 = 0$ – нормаль;

3) $9x - y - 13 = 0$ – касательная,

$x + 9y + 35 = 0$ – нормаль;

4) $5x + y - 1 = 0$ – касательная,

$x - 5y + 5 = 0$ – нормаль;

5) $x - 4y - 2 = 0$ – касательная,

$16x + 4y - 15 = 0$ – нормаль;

6) $2x-y+5=0$ – касательная;

$x+2y=0$ – нормаль;

7) $y=3$ – касательная,

$x=0$ – нормаль;

8) $x-y+2=0$ – касательная,

$x+y-6=0$ – нормаль;

9) $y-2x=0$ – касательная,

$2y+x=0$ – нормаль;

10) 1) $2x+y-3=0$ – касательная,

$x-2y+1=0$ – нормаль в точке M_1 (1, 1);

2) $2x-y+3=0$ – касательная,

$x+2y-1=0$ – нормаль в точке M_2 (–1, 1);

9.2. 1) $4x-y-4=0$ – касательная,

$x+4y-18=0$ – нормаль;

2) $x+y-1=0$ – касательная,

$x-y-3=0$ – нормаль;

3) $4x-3y-1=0$ – касательная,

$3x+4y-7=0$ – нормаль;

4) $x-y-\pi+4=0$ – касательная,

$x+y-\pi=0$ – нормаль.

9.3. 1) $\varphi_1=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{10}{11}\right)$;

2) $\varphi_1=\varphi_2=\operatorname{arctg}1{,}5$; 3) $\varphi_1=\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$; 4) $\varphi_1=\varphi_2=\operatorname{arctg}7$.

9.4. $M(-2,-1)$; $N(2,-29)$.

9.5. $M(3,-3)$; $N\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{41}{27}\right)$.

9.6. $M\left(-\dfrac{9}{2},-\dfrac{11}{4}\right)$. 9.7. $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{17}{4}\right)$. 9.8. $b=c=0$. 9.9. 6.

9.10. Диагональ растет со скоростью приблизительно 3,8 см/с, площадь – со скоростью 40 см^2/с.

9.11. $x=\dfrac{9}{8}$, $y=\dfrac{9}{2}$.

9.12. $-6t^5$.

9.13. 1) $0{,}485$; 2)$1{,}009$; 3) $2{,}0125$; 4) $\dfrac{\pi}{4}+0{,}025\approx 0{,}81$.

9.14. 1) 16; 2) 1,6.

9.15. 1) $\Delta S\approx \mathrm{d}S=2\pi R\Delta R$; 2) $\Delta V\approx \mathrm{d}V=4\pi R^2\Delta R$.

10. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение 10.1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема $\forall x \in R$ и $y' = f'(x)$ – ее производная. Предположим, что $f'(x)$ в свою очередь дифференцируема и $(f'(x))'$ – ее производная. Она называется второй производной функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Таким образом:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Аналогично,

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Другое обозначение для $f''(x)$: $f^{(2)}(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$; $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

П р и м е р 10.1

$y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$. Найти y''.

Р е ш е н и е

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (см. упражнение 6.4).

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}.$$

П р и м е р 10.2

Найти k-ю производную функции $y = a^x$.

Р е ш е н и е

$y' = a^x \ln 2$; $y'' = (a^x \ln 2)' = a^x \ln^2 2, \ldots$,

$y^{(k-1)} = a^x \ln^{k-1} 2$; $y^{(k)} = (a^x \ln^{k-1} 2)' = a^x \ln^k 2$.

Таким образом $(a^x)^{(k)} = a^x \ln^k a$.

У п р а ж н е н и е 10.1. Проверить, что

$$(x^\alpha)^{(k)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1) x^{\alpha - k};$$

$\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right);$

$\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi k}{2}\right).$

Упражнение 10.2. $y = \ln x$; $y = \ln(1+x)$. Найти $y^{(k)}$.

Пример 10.3

Найти y'' для функции $y = y(x)$, заданной неявно:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение

$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$; $y \neq 0$ (см. пример 8.1).

$$y'' = \left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}\right)' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = \left|\text{подставим } y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}\right| =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{b^2}{y} \cdot \frac{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}}{y^2} = -\frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{1}{y^3}.$$

Упражнение 10.3. Найти y'' для функции $y = y(x)$, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически в виде

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t) \ \text{(см. п.7).} \end{cases}$$

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$. Тогда (см. п. 7.2)

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} - \end{cases}$$

первая производная функции $y = y(x)$.

Рассуждая аналогично п. 7:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t(t)} \text{ – вторая производная функции.} \end{cases} \qquad (10.1)$$

При этом

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^2},$$

поэтому формула (10.1) перепишется в виде

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y''_x = \dfrac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}. \end{cases}$$

П р и м е р 10.4

Найти y'' для функции $y = y(x)$, заданной параметрически в виде

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \quad 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Р е ш е н и е

По формуле (7.3)

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

Далее, по формуле (10.1)

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y''_x = \dfrac{\left(-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'_t}{(a\cos t)'} \end{cases} = \begin{cases} x = a\cos t; \\ y''_x = -\dfrac{b}{a^2}\cdot\dfrac{1}{\sin^3 t}. \end{cases}$$

Упражнение 10.4. Проверить совпадение y'' для $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ – верхняя половина эллипса, с формулами из примеров 10.3 и 10.4.

Упражнение 10.5. Найти y''_x для функции $\begin{cases} x=a\operatorname{ch}t; \\ y=b\operatorname{sh}t, \ t>0. \end{cases}$

Теорема 10.1. Пусть Функции $u=u(x)$ и $\upsilon=\upsilon(x)$ n раз дифференцируемы, тогда

$$(u+\upsilon)^{(n)}=u^{(n)}+\upsilon^{(n)}. \tag{10.2}$$

$$(u\cdot\upsilon)^{(n)}=u^{(n)}\upsilon+C_n^1u^{(n-1)}\upsilon'+C_n^2u^{(n-2)}\upsilon''+\ldots+C_n^{n-1}u'\upsilon^{(n-1)}+u\upsilon^{(n)} \ – \tag{10.3}$$

формула Лейбница, где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$; в частности:

$$(u\upsilon)''=u''\upsilon+2u'\upsilon'+u\upsilon'',$$

$$(u\upsilon)'''=u'''\upsilon+3u''\upsilon'+3u'\upsilon''+u\upsilon'''.$$

Пример 10.5

$y=2^x(x^2+x)$. Найти $y^{(6)}$.

Решение

По формуле (10.3):

$$(2^x(x^2+x))^{(6)}=(2^x)^{(6)}(x^2+x)+6(2^x)^{(5)}(x^2+x)'+15(2^x)^{(4)}(x^2+x)'',$$

остальные слагаемые равны 0.

Далее

$$(2^x)^{(4)}=2^x\ln^4 2;\quad (2^x)^{(5)}=2^x\ln^5 2;\quad (2^x)^{(6)}=2^x\ln^6 2,$$

поэтому

$$(2^x(x^2+x))^{(6)}=2^x\ln^4 2(\ln^2 2(x^2+x)+6\ln 2(2x+1)+30).$$

Определение 10.2. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема и $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ – ее дифференциал. Зафиксируем $\mathrm{d}x$ и будем рассматривать $\mathrm{d}y$ как функцию одной переменной x. Дифференциал от дифференциала $\mathrm{d}y$ функции $y=f(x)$ будем называть вторым дифференциалом этой функции и обозначать d^2y. Таким образом:

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y). \tag{10.4}$$

Аналогично

$$\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} y). \qquad (10.5)$$

Преобразуем формулы (10.4) и (10.5):

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(f'(x))\mathrm{d}x = f''(x)\mathrm{d}x^2.$$

То есть

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)\mathrm{d}x^2,$$

$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$

При вычислении $\mathrm{d}(f'(x))$ приращение независимой переменной берем равным первоначальному приращению dx.

П р и м е р 10.6

$y = \sin(x^2)$. Найти $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 y$.

Р е ш е н и е

$y' = \cos(x^2)\cdot 2x,\ y'' = -\sin(x^2)4x^2 + 2\cos(x^2);$

$\mathrm{d}y = \cos(x^2)2x\mathrm{d}x;$

$\mathrm{d}^2 y = (-\sin(x^2)\cdot 4x^2 + 2\cos(x^2))\mathrm{d}x^2.$

Свойство инвариантности верное для первого дифференциала не выполняется для второго.

Например, для функции $y = \sin(x^2)$ из примера 10.6 имеем $u = x^2$;

$$y = \sin u;\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}^2 u = 2\mathrm{d}x^2.$$

Тогда для первого дифференциала

$$\mathrm{d}y = \cos(x^2)2x\mathrm{d}x = \cos u\mathrm{d}u,$$

но

$$\mathrm{d}^2 y = -\sin(x^2)4x^2\mathrm{d}x^2 + 2\cos(x^2)\mathrm{d}x^2 =$$
$$-\sin u\mathrm{d}u^2 + \cos u(2\mathrm{d}x^2) = -\sin u\mathrm{d}u^2 + \cos u\mathrm{d}^2 u.$$

Таким образом

$$\mathrm{d}^2 u = -\sin u\mathrm{d}u^2 + \cos u\mathrm{d}^2 u \neq -\sin u\mathrm{d}u^2 = \mathrm{d}^2(\sin u).$$

Если $u = u(x)$, то для функции $y = y(u(x))$ верна формула

$$\mathrm{d}^2 y = y''_u(u)\mathrm{d}u^2 + y'_u(u)\mathrm{d}^2 u\,.$$

Если функции $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ n раз дифференцируемы, то для $d^n(u+\upsilon)$ и $d^n(u\upsilon)$ верны формулы, аналогичные формулам (10.2), (10.3). В частности:

$$\mathrm{d}(u+\upsilon) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}\upsilon\,,$$

$$\mathrm{d}^2(u+\upsilon) = \mathrm{d}^2 u + \mathrm{d}^2\upsilon\,,$$

$$\mathrm{d}(u\upsilon) = u\mathrm{d}\upsilon + \upsilon\mathrm{d}u\,,$$

$$\mathrm{d}^2(u\upsilon) = u\mathrm{d}^2\upsilon + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}\upsilon + \upsilon\mathrm{d}^2 u\,.$$

З а д а н и я

З а д а н и е 10.1

Найти y' и y'' для функции $y = y(x)$, заданной неявно:

1) $y^2 = 8x$; 2) $y = x + \operatorname{arctg} y$; 3) $y^2 = 5x - 4$; 4) $y^2 - x = \cos y$;
5) $3x + \sin y = 5y$; 6) $\operatorname{tg} y + 3x = 5y$; 7) $xy = y^3$; 8) $y = e^y + 4x$;
9) $\ln y - \dfrac{y}{x} = 7$; 10) $4\sin^2(x+y) = x$.

З а д а н и е 10.2

Найти y' и y'' параметрически заданной функции:

1) $\begin{cases} x = 2t+3, \\ y = 3t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+2}, \\ y = \dfrac{t^2}{(t+2)^2}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = t^2+1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2\ln t. \end{cases}$

З а д а н и е 10.3

Для заданной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$.

1) $y = x\cos 2x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{12}$; 2) $y = \ln(x^2 - 4),\ x_0 = 3$;

3) $y = 2^{x^2},\ x_0 = 1$; 4) $y = x\,\mathrm{arctg}\,x,\ x_0 = 2$;

5) $y = (4x-5)^4,\ x_0 = 1$; 6) $y = \sin(x^3 + \pi),\ x_0 = \sqrt[3]{\pi}$;

7) $y = x^4 \ln x,\ x_0 = 1$; 8) $y = e^x \cos x,\ x_0 = 0$.

З а д а н и е 10.4

Найти $d^2 y$:

1) $y = x^3 \ln 5x$; 2) $y = (x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x$; 3) $y = e^{5x}\cos 3x$;

4) $y = \sqrt{\arcsin 2x} + (\mathrm{arctg}\,x)^2$; 5) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 6) $y = 4^{x^3}$;

7) $y = e^{-\sin^4 5x}$; 8) $y = \mathrm{ctg}(x^3 + x^2)$; 9) $y = \mathrm{arctg}\ln x + \ln \mathrm{arctg}\,x$;

10) $y = \mathrm{ctg}\,x + \mathrm{cosec}\,x$.

З а д а н и е 10.5

Доказать, что заданная функция $y = f(x)$ удовлетворяет заданному уравнению:

1) $y = e^x \cos x,\ y'' - 2y' + 2y = 0$;

2) $y = \cos e^x + \sin e^x,\ y'' - y' + ye^{2x} = 0$;

3) $y = e^x \sin x,\ y''' - 2y'' + 2y' = 0$;

4) $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x},\ xy' + xy^2 + y^2 = 0$;

5) $y = \arcsin^2 x + 3\arcsin x + 5,\ y''(1 - x^2) - xy' = 2$;

6) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$

$36y''(y - \sqrt{3x}) = x + 3$;

7) $y = e^x + 2e^{2x},\ y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$;

8) $y = \mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x,\ y'' - y = 0$;

9) $y = \cos^4\left(1 - \dfrac{x}{4}\right),\ 3y'^2 = 4yy'' + y^2$;

10) $1 + x = \dfrac{1}{2}\ln(2y - 3),\ y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$.

Ответы

10.1. 1) $y'=\frac{4}{y},\ y''=-\frac{16}{y^3}$; 2) $y'=\frac{1+y^2}{y^2},\ y''=-\frac{2+2y^2}{y^5}$;

3) $y'=\frac{5}{2y},\ y''=-\frac{25}{4y^3}$; 4) $y'=\frac{1}{2y+\sin y},\ y''=-\frac{2+\cos y}{(2y+\sin y)^3}$;

5) $y'=\frac{3}{5-\cos y},\ y''=-\frac{9\sin y}{(5-\cos y)^3}$;

6) $y'=\frac{3\cos^2 y}{5\cos^2 y-1},\ y''=\frac{9\sin 2y\cdot\cos^2 y}{(5\cos^2 y-1)^3}$;

7) $y'=\frac{y}{3y^2-x},\ y''=-\frac{2xy}{(3y^2-x)^3}$; 8) $y'=\frac{4}{1-e^y},\ y''=\frac{16e^y}{(1-e^y)^3}$;

9) $y'=\frac{y^2}{xy-x^2},\ y''=\frac{x^2y^3-2x^3y^2}{(xy-x^2)^3}$;

10) $y'=\frac{1-4\sin(2x+2y)}{4\sin(2x+2y)},\ y''=-\frac{\cos(2x+2y)}{8\sin^3(2x+2y)}$.

10.2. 1) $y'_x=\frac{9}{2}t^2,\ y''_{xx}=\frac{9}{2}t$; 2) $y'_x=-\frac{3}{2},\ y''_{xx}=0$;

3) $y'_x=-\frac{4t}{t+2},\ y''_{xx}=8$; 4) $y'_x=2\sqrt{t^2-1},\ y''_{xx}=2$;

5) $y'_x=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t},\ y''_{xx}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$; 6) $y'_x=\frac{1}{4t^4},\ y''_{xx}=-\frac{1}{4t^8}$;

7) $y'_x=2t,\ y''_{xx}=2+2t^2$; 8) $y'_x=-t,\ y''_{xx}=-\sqrt{1-t^2}$;

9) $y'_x=-e^{-6t},\ y''_{xx}=2e^{-9t}$; 10) $y'_x=t^2(2\ln t+1),\ y''_{xx}=4t^2(\ln t+1)$.

10.3. 1) $\frac{\pi-18\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{252}{125}$; 3) $6\ln^2 4+2\ln^3 4$; 4) $-\frac{16}{125}$; 5) -1536;

6) $6-27\pi^2$; 7) 26; 8) -2.

10.4. 1) $\mathrm{d}^2y=(6x\ln 5x+25x)\mathrm{d}x^2$;

2) $\mathrm{d}^2 y = \left(2\,\mathrm{arctg}\, x + \dfrac{2x}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x^2$; 3) $\mathrm{d}^2 y = e^{5x}(16\cos 3x - 30\sin 3x)\mathrm{d}x^2$;

4) $\mathrm{d}^2 y = \left(\dfrac{4x\arcsin 2x - \sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{\arcsin^3 2x \cdot (1-4x^2)^3}} + \dfrac{2-4x\,\mathrm{arctg}\, x}{(1+x^2)^2} \right) \mathrm{d}x^2$;

5) $\mathrm{d}^2 y = -\dfrac{x\mathrm{d}x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 6) $\mathrm{d}^2 y = 4^{x^3} \ln 4 (9x^4 \ln 4 + 6x)\mathrm{d}x^2$;

7) $\mathrm{d}^2 y = 100 e^{-\sin^4 5x} \sin^2 5x (4\sin^4 5x \cdot \cos^2 5x - 4\cos^2 5x + 1)\mathrm{d}x^2$;

8) $\mathrm{d}^2 y = \dfrac{2\cos(x^3+x^2)(3x^2+2x)^2 - \sin(x^3+x^2)(6x+2)}{\sin^3(x^3+x^2)} \mathrm{d}x^2$;

9) $\mathrm{d}^2 y = -\left(\dfrac{(\ln x + 1)^2}{x^2(1+\ln^2 x)^2} + \dfrac{1+2x\,\mathrm{arctg}\, x}{\mathrm{arctg}^2 x (1+x^2)^2} \right) \mathrm{d}x^2$; 10) $d^2 y = \dfrac{(1+\cos x)^2}{\sin^3 x} dx^2$.

11. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 11.1. Пусть $X \subset R$ – подмножество во множестве действительных чисел *R*. *X* называется ограниченным сверху (снизу), если $\exists$ такое число *M*(*m*), что выполняется неравенство $x \le M$ $(x \ge m)$ $\forall x \in X$. При этом *M*(*m*) называется верхней (нижней) гранью множества *X*. Наименьшая из всех возможных верхних граней множества *X* называется точной верхней гранью множества *X* и обозначается $\sup X$ (латинское supremum (супремум) – наивысшее). Наибольшая из всех возможных нижних граней множества *X* называется точной нижней гранью множества *X* и обозначается $\inf X$ (латинское infimum (инфимум) – наинизшее).

Пример 11.1

$X_1 = (a, b)$, $\inf X_1 = a$, $\sup X_1 = b$,
$X_2 = [a, b)$, $\inf X_2 = a$, $\sup X_2 = b$, рис. 11.1.

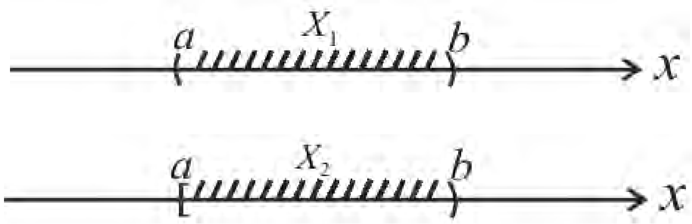


Рис. 11.1

Для множества X_1

$$\inf X_1 \notin X_1, \ \sup X_1 \notin X_1.$$

Для множества X_2

$$\inf X_2 \in X_2, \ \sup X_2 \notin X_2.$$

Аксиома Вейерштрасса. Всякое непустое ограниченное множество $X \subset R$ имеет конечные точные верхние и нижние грани $\sup X$ и $\inf X$.

Для функции $y = f(x)$, $x \in X \subset R$, $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ и $\inf\limits_{x \in X} f(x)$ определяются, как $\sup f(X)$ и $\inf f(X)$ – множества значений $f(X)$ функции $y = f(x)$ при $x \in X$.

П р и м е р 11.2

$f(x)=1-x^2,\ x\in(-1;1);\ \inf\limits_{x\in(-1;1)} f(x)=0;\ \sup\limits_{x\in(-1;1)} f(x)=1.$

При этом $\inf\limits_{x\in(-1;1)} f(x)\notin f(X)$; $\sup\limits_{x\in(-1;1)} f(x)\in f(X)$, рис 11.2.

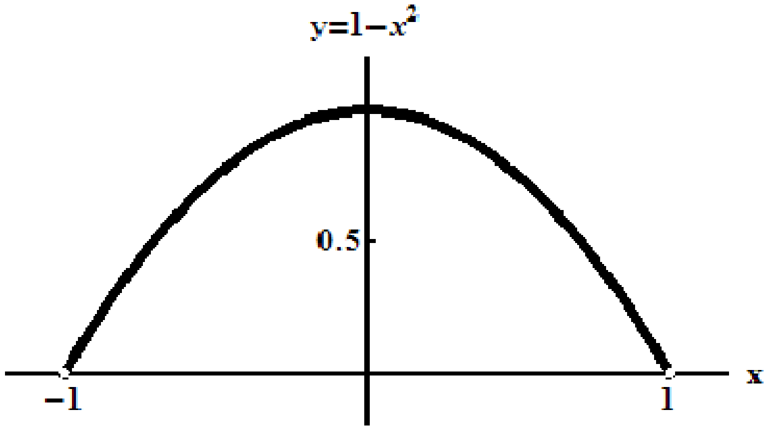


Рис.11.2

Теорема 11.1. (теорема Вейерштрасса). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своих точных верхней и нижней граней, то есть $\exists\, c_1,\ c_2\in[a,b]$ такие, что

$$f(c_1)=\sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ f(c_2)=\inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)\ .$$

При этом

$$f(c_1)=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ f(c_2)=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)\ .$$

Если в условии теоремы 10.1 рассматривать не отрезок, а интервал (a,b) или полуинтервал, то она не выполняется.

Например, для $y=f(x)$ из примера 11.2

$$f(0)=1=\max\limits_{x\in(-1;1)} f(x)=\sup\limits_{x\in(-1;1)} f(x), 0=\inf\limits_{x\in(-1;1)} f(x)\notin f(X)\Rightarrow f(x)$$

не имеет минимума на множестве $(-1,1)$.

У п р а ж н е н и е. Найти $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in X} f(x)$.

а) $y=\operatorname{arctg}|x|,\ x\in R$;

б) $y=\dfrac{x^2}{1+x^4},\ x\in(-1;1)$;

в) $y=3\sin x+4\cos x,\ x\in R$;

г) $y=\sin x-\cos x,\ x\in[0;\pi]$;

д) $y=\cos^2 x+\cos x-2,\ x\in(0;\pi)$;

е) $y=\cos^2 x+4\cos x-5,\ x\in(0;\pi)$.

Найти $\min\limits_{x\in X} f(x)$; $\max\limits_{x\in X} f(x)$ на этих множествах.

Теорема 11.2. (теорема Больцано–Коши). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то $\exists\, c\in(a,b)$, такая, что $f(c)=0$.

П р и м е р 11.3

Проверить, что уравнение $\cos x=x$ имеет корень на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, рис. 11.3.

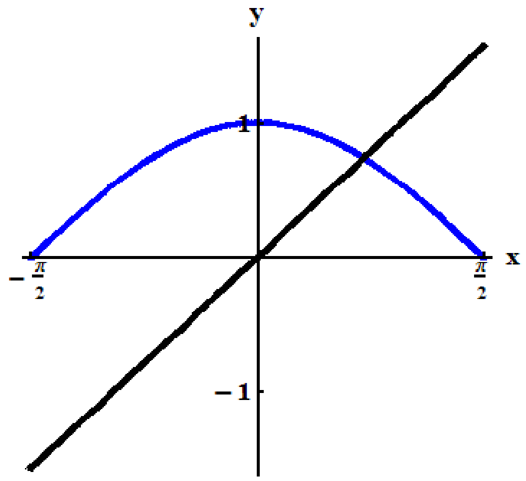


Рис. 11.3. Графики функций $y=\cos x,\ y=x,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Р е ш е н и е

Функция $y=\cos x-x$ непрерывна $\forall x\in R$.

$$y(0)=1;\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

по теореме 2 $\exists\, c\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, такая что $f(c)=0$.

Задания

Задание 11.1

Доказать, что уравнение имеет по меньшей мере один действительный корень в указанном промежутке.

1) $x^4+1{,}025x-0{,}97=0,\ [-2,\ -1]$;

2) $x^4-3x^2+2x-1=0,\ [1,\ 2]$;

3) $8^x-3\cdot 2^x-16=0,\ [0,\ 2]$;

4) $\sin x-x+1=0,\ [0,\ \pi]$;

5) $x^3+4x-6=0,\ [1,\ 2]$;

6) $x^3-3x+1=0,\ [1,\ 2]$.

Задание 11.2

Доказать ограниченность функции на заданном промежутке.

1) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2+1}{2x}+2^{\sin x}-x^2, [1,\ 5]$;

2) $y=5^{x^2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}+(x^2-x+2)\sin\sqrt{3+x^2},\ [0,\ 100]$;

3) $y=\dfrac{1+x}{1+x^2},\ [0,+\infty)$;

4) $y=x\sin\dfrac{1}{x},\ (-\infty,+\infty)$;

5) $y=\operatorname{arctg}2^x,\ (-\infty,+\infty)$;

6) $y=xe^{-x},\ (0,+\infty)$.

Задание 11.3

Ограничены ли следующие функции.

1) $y=x^2$ на $[-5,\ 10]$; 2) $y=x^3$ на $(-\infty,\ +\infty)$;

3) $y=x\cos\dfrac{1}{x}$ на $(-\infty,\ +\infty)$; 4) $y=\begin{cases}2^{\frac{1}{x-1}} & \text{при } x\neq 1\\ 0 & \text{при } x=1;\end{cases}$ на $(0,\ 2)$;

5) $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ на $(0,1)$?

З а д а н и е 11.4

Найти точные грани функции:

1) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ на $(0,+\infty)$;

2) $f(x)=x^2$ на $\left[-5,\ 10\right]$;

3) $f(x)=\operatorname{arctg} 2^x$ на $(-\infty,+\infty)$;

4) $f(x)=\sin x+\cos x$ на $\left[0,\ \pi\right]$;

5) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$ на $(0,1)$;

6) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & \text{при } -1\le x\le 0, \\ -x^2 & \text{при } 0<x\le 1. \end{cases}$

Ответы

11.3. 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) нет; 5) да.

11.4. 1) $\inf\limits_{[0,+\infty)} f(x)=f(0)=0,\ \sup\limits_{[0,+\infty)} f(x)=f(1)=1;$

2) $\inf\limits_{[-5,10]} f(x)=f(0)=0,\ \sup\limits_{[-5,10]} f(x)=f(10)=100;$

3) $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} f(x)=0,\ \sup\limits_{(-\infty,+\infty)} f(x)=\dfrac{\pi}{2};$

4) $\inf\limits_{[0,\pi]} f(x)=f(\pi)=-1,\ \sup\limits_{[0,\pi]} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2};$

5) $\inf\limits_{(0,1)} f(x)=0,\ \sup\limits_{(0,1)} f(x)=\dfrac{1}{2};$

6) $\inf\limits_{[-1,1]} f(x)=f(1)=-1,\ \sup\limits_{[-1,1]} f(x)=f(0)=1.$

12. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 12.1. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в точке x_0, если $\exists$ окрестность $O_\delta(x_0)$ этой точки такая, что $\forall x \in O_\delta(x_0)$:

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0);$$

$$x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x).$$

Аналогично определяется убывающая в точке x_0 функция.

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если $\exists$ окрестность $O_\delta(x_0)$ этой точки такая, что $\forall x \in O_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$:

$$f(x) < f(x_0) \ \ (f(x) > f(x_0)). \tag{12.1}$$

Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума. Если знаки неравенств в соотношениях (12.1) нестрогие, то говорят о нестрогом локальном максимуме (минимуме).

Теорема 12.1. (теорема Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0, дифференцируема в этой точке и имеет в ней локальный экстремум. Тогда

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство

Докажем теорему, например, для случая, когда x_0 – локальный максимум:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, пусть $x > x_0$, тогда (см. определение 12.1)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0. \tag{12.2}$$

Пусть $x < x_0$, тогда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0. \tag{12.3}$$

Из (12.2) и (12.3) следует, что $f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Равенство $f'(x_0)=0$ в теореме 12.1 означает, что касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0,\ f(x_0))$ горизонтальна.

Теорема 12.2. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)>0$ ($f'(x_0)<0$). Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0.

Доказательство

Докажем для случая $f'(x_0)>0$. По формуле (6.4)

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\Rightarrow$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\Rightarrow$$

$\exists$ окрестность $O_\delta(x_0)$, такая что

$$\forall x=x_0+\Delta x\in O_\delta(x_0):\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0.$$

Если $\Delta x<0\Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$, а для $\Delta x>0\Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$, следовательно условия возрастания функции в точке (см. определение 12.1) выполнены.

Теорема 12.3 (теорема Ролля). Пусть функция $y=f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a,\,b]$;

2) дифференцируема на интервале $(a,\,b)$;

3) $f(a)=f(b)$.

Тогда $\exists\, c\in(a,\,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Доказательство

По теореме 11.1 $\exists\, c_1,\ c_2\in[a,\,b]$ такие, что

$$M=f(c_1)=\max_{x\in[a,\,b]}(f(x)),\ \ m=f(c_2)=\min_{x\in[a,\,b]}(f(x))\ .$$

Если $M=m$, то $f(x)$ – постоянная функция $\forall x\in[a,\,b]$, и поэтому $f'(x)=0\ \ \forall x\in[a,\,b]$.

Если $M\neq m$, то либо max, либо min достигается на (a,b). Пусть, например, $c_1\in(a,\,b)$. Тогда точка c_1 удовлетворяет условиям теоремы 12.1, и поэтому $f'(c_1)=0$, что и требовалось доказать.

Упражнение 12.1. Проверить, удовлетворяют ли условиям теоремы Ролля функции $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=|x|$, $y=\sin\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x^2}$, $x\in[-1,1]$ (см. упражнение 6.6).

Из теоремы Ролля следует, что между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции имеется хотя бы один корень ее производной.

Теорема 12.4 (теорема Лагранжа).

Пусть функция $y=f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда $\exists\, c\in(a,b)$ такая, что

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (12.4)$$

Доказательство

Рассмотрим функцию $y(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $y(x)$ – непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b); $y(a)=f(a)$; $y(b)=f(a)$. Поэтому $y(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 12.3, то есть $\exists\, c\in(a,b)$ такая, что $y'(c)=0$; $y'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, что и требовалось доказать.

Угловой коэффициент прямой L, проходящей через точки $(a,\ f(a)),(b,\ f(b))$, равен $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Поэтому формула (12.4) означает, что $\exists\, c\in(a,b)$ такая, что касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $(c,\ f(c))$ параллельна прямой L, рис. 12.1.

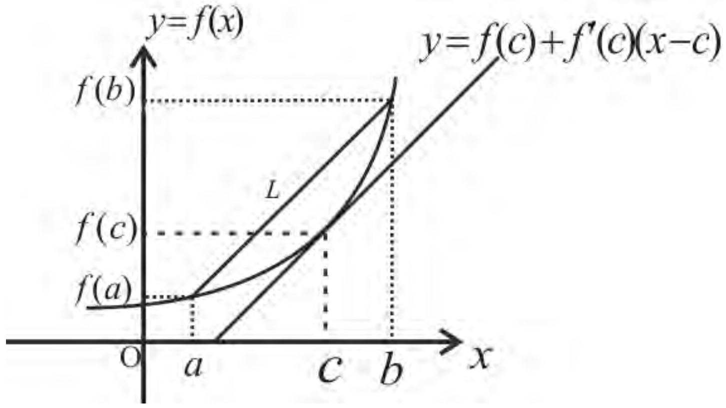


Рис. 12.1

Если x задает время и $y = y(x)$ – путь, пройденный телом при движении по прямой за время x, то $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – средняя скорость движения тела на промежутке времени $[a, b]$ и согласно (12.4) $\exists\, c \in (a, b)$ такая, что мгновенная скорость $f'(c)$ тела в момент времени c равна средней скорости.

П р и м е р

Дана кривая $y = x^2 + 1$ и точки $A(0; 1)$ и В(6; 37) на кривой. На интервале (0; 6) найти точку c, удовлетворяющую условию (12.4). Написать уравнение касательной в точке $(c,\ f(c))$. Сделать чертеж.

Р е ш е н и е

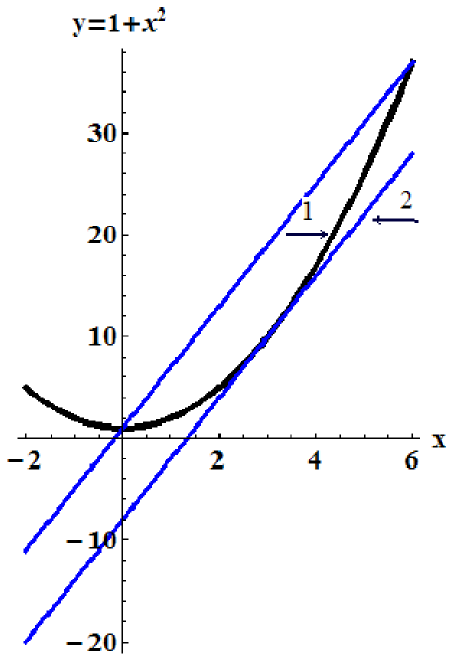


Рис.12.2. Графики:
1 – функции $y = x^2 + 1$;
2 – касательной $y = 6x - 8$

Подставив точки A и B в формулу (12.4), получим

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{37-1}{6} = 6;$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(c) = 2c = 6,\ c = 3;$$

$$y(3) = 10.$$

Уравнение касательной к кривой $y = x^2 + 1$

$y = 6x - 8$ (см. пример 9.9), рис. 12.2.

Теорема 12.5. (терема Коши). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a, b)$ и $g(a) \neq g(b)$. Тогда $\exists\, c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \qquad (12.5)$$

Доказательство

Рассмотрим функцию

$$y(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

$y(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 12.3, и далее доказательство аналогично доказательству теоремы 12.4.

Упражнение 12.2. Проверить справедливость формулы (12.5) и выполнение условий теоремы Коши для функций $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^3,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Задания

Задание 12.1

Доказать, что на указанных отрезках к данным функциям не применима теорема Ролля.

1) $y = 1 - |x|,\ x \in [-1, 1]$;

2) $y = |\sin x| + x,\ x \in [-1, 1]$.

Задание 12.2

Применив к функциям на указанных отрезках теорему Лагранжа, определить значение c.

1) $y = \ln x,\ x \in [1, e]$;

2) $y = x - x^2,\ x \in [-2, 1]$;

3) $y = \begin{cases} 0{,}5(3 - x^2) & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } 1 < x < +\infty \end{cases}$;

на отрезке $[0, 2]$.

Ответы

12.2. 1) $c = e - 1$; 2) $c = -1$; 3) $c = \frac{1}{2},\ c = \sqrt{2}$.

13. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема 13.1 (правило Лопиталя). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) дифференцируемы в некоторой окрестности $\dot{O}_\delta(x_0)$ точки x_0;

2) $g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0,\ \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (или ∞);

4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (13.1)$$

Доказательство

Рассмотрим случай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Тогда они непрерывны $\forall x \in O_\delta(x_0)$. Пусть $x \in O_\delta(x_0),\ x > x_0$, тогда по теореме Коши (теорема 12.5)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $c \in (x_0, x) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c\to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, что и требовалось доказать.

1. Если в п. 4 теоремы 13.1 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также равен ∞.

2. Аналогичная теорема верна и для односторонних пределов.

Теорема 13.2. Пусть $M > 0$ и функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) дифференцируемы при $|x| > M$;

2) $g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0$ при $|x| > M$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ (или ∞);

4) $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство

Пусть $x=\dfrac{1}{t}$. Рассмотрим функции $y=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ и $y=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Тогда условия 1) –3) теоремы 13.1 выполнены в окрестности $\dot{O}_{\frac{1}{M}}(0)$ точки $t_0=0$.

Проверим условие 4):

$$\lim_{t\to0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}=\lim_{t\to0}\frac{f'_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ -$$

предел существует, поэтому по теореме 13.1

$$\exists\lim_{t\to0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}\ \text{и}\ \lim_{t\to0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

что и требовалось доказать.

По правилу Лопиталя раскрывают неопределенности типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Неопределенности $(\infty-\infty)$ или $(0\cdot\infty)$ необходимо эквивалентными преобразованиями привести к виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Неопределенности 0^0, 1^∞, ∞^0 раскрывают путем предварительного логарифмирования.

П р и м е р 13.1

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$. Пусть $M>0$. Функции $y=\ln x$ и $y=x^{2}$:

1) непрерывны и имеют производные при $x>M$;

2) $y=x^{\alpha}\neq 0,\ y'=\alpha x^{\alpha-1}\neq 0$ при $x>M$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}=0$,

поэтому по теореме 13.2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'}=0.$$

У п р а ж н е н и е 13.1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}}$ $(\alpha>0,\ a>1)$.

П р и м е р 13.2

Найти $\lim\limits_{x\to1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

Р е ш е н и е

$$\lim_{x\to1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)=(0\cdot\infty)=$$

$$=\lim_{x\to1+0}\frac{\ln(x-1)}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to1+0}\frac{(\ln(x-1))'}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1+0}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\ln^{2}x}\cdot\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to1+0}-\frac{x\cdot\ln^{2}x}{x-1}=-\lim_{x\to1+0}x\cdot\lim_{x\to1+0}\frac{\ln^{2}x}{x-1}=$$

$$=-\lim_{x\to1+0}\frac{\ln^{2}x}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to1+0}\frac{(\ln^{2}x)'}{(x-1)'}=-\lim_{x\to1+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=0.$$

П р и м е р 13.3

Найти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Р е ш е н и е

Имеем неопределенность вида 0^0.

Преобразуем функцию $y = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\cdot\ln x}$.

Найдем

$$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0\cdot$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x} = e^0 = 1\cdot$$

П р и м е р 13.4

Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

Р е ш е н и е

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to0}\left(-\frac{\sin x}{2}\right) = 0.$$

Если в условии теоремы 13.1 предположить дополнительно, что функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и $g'(x_0)\neq 0$, тогда формула (13.1) перепишется в виде

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|f(x_0)=g(x_0)=0\right|=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \qquad (13.2)$$

Геометрически это значит, что предел при $x\to x_0$ отношения значений функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ равен отношению угловых коэффициентов касательных к этим функциям в точке x_0.

Пример 13.5

Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 8x}$ (см. пример 4.2).

Решение

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 8x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\sin 7x)'}{(\operatorname{tg} 8x)'}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{7\cos 7x}{\dfrac{8}{\cos^2 8x}}=-\dfrac{7}{8}$, рис. 13.1.

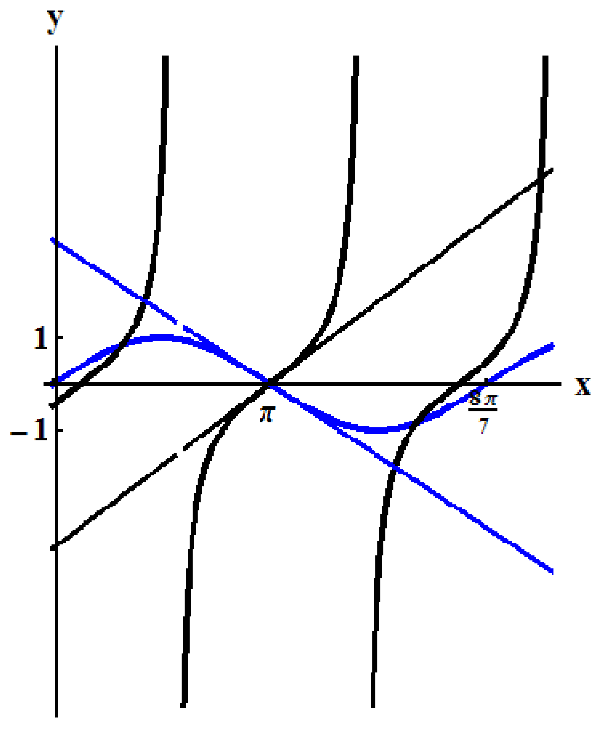


Рис. 13.1. Графики функций $y=\sin 7x$, $y=\operatorname{tg} 8x$
и их касательных в точке $x=\pi$

Задания

Задание 13.1

Вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\dfrac{1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}{1-2\cos^2 x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{x}}-1}{x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{1-x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg}x$; 15) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\sec\dfrac{\pi x}{2}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\cdot\operatorname{ctg}x$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}(2x)^{x^2}$; 18) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+x)^{\frac{2}{x}}$.

Ответы

1) 0; 2) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; 3) –2; 4) 1; 5) $-\dfrac{1}{3}$; 6) 0; 7) 0; 8) 0; 9) 0;

10) $\dfrac{3}{2}$; 11) $\dfrac{1}{2}$; 12) $\dfrac{1}{2}$; 13) 0; 14) 0; 15) $\dfrac{2}{\pi}$;

16) –2; 17) 1; 18) 1; 19) e; 20) $9e^2$.

14. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда (см. формулу (9.5)) ее приращение $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0. \qquad (14.1)$$

Пусть $x_0 + \Delta x = x,\ \Delta x = x - x_0$, тогда (14.1) перепишется в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0).$$

Рассмотрим многочлен

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Многочлен $P_1(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $P_1(x_0) = f(x_0)$;
2) $P_1'(x_0) = f'(x_0)$;
3) $f(x) = P_1(x) + o(x-x_0),\ x \to x_0$.

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0. Найдем многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n, \qquad (14.2)$$

обладающий аналогичными свойствами:

1) $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, \ldots,\ n$; (14.3)
2) $f(x) = P_n(x) + o(x-x_0)^n,\ x \to x_0$.

Из (14.2), (14.3) следует, что

$$P_n(x_0) = a_0 = f(x_0);$$

$$P_n'(x_0) = 1 \cdot a_1 = f'(x_0);$$

$$P_n''(x_0) = 1 \cdot 2a_2 = f''(x_0);$$

$$P_n'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 = f'''(x_0);$$

$$\cdots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n\, a_n = f^{(n)}(x_0).$$

Поэтому коэффициенты a_k многочлена (14.2) задаются формулой

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k = 0, 1, \ldots,\ n. \qquad (14.4)$$

Далее

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\text{применим теорему (13.1) } n-1 \text{ раз}\right|=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\left|\text{по формуле (13.2)}\right|=\frac{f^{(n)}(x_0)-P_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0.$$

Таким образом свойства (14.3) выполняются (при этом коэффициенты многочлена $P_n(x)$ задаются формулами (14.4)). Тем самым теорема доказана.

Теорема 14.1. Пусть функция $y=f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, тогда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \qquad (14.5)$$

где $o((x-x_0)^n)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$.

Формула (14.5) называется формулой Тейлора, многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

в правой части формулы (14.5) называется многочленом Тейлора, а представление разности $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$ в виде $o((x-x_0)^n)$ – остаточным членом в форме Пеано.

Если функция $x_0=0$, то (14.5) перепишется в виде

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),\ x\to 0\ – \qquad (14.6)$$

формула Маклорена.

Если функция $y=f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0, то остаточный член $r_n(x)$ можно представить в виде

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};\ 0<\theta<1\ –$$

остаточный член в форме Лагранжа и формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

называется формулой Тейлора порядка n с остаточным членом в форме Лагранжа.

Упражнение 14.1. Пусть $x_0 = 0$. Записать формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пример 14.1

В условиях примера 9.4 оценим погрешность вычисления значений $\sqrt[3]{30} \approx \frac{28}{9} \approx 3,(1)$.

Решение

Запишем формулу Маклорена первого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{1}{2!}f''(\theta x)x^2 \quad ,$$

где $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

Тогда

$$\sqrt[3]{30} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} = 3f(0) + \frac{3f'(0)}{1!}\cdot\frac{1}{9} + \frac{3}{2!}f''\left(\theta\cdot\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{9^2}, \quad 0<\theta<1 \ .$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}; \quad f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^5}} \ .$$

Поэтому

$$r_1\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{3}{2!}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\theta\cdot\frac{1}{9}\right)^5}}\cdot\frac{1}{9^2} \quad \text{и} \quad \left|r_1\left(\frac{1}{9}\right)\right| \le \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^2} = \frac{1}{243} \le 0,005 .$$

Таким образом, вычисленное значение 3,(1) отличается от истинного с точностью до 0,01.

Упражнение 14.2. Записать формулу Маклорена второго порядка для функции $y = 3\sqrt[3]{1+x}$ и по этой формуле вычислить $\sqrt[3]{30}$. Оценить погрешность вычислений.

П р и м е р 14.2

Запишем формулу Маклорена n-го порядка для функции $y = \sin x$:

$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0;$$
$$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = -\sin x, \quad f''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = -\cos x, \quad f'''(0) = -1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right) \text{ (см. упражнение 10.1)} \Rightarrow f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right).$$

Таким образом, $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ и по формуле (14.6)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}). \qquad (14.7)$$

Аналогично

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}); \qquad (14.8)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n); \qquad (14.9)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k + o(x^n); \qquad (14.10)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \qquad (14.11)$$

Формулы (14.7)–(14.11) называются основными разложениями.

П р и м е р 14.3

Разложить $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ по формуле Маклорена до члена x^4, используя основные разложения. Оценить погрешность при $|x| \le \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е

Пусть $x^2 = t$. Тогда (см. формулу (14.10))

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2 + r_2(t);$$

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + r_2(t).$$

Остаточный член запишем в форме Лагранжа:

$$r_2(t) = \frac{f'''(\theta t)}{3!}t^3, \ 0 < \theta < 1;$$

$$r_2(t) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(1+\theta t)^{-\frac{5}{2}}t^3 \ = \ \frac{1}{16}\frac{1}{(1+\theta t)^{\frac{5}{2}}}\cdot t^3.$$

Если $|x| \le \frac{1}{2} \Rightarrow \ 0 \le t \le \frac{1}{4}$,

поэтому

$$|r_2(t)| \le \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{1024}.$$

Таким образом,

$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$ и погрешность при $|x| \le \frac{1}{2}$ меньше чем 0,001, рис. 14.1.

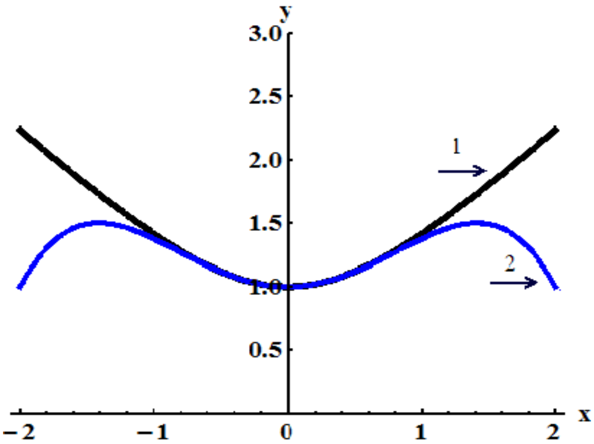


Рис. 14.1. Графики: *1* – функции $y=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ и *2* – ее многочлена Тейлора

Упражнение 14.3. Вычислить:

1) e с точностью до 0,001;

2) $\sqrt{17}$ с точностью до 0,00001.

Упражнение 14.4. Оценить погрешность формул

а) $\sin x \approx x-\dfrac{x^3}{6}$ при $|x|\le\dfrac{1}{2}$;

б) $\sin x \approx x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ при $|x|\le\dfrac{1}{2}$.

Пример 14.4

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x+\dfrac{x^3}{6}}{x^5}$.

Решение

Воспользуемся разложением (14.7):

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-x+\dfrac{x^3}{6}}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{120}+\frac{o(x^5)}{x^5}\right)=\frac{1}{120}.$$

Упражнение 14.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}}{x^5}$ из примера 14.4, используя правило Лопиталя.

Задания

Задание 14.1

Разложить функцию $f(x)$ по степеням $x - x_0$:

1) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8,\ x_0 = 1$;
2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1,\ x_0 = -1$;
3) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1$;
4) $f(x) = \sqrt{1-x},\ x_0 = 0$;
5) $f(x) = \sqrt[3]{1+x},\ x_0 = 0$;
6) $f(x) = e^x,\ x_0 = -1$;
7) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5,\ x_0 = 2$;
8) $f(x) = e^{2x-x^2},\ x_0 = 0$;
9) $f(x) = \sin(\sin x),\ x_0 = 0$;
10) $f(x) = \cos(\sin x),\ x_0 = 0$;
11) $f(x) = \ln\dfrac{\sin x}{x},\ x_0 = 0$;
12) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3},\ x_0 = 0$;
13) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right),\ x_0 = 1$;
14) $f(x) = \sqrt{1 - x + 2x^2},\ x_0 = 0$.

Задание 14.2

Вычислить приближенно:

1) $e^{0,1}$ с точностью до 10^{-3};
2) $\cos 5^\circ$ с точностью до 10^{-5};
3) $\sqrt[3]{9}$ с точностью до 10^{-3};
4) $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 10^{-4};

5) $\sin 18^\circ$ с точностью до 10^{-4};

6) $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-8};

7) $\ln 1{,}1$ с точностью до 10^{-3};

8) $e^{0,2}$ с точностью до 10^{-5};

9) $\cos 6^\circ$ с точностью до 10^{-5};

10) $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 10^{-2}.

З а д а н и е 14.3

Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

1) $\sin x \approx x - \dfrac{x^2}{6}$ при $|x| \le \dfrac{1}{2}$;

2) $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$ при $|x| \le 1$;

3) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ при $0 \le x \le 1$.

З а д а н и е 14.4

Используя основные разложения, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x}{x^4}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x - \operatorname{tg} x}{\ln(1+x^3)}$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x+1} - \sqrt{e^x-1}\right)$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$;

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Ответы

14.1. 1) $f(x)=2-11(x-1)-4(x-1)^2+(x-1)^3$;

2) $f(x)=1+4(x+1)-3(x+1)^2-2(x+1)^3+(x+1)^4$;

3) $f(x)=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}-\dfrac{(x-1)^4}{4}+\ldots+\dfrac{(-1)^n(x-1)^n}{n}+R_{n+1}$;

4) $f(x)=1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{16}x^3+R_4$;

5) $f(x)=1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{5}{81}x^3+R_4$;

6) $f(x)=e^{-1}\left(1+(x+1)+\dfrac{(x+1)^2}{2!}+\ldots+\dfrac{(x+1)^n}{n!}\right)+R_{n+1}$;

7) $f(x)=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$;

8) $f(x)=1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{6}x^4-\dfrac{1}{15}x^5+R_6$;

9) $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+R_3$;

10) $f(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5}{24}x^4+R_4$;

11) $f(x)=-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x^4}{180}-\dfrac{x^6}{2835}+R_6$;

12) $f(x)=x-\dfrac{x^7}{18}-\dfrac{x^{13}}{3240}+R_{13}$;

13) $1-\frac{\pi^2}{8}(x-1)^2+\frac{\pi^4}{384}(x-1)^4+R_4$;

14) $1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{7}{16}x^3+R_3$.

14.2. 1) 1,105; 2) 0,99619; 3) 2,080; 4) 3,08000; 5) 0,3090; 6) 0,01745241; 7) 0,095; 8) 1,22140; 9) 0,99452; 10) 0,78.

14.3. 1) меньше $\frac{1}{3840}$; 2) меньше $2\cdot 10^{-6}$; 3) меньше $\frac{1}{16}$.

14.4. 1) 0; 2) $-\frac{1}{12}$; 3) – 2; 4) 1; 5) $-\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) 0; 8) $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{19}{90}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1989.

2. Демидович, Б. П. Сборник задач по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1990.

3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: в 2 т. / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1981. – Т. 1.

4. Герасимович, А. И. Математический анализ: в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

5. Математический анализ в вопросах и задачах / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Физматлит, 2001.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

7. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике: в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2.

8. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1.

9. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецов. – М. : Высшая школа, 1983.

10. Зорич, В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Зорич. – М. : Фазис, 1997. – Ч. 1.

11. Письменный, Дм. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Дм. Письменный. – М. : Айрис Пресс, 2006.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна
РУДЫЙ Александр Никодимович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие
для студентов энергетических специальностей.

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *Ю.С. Кругловой*

Подписано в печать 29.09.2016. Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 15,11. Уч.-изд. л. 5,91. Тираж 100. Заказ 609.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.