

## ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ НА БАЗЕ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ЭВМ

Вихренко В.С., Гапанюк Д.В., Грода Я.Г.

*The laboratory training on the basis of PC simulation of mechanical systems is proposed. This training consists of 8 tasks on dynamics of mechanical systems: one- and two-dimensional motion of a particle under non-linear damping force, free and forced oscillators, plane motion of a solid, and self-oscillations. Algorithms and programs for numerical solving all the tasks with the help of Pascal and Mathcad are developed.*

Широкое распространение относительно недорогих (доступных для приобретения при средних доходах) и вместе с тем достаточно мощных (позволяющих решать многие профессиональные задачи) персональных компьютеров и имеющегося к ним программного обеспечения не только позволяет, но и диктует необходимость расширить класс задач, обычно решаемых в учебных курсах теоретической механики и других дисциплин. Использование численных методов дает возможность решать многие классы уравнений, что недостижимо на основе аналитических подходов, и тем самым может существенно обогатить и разнообразить практические приложения теории. Как известно, в теоретической механике движение описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка. Наличие аналитического решения у такой системы уравнений является скорее исключением, нежели правилом. Это существенным образом сужает класс задач, которые могут использоваться при изложении курса, и практически оставляет за его пределами изучение весьма интересных явлений, связанных с нелинейными процессами.

К сожалению, на пути широкого использования вычислительной техники в учебном процессе существует ряд проблем как технического, так и принципиального характера. Незаменимый в научных исследованиях при решении громоздких и не поддающихся аналитическому рассмотрению задач компьютер требует значительных затрат времени на выбор метода решения, подготовку задачи к ее решению, освоение как соответствующих численных методов, так и программных продуктов, используемых для реализации этих методов. Немаловажна и проблема интерпретации полученных численных результатов. Применение ЭВМ оказывается оправданным также в процессе многократного решения одной и той же задачи при отличающихся исходных данных. Учебные же программы дисциплин, читаемых на младших курсах университетов, построены так, чтобы охватить возможно большее количество явлений, которые могут быть полезными в дальнейшем. На изложение вопросов, связанных с численными методами и использованием вычислительной техники, не хватает не только времени, но, во многих случаях, и квалификации преподавателей.

Для преодоления этих ограничений при подборе задач на кафедре теоретической механики БГТУ был разработан лабораторный практикум и соответствующее пособие по решению задач динамики с применением ЭВМ. Лабораторные работы предоставляют одну из оптимальных возможностей использования вычислительной техники в учебном процессе. Учитывая, что студенты сильно отличаются по уровню владения вычислительной техникой и, во многих случаях, имеют лишь самые элементарные знания, в сопровождающем практикум пособии излагается все, что необходимо для выполнения лабораторных работ.

Собственно описанию лабораторных работ предшествуют три дополнительных раздела, поясняющих используемые численные методы и технику взаимодействия с компьютером.

В первом из них дается краткое, но достаточное для выполнения цикла лабораторных работ введение в язык программирования Pascal. Здесь же подробно объясняется алгоритм Эйлера. На примере задачи об интегрировании одномерного уравнения движения материальной точки подробно рассмотрена структура программы на языке Pascal численного интегрирова-

ния дифференциального уравнения с помощью алгоритма Эйлера. Программа снабжена подробными комментариями, и дополнительно приведены пояснения по типу используемых переменных и констант, операторам, операциям ввода-вывода.

Второй раздел посвящен технике использования пакета Origin для визуализации (графического представления) результатов вычислений. Рассматриваются вопросы импорта числовых данных, построения графиков и их вывода на печать или экспорта в другие электронные документы.

MathCAD является одним из профессиональных пакетов общего назначения. Его отличительной чертой является простота использования, и при этом он обладает широкими возможностями решения разнообразных задач. Его описанию – в части, необходимой для выполнения предлагаемых лабораторных работ, – посвящен третий раздел пособия.

Используя программирование на языке Pascal и решение задачи в среде MathCAD, студенты смогут сопоставить трудоемкость и удобство пользования этими двумя подходами, приобретут навыки работы с программами, анализа полученных результатов, и познакомятся с особенностями движения сильно нелинейных систем.

Лабораторные работы посвящены исследованию движения материальных тел и их систем в условиях, когда уравнения движения не могут быть проинтегрированы аналитически. Для составления уравнений движения используются различные методы механики – от уравнения второго закона механики до уравнений Лагранжа. Интегрирование уравнений движения основано на простейшем алгоритме Эйлера, который имеет первый порядок точности, и поэтому требует известной осторожности при выборе шага интегрирования по времени.

Сам цикл лабораторных работ состоит из 8 заданий, охватывающих основные темы лекционного курса теоретической механики, читаемого студентам специальности МОЛК. Ряд задач отражает специфику специальности. Для их выполнения студентам необходимо, во-первых, используя, как правило, уравнения Лагранжа 2-го рода, составить дифференциальные уравнения движения и, во-вторых, численно решить эти уравнения с помощью либо алгоритма Эйлера, составив программу на языке Pascal, либо с помощью встроенных в пакет MathCAD средств численного решения дифференциальных уравнений. В последнем случае студент также может реализовать алгоритм Эйлера, используя внутренний язык программирования пакета MathCAD. Визуализация результатов вычислений производится либо с помощью графического пакета Origin при использовании языка программирования Pascal, либо с помощью графических возможностей пакета MathCAD.

Первая лабораторная работа состоит в изучении одномерного поступательного движения твердого тела. Эта работа носит характер вводного задания, при выполнении которого студенты знакомятся на практике с алгоритмом Эйлера. Особенность задачи состоит в том, что, в отличие от всех последующих, она может быть решена аналитически. Сопоставление результатов аналитического и численного решения позволяет проконтролировать работу программы и изучить влияние шага интегрирования на точность получаемых результатов. Программа, подготовленная студентами в процессе выполнения первой лабораторной работы, фактически является шаблоном для выполнения последующих работ. Процесс подготовки программ к оставшимся работам сводится к ее коррекции и добавлению дополнительных модулей. Для студентов, которые хорошо знакомы с вычислительной техникой, уже в первом задании предусмотрена возможность исследования движения тела при нелинейном сопротивлении. Здесь подчеркивается, что аналитические подходы к решению линейных и нелинейных задач отличаются кардинально, тогда как алгоритмы их численного решения во многих случаях практически одинаковы.

Во второй лабораторной работе студенты изучают свободные колебания физического маятника. В отличие от стандартной формулировки этой задачи, на изучаемое движение не накладывается условие малости колебаний, позволяющее найти аналитическое решение. При выполнении работы студенты могут оценить область начальных условий, для которой это

приближение может использоваться.

Вынужденные колебания физического маятника изучаются в третьей лабораторной работе, где рассматриваются колебания при гармоническом законе движения точки подвеса маятника в горизонтальном направлении. В этой работе также производится сравнение результатов решения исходной и линеаризованной задачи, и определяются условия, при которых линеаризованное уравнение отражает действительное движение маятника. Естественно, при этом возникает вопрос о критерии сопоставимости решений, на который можно отвечать в зависимости от уровня подготовки студентов. Хорошо успевающим студентам может быть предложена модификация задачи по исследованию слабо нелинейных колебаний, изучению амплитудно-частотных характеристик и явления резонанса в нелинейной системе.

В четвертой и пятой работах рассматривается двумерное движение материальной точки в вязкой среде при учете сил сопротивления, зависящих от скорости. При линейной зависимости силы сопротивления от скорости задача может быть решена аналитически. Как и в первой задаче, этот предельный случай используется для отладки Pascal-программы и выбора оптимального шага интегрирования. В четвертой работе в качестве примера рассмотрено движение орудийного снаряда, выпущенного под углом к горизонту, при учете сопротивления воздуха. Последнее принимается зависящим от скорости движения снаряда как  $kv^n$ , и перед студентами ставится задача определить дальность обстрела при заданных начальной скорости, массе снаряда и угле наклона ствола орудия, максимальную высоту подъема, полное полетное время и угол падения снаряда на горизонтальную поверхность. Кроме этого, в работе изучается влияние наклона ствола орудия на дальность обстрела и определяется угол, при котором дальность стрельбы максимальна. В пятой работе рассматривается движение щепы, попадающей с нулевой начальной скоростью в воздушный поток, созданный в коробе прямоугольного сечения. Здесь студентам предлагается найти зависимость пройденного частицей пути в горизонтальном направлении до ее касания дна короба в зависимости от ряда параметров. Здесь студенты должны ответить на вопрос, можно ли использовать такое устройство для разделения щепы по фракциям.

В шестой работе изучается движение кривошипно-ползунного механизма. Рассматривается движение механизма под действием пары сил с моментом, зависящим от угловой скорости вращения кривошипа, и изучается выход механизма на стационарный режим движения. Формулировка уравнения движения механизма с переменным приведенным моментом инерции требует значительных затрат времени, и поэтому его вывод изложен в практикуме. Студенты должны адаптировать соответствующие программы для интегрирования полученного уравнения движения, выполнить интегрирование последнего и проанализировать поведение механизма при различных условиях, в том числе рассмотреть диапазон колебаний угловой скорости кривошипа, определить, какие факторы влияют на этот диапазон. Эта работа является хорошим введением к последующему проектированию механизмов в курсе теории механизмов и машин.

Плоскопараллельное движение изучается также в седьмой работе, где рассматривается скольжение балки по вертикальной и горизонтальной опорам и определяется угол, при котором произойдет отрыв балки от вертикальной стены. Эта задача может быть решена аналитически при отсутствии трения между балкой и опорами. Как и ранее, это обстоятельство используется для тестирования и отладки программы, после чего может быть исследовано движение балки до и после ее отрыва от вертикальной опоры при наличии сил сухого трения.

Последняя лабораторная работа посвящена анализу автоколебательного движения. В ней рассматривается движение груза, прикрепленного к неподвижной стенке с помощью пружины, по ленте транспортера при учете силы трения между телом и лентой транспортера, зависящей от относительной скорости движения груза по ленте. Соответствующее нелинейное дифференциальное уравнение описывает систему с отрицательным сопротивлением. Решив его численно, студенты имеют возможность оценить время выхода на стационарный режим

движения, построить фазовую траекторию и изучить влияние знаков параметров дифференциального уравнения на ее вид.

По результатам каждой лабораторной работы оформляется письменный отчет, который должен содержать титульный лист, постановку задачи, описание полученных результатов с представлением графиков и их анализ.

Использование в качестве программного обеспечения лабораторных работ языка Pascal позволяет существенным образом снизить требования к их аппаратному обеспечению. Так, например, при проведении лабораторных могут использоваться персональные компьютеры на базе процессора Pentium с частотами 66-133 МГц. Большие возможности исследования движения механических систем связаны с использованием программного пакета Mathcad, имеющего удобный интерфейс, встроенные модули интегрирования дифференциальных уравнений и предоставляющего возможность построения двух- и трехмерных графиков.

В целом можно отметить, что структура лабораторного практикума является достаточно гибкой и допускает как включение в него новых работ, так и изменение порядка их выполнения. Как было отмечено, для решения дифференциальных уравнений используется метод Эйлера. К числу основных достоинств этого метода относится его относительная простота и наглядность. В то же время он является методом лишь первого порядка точности и в ряде задач может быть не устойчивым. Поэтому при необходимости он может быть заменен более совершенными алгоритмами, например, схемой второго порядка с перешагиванием или методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

## **ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ УЧЕБНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ**

**Бокун Г.С., Вихренко В.С., Гляков С.А.**

*The application of packages Mathcad and Nastran for training students to design different mechanisms is considered. The advantages of this approach as compared to traditional ones based on graphoanalytical methods are disused.*

В настоящее время вычислительная техника находит все большее применение в задачах проектирования механизмов и во многих ситуациях является единственным средством для решения сложных задач. Совершенствование программного обеспечения персональных компьютеров, разработка пакетов для символьных преобразований, создание пакетов, составляющих и решающих уравнения Лагранжа для систем со многими степенями свободы, позволяют ставить вопрос о полной замене графоаналитических расчетов компьютерными методами, не ущемляя при этом, а, наоборот, расширяя и углубляя понимание основных подходов, принципов и методов механики.

Представляется возможным осуществить такой подход на основе программных пакетов Mathcad и Nastran. Одно из преимуществ таких пакетов состоит в том, что для их применения не требуется специальная подготовка по программированию. Эти пакеты доступны для обычного пользователя персонального компьютера, имеют хорошо отработанный, удобный интерфейс, схожий с большинством программ, работающих в операционной системе Windows. Применение же этих пакетов для решения задач проектирования требует знаний собственно по механической части задачи в программных компьютерных манипуляциях.

Пакет Mathcad обладает рядом ценных качеств, необходимых для решения задач, связанных с получением массивов данных (координаты точек профиля кулачка, зубчатого колеса и др.) и дальнейшим их использованием. Этот пакет имеет ряд необходимых встроенных функций (решение уравнений и систем уравнений, поиск экстремумов, интегрирование,

дифференцирование и т. д.), удобное представление графиков и изображений, включая возможность сохранять анимации движения механизмов в видеофайлах. Запись программы в Mathcad максимально приближена к форме, используемой при записи формул на бумаге, что позволяет пользователям легко адаптировать программы к каждому конкретному случаю. Всё это позволяет сэкономить время на программирование по сравнению с использованием традиционных языков (Basic, Pascal, C, и др.).

Пакет VisualNastran Desktop 4D используется преимущественно для анализа уже спроектированных механизмов, поскольку здесь отсутствует возможность программирования, и применение этого пакета ограничено его возможностями и ресурсами компьютера. Использование Nastran для анализа очень удобно, поскольку здесь не требуется составления уравнений, описывающих движение механизма, а только следует задать расположение звеньев, наложенные на них связи и приложенные силы. Всё остальное пакет сделает сам и выдаст необходимые результаты.

Для моделирования и анализа механизмов в Nastran может понадобиться помощь ещё одной программы, способной создавать трёхмерные объекты, поскольку непосредственно в VisualNastran Desktop 4D можно создавать лишь простейшие геометрические формы (шар, параллелепипед, цилиндр). Такой программой может быть Autocad, который способен также служить и связующим звеном между Mathcad и Nastran, поскольку полученные в Mathcad массивы чисел, например, координат точек профиля кулачка, можно использовать в Autocad для построения этого кулачка в трёхмерном пространстве, и затем экспортировать его в Nastran.

Рассмотрим применение пакетов Mathcad и Nastran на примерах проектирования плоских рычажных механизмов, зубчатых передач и кулачковых механизмов.

**Проектирование кулачковых механизмов.** Задачей проектирования кулачковых механизмов является определение профиля кулачка в зависимости от закона движения, вида толкателя и других накладываемых ограничений (например, угол давления). В качестве примера рассмотрим проектирование кулачковых механизмов, схемы которых изображены на рисунке 1.

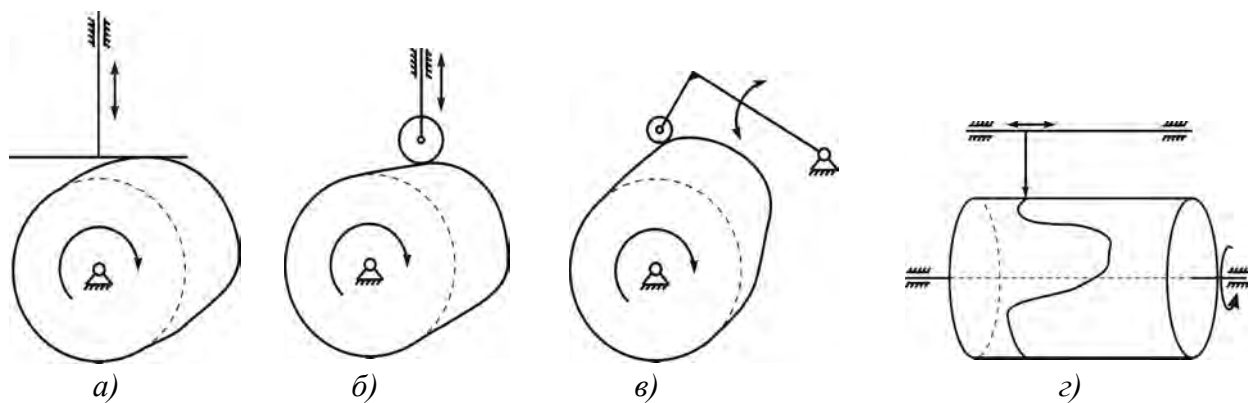


Рис. 1 Схемы кулачковых механизмов.

*а) с тарельчатым толкателем, б) с роликовым толкателем,  
в) с роликовым коромыслом, г) пространственный кулачковый механизм*

Данную задачу удобнее всего решать при помощи пакета Mathcad. Для получения профиля кулачка, независимо от вида толкателя, сначала по заданному закону движения толкателя определяется передаточная функция выходного звена. Затем, в зависимости от накладываемых на механизм ограничений и вида толкателя, осуществляется выбор радиуса основной окружности. После этого рассчитываются координаты точек центрального профиля кулачка в полярной системе координат и, в зависимости от вида толкателя, рассчитывается дей-

ствительный (эквидистантный центральному) профиль. Для проверки правильности расчетов в декартовой системе координат создается анимация вращения кулачка по результатам вычислений и анимация движения толкателя по исходным данным. Если вычисления верны, то кулачок и толкатель всегда будут касаться друг друга (не будут отрываться либо пересекаться). В качестве результатов могут выступать массивы точек с координатами любого элемента кулачкового механизма, траектории движения, изображение и анимация. На рисунке 2 показаны изображения спроектированных в Mathcad кулачковых механизмов.

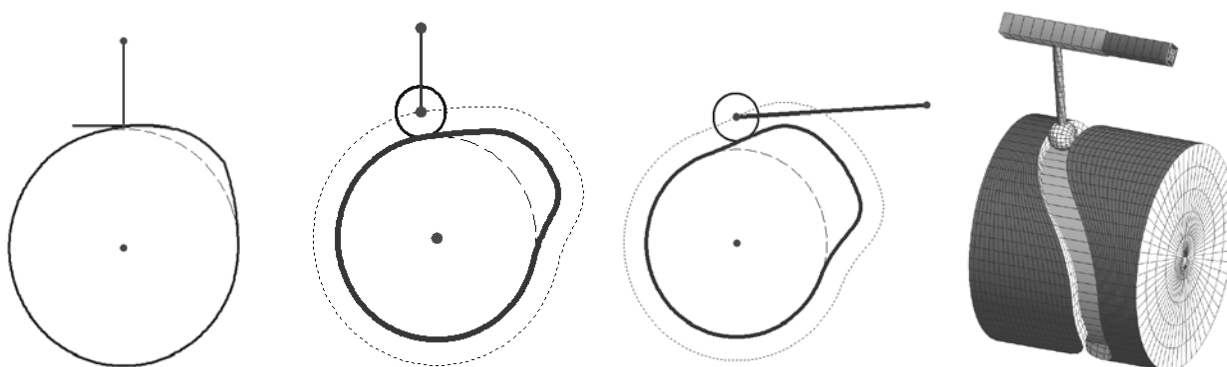


Рис. 2 Изображения кулачковых механизмов в Mathcad.

Для использования спроектированных кулачков в Nastran понадобятся массивы координат X и Y точек действительного профиля кулачка. Поскольку непосредственно в Visual Nastran Desktop 4D невозможно создать кулачок, то для решения этой задачи можно воспользоваться интерпретатором Autolisp, входящим в состав Autocad. Для этого сначала полученные в Mathcad массивы X и Y преобразуются в строку вида (command "\_SPLINE" "X<sub>1</sub>,Y<sub>1</sub>" "X<sub>2</sub>,Y<sub>2</sub>" ... "X<sub>360</sub>,Y<sub>360</sub>" "\_C"), и через буфер эта строка вставляется в Autolisp. После её обработки на рабочем листе Autocad будет находиться плоский объект, ограниченный замкнутой кривой, повторяющей профиль кулачка. Применив к нему функцию выдавливания, получим трёхмерное изображение кулачка. Такой кулачок экспортируется в формат ACIS, который затем можно вставить в Nastran и использовать как составляющую часть какого-либо сложного механизма. На рисунке 3 приведены примеры кулачковых механизмов в Nastran.

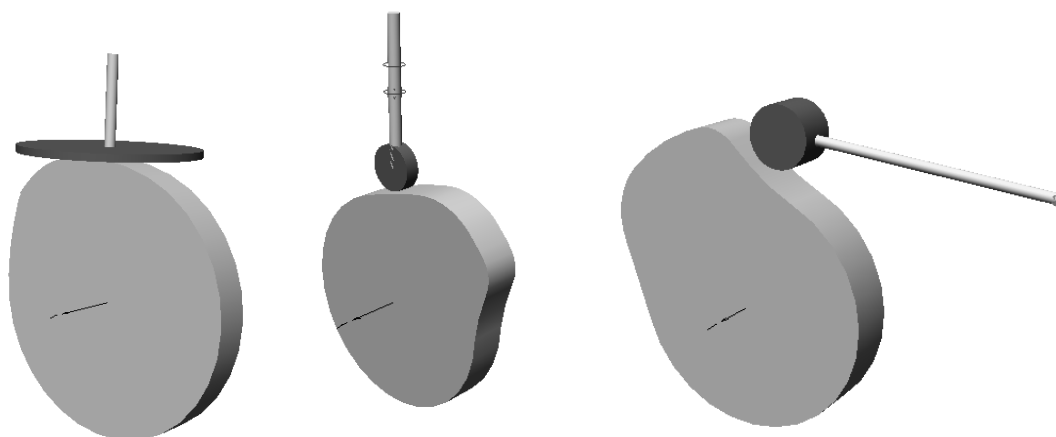


Рис. 3 Изображения кулачковых механизмов в Nastran.

**Проектирование плоских рычажных механизмов** показано на примере двух механизмов, кинематические схемы которых представлены на рисунке 4.

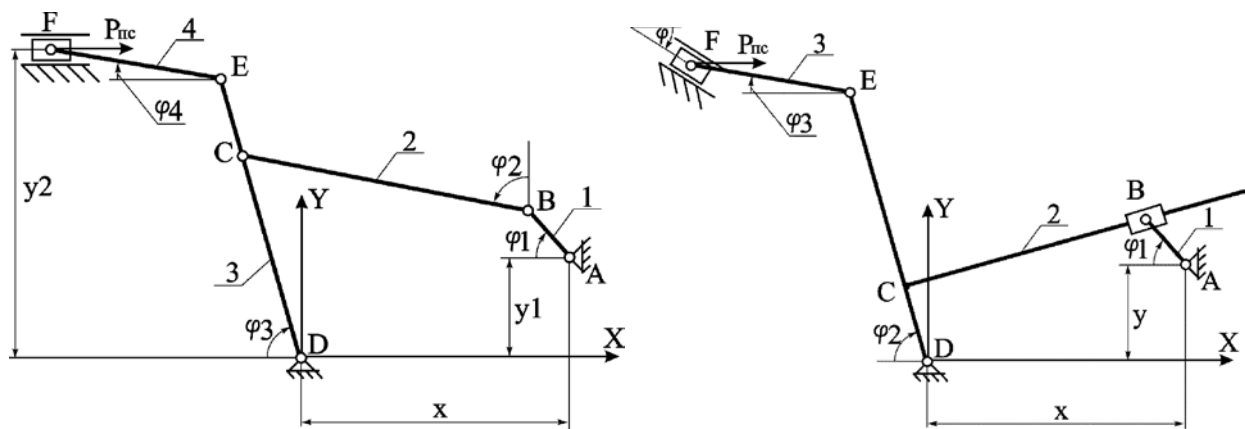


Рис. 4 Кинематические схемы механизмов

Задача проектирования заключается в определении момента двигателя и момента инерции маховика в условиях установившегося движения при заданном коэффициенте неравномерности движения.

Реализуется следующий алгоритм проектирования. Сначала вычерчивается одно из произвольных положений механизма. Ориентация звеньев определяется углами, которые отсчитываются от горизонтальной либо вертикальной оси по ходу или против хода часовой стрелки (см. рис. 1). На основании метода замкнутых контуров составляется система уравнений, определяющая названные углы, и далее с помощью оператора Given находится её решение для всех, например, 360 положений ведущего вала механизма. При этом необходимо следить за отбором ветви решений, отвечающей заданному варианту сборки механизма.

При компьютерной реализации этого алгоритма удобным оказалось разбиение механизма на группы Ассур. Результатом вычислений являются массивы, каждый из которых содержит 361 элемент и определяет зависимость соответствующего угла либо координаты интересующей точки от значений угла  $\varphi_1$ . Для создания при помощи Mathcad видеофильмов движущихся механизмов разработан алгоритм "Анимация". Включение этого видеофайла очень важно для проверки правильности произведенных вычислений, так как каждое звено здесь движется по своему закону, в соответствии с выполненным расчетом, независимо от других. И только при правильном решении совокупность таких независимых движений воспроизводит нужное движение механизма. Анимация важна и для понимания студентами особенностей движения механизма.

Затем путем вычисления первых и вторых численных центрированных производных находятся передаточные функции механизмов. На основании последних рассчитываются массивы значений приведенного момента инерции и приведенного момента сил сопротивления в соответствии с определениями

$$I_{np} = \sum_{k=1}^n m_k \left( (x'_{S_k})^2 + (y'_{S_k})^2 \right) + \sum_{k=1}^n I_{S_k} (\varphi'_k)^2,$$

$$M_{np} = - \sum_{k=1}^n m_k g y'_{S_k} + P_x x'_F,$$

где  $x'_{S_k}$  и  $y'_{S_k}$  – производные координат центров масс  $k$ -го звена по обобщенной координате  $\varphi_1$ ,  $I_{S_k}$  – центральный момент инерции  $k$ -того звена,  $g$  – ускорение свободного падения,  $x'_F$  – аналог скорости исполнительного звена.

После интегрирования приведенного момента сил сопротивления получается зависимость работы от угла поворота входного звена, по которой находится момент двигателя ( $M_{\ddot{a}\hat{a}} = const$ ) из условия стационарности установившегося движения. Момент инерции ма-

ховика определяется по методу Мерцалова. Разработаны критерии проверки правильности расчетов на каждом отдельном этапе проектирования. В частности перед выполнением силового расчета предусмотрен контроль правильности вычислений путем проверки справедливости условия динамического равновесия

$$M_{дв} + M_{пр} + M_{пр}^{ин} = 0,$$

где  $M_{пр}^{ин}$  – приведенный момент сил инерции.

Далее на основании принципа Даламбера выполняется динамический анализ и рассчитываются реакции в кинематических парах во всех положениях механизма. При этом момент сил инерции для звеньев, углы поворота которых отсчитываются по часовой стрелке, в уравнениях динамического равновесия должны быть взяты с отрицательным знаком.

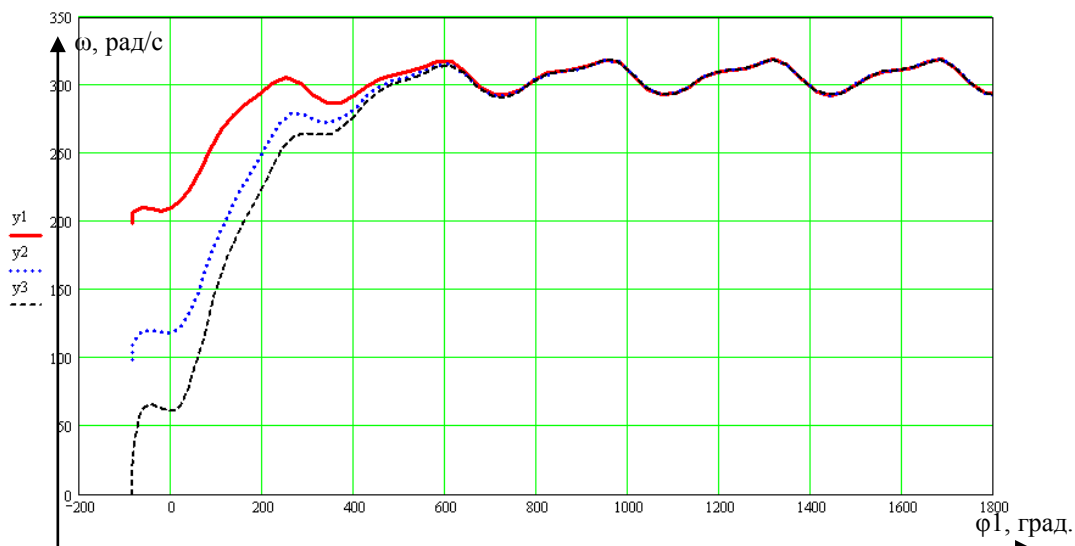


Рис. 5 Графики переходных процессов при различных начальных условиях

Кроме того, механизм, изображенный на рис. 4, был спроектирован с применением VisualNastran Desktop 4D, т. е. программы, специально предназначенной для анализа работы механизмов. Здесь уже не требуется математическое описание механизмов, достаточно лишь задать взаимное расположение звеньев, их массы, моменты инерции и степени свободы в кинематических парах. Все результаты, полученные в Nastran, полностью совпали с данными в Mathcad. Nastran используется далее для анализа поведения механизма с учетом реальной механической характеристики двигателя и исследования переходных режимов движения механизма. На рисунке 5 показана зависимость угловой скорости приводного звена первого механизма от угла его поворота при различных значениях начальной угловой скорости. Отметим, что движущий момент задавался уже не константой, а функцией скорости, определяемой реальной механической характеристикой двигателя. Из графиков видно, что устройство быстро переходит в режим установившегося движения, который не зависит от начальных условий, а определяется лишь характеристиками механизма и двигателя. По графику или по массиву угловых скоростей можно определить коэффициент неравномерности движения. Поскольку расчеты на ЭВМ занимают несколько секунд, легко удовлетворить ограничению по неравномерности хода, варьируя момент инерции маховика. Эта задача решается для реальной характеристики двигателя, а не для постоянного крутящего момента, как это делается в традиционных методиках.

**Проектирование зубчатых передач.** При проектировании зубчатых передач исходными данными являются модуль, количества зубьев и коэффициенты смещения обоих колес. Сначала по формулам определяются основные геометрические параметры зубчатого зацепления (межосевое расстояние, радиусы делительной и основной окружностей, высота зуба и др.). Затем определяются координаты точки касания профилей колёс, и выполняется построение и



анимация работы зубчатого зацепления. По полученной анимации можно судить о правильности проведенных расчетов и построений. Например, если первая точка касания пропадает раньше, чем появляется следующая, или зубья получились острыми, то не правильно выбраны коэффициенты смещения исходного контура. Данные, полученные в результате таких расчётов, можно так же, как и для кулачков, использовать для создания трёхмерного зубчатого колеса и импорта в Nastran.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Попов С.А., Тимофеев Г.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин. – М.: Высш. шк., 2002.
2. Кирьянов Д.А. Самоучитель Mathcad 2001. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2003.
3. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC/Nastran for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001.

## КОМПЬЮТЕР В САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТА

Андреев С.Ф.

*The author presents his ways of organizing the students independent work applying computer and numerical methods in solving the problems of material point dynamics.*

Выбор технологий учебного процесса всегда занимал одно из ключевых мест в системе высшего образования. Отличительной особенностью современного этапа развития высшей школы, является активизация самостоятельной работы студентов с использованием компьютерной техники. Если ещё несколько лет назад компьютер был пугалом для первокурсника, то сегодня компьютеромания заменяет компьютерофобию – многие студенты в свободное от занятий время по своей инициативе пользуются ПЭВМ в дисплейных классах, в общежитии, дома. Актуальным остается вопрос эффективности такого пользования, так как очевидно, что много времени любители-компьютерщики тратят на изучение и освоение не нужных им в данный момент, случайно попавшихся под руку, пакетов прикладных программ. Преподавателю желательно выявить таких любителей, и направить их усилия в профессиональное русло.

Предполагается, что такой студент имеет представление об элементах программирования и умеет пользоваться одним из математических пакетов хотя бы на самом примитивном уровне. Не имеет смысла нагружать самостоятельной работой на ЭВМ не умеющего записать файл на дискету.

Разнообразие вычислительных средств вносит определенные требования к постановке самостоятельной работы. Вопрос применения компьютерных технологий в процессе обучения теоретической механике, актуален со времени появления ЭВМ в высшей школе. Библиография методики обширна, часть её приведена в работах [1,2]. В силу объективно существующих различий в учебных программах ВУЗов, в уровне подготовленности студентов, и пр., повторение существующего опыта не всегда уместно с точки зрения формирования навыков научно-технических расчетов и их алгоритмизации.

При решении на ЭВМ задач теоретической механики компьютер часто выполняет функции калькулятора - программируются формулы, полученные аналитическим способом. В лучшем случае студенты могут воспользоваться готовой программой-шаблоном или встроенной процедурой прикладного математического пакета. С задачами, не имеющими замкнутого решения, требующими применения численных методов, студенты обычно не справляются.

Самостоятельное построение математической модели вызывает, как правило, стремление довести задачу до “числа”, получить анализируемые результаты, подбирая и комбинируя необходимые приемы решения. При работе над алгоритмом вместе с преподавателем выявляются особенности математической модели, определяются метод решения, выбирается пакет прикладных программ.

Из ряда известных математических пакетов в студенческой среде наиболее популярен, пожалуй, пакет “Mathcad”. Характерной особенностью пакета является возможность применения наглядных графических иллюстраций, и использование привычных стандартных математических обозначений, не требующее знания специфического набора команд.

Представляется целесообразным на ознакомительном этапе алгоритмизации расчетов предложить в виде самостоятельной работы решение и анализ задач, математическая модель которых была рассмотрена на практических занятиях. Численные методы на этом этапе обсуждаются лишь в том объеме, который необходим для понимания конкретной задачи.

Типичные задачи могут быть предложены по теме: “ Дифференциальные уравнения движения материальной точки ” Предлагается условие: “ Для одномерного случая составить систему дифференциальных уравнений, алгоритм, программу, и получить графический результат”. Приводится пример замены дифференциального уравнения одномерного движения точки

$$\ddot{Y} = \left(\frac{1}{m}\right)(F_Y(t, Y, \dot{Y}))$$

на систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{Y} = V_Y \quad \text{и} \quad \dot{V}_Y = \left(\frac{1}{m}\right)(F_Y(t, Y, \dot{Y})),$$

решение которой при заданных начальных условиях

$$Y(t)_{t=0} = Y_0 \quad \text{и} \quad V_Y(t)_{t=0} = V_{Y0},$$

определяет положение, и скорость движения точки в любой момент времени  $t$ .

Предлагается исследовать движение точки в различных вариантах: - движение с учетом сил, зависящих только от времени, положения или скорости, а также, сил, являющихся функцией двух или трех параметров. Указывается, что создание функции  $F_Y(t, Y, \dot{Y})$  - необходимое условие решения каждой отдельной задачи. Примерами могут служить уравнения Ньютона:

$$m\ddot{Y} = F_Y \text{ - движение под действием постоянной силы } F_Y = const ;$$

$$m\ddot{Y} = -\alpha\dot{Y} \text{ - движение с вязким трением;}$$

$$m\ddot{Y} = -mg - \alpha\dot{Y} \text{ - движение с вязким трением в поле силы тяжести;}$$

$$m\ddot{Y} = -mg - cY \text{ - гармонический осциллятор в поле силы тяжести;}$$

$$m\ddot{Y} = -mg - \alpha\dot{Y} - cY \text{ - осциллятор с вязким трением в поле силы тяжести;}$$

$$m\ddot{Y} = -mg - \alpha\dot{Y} - cY + \Phi(t) \text{ - осциллятор с вязким трением и возбуждающей силой;}$$

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \cdot \sin(\varphi) \text{ - движение математического маятника, и так далее.}$$

Для тестирования программы рекомендуется использовать знакомую задачу. Предлагается сравнить полученный графический результат с аналитическим решением и определить относительную ошибку расчетов.

Для усвоения методики составления алгоритма и его реализации в программе на ознакомительном этапе в целях сохранения наглядности программируемых уравнений рекомендуется не применять процедуры Rkadapt, Rkfixed, Odesolve, Bulstoer.

Предлагается использовать метод Эйлера, напоминая о возможности записи дифференциального уравнения первого порядка в конечных разностях:

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y); \quad dY = f(t, Y)dt \quad dY \approx Y_{i+1} - Y_i;$$

$$dt \approx \Delta t; \quad \Delta t = const; \quad Y_{i+1} = f(t_i, Y_i)\Delta t + Y_i; \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Записывается алгоритм:

для  $i = 1, 2, \dots, N$  последовательно вычислить значения скорости и координат

$$\dot{Y}_{i+1} = (F(t_i, Y_i, \dot{Y}_i))\Delta t + \dot{Y}_i \quad Y_{i+1} = \dot{Y}_i \Delta t + Y_i, \text{ если заданы } \dot{Y}_0 \text{ и } Y_0.$$

Обращается внимание на неумение пакета "Mathcad" работать со встроенными циклами без применения команды "программирование". Указывается, что при составлении программы удобно применить запись полученных значений  $\dot{Y}_i$  и  $Y_i$  в отдельные файлы с целью последующего графического анализа результата.

Анализ результатов позволяет оценить характерное время механического процесса, использовать их для оценок расчетного интервала. Ниже, в качестве примера, приводится программа для исследования прямолинейного движения материальной точки в вязкой среде.

Программа решения дифференциального уравнения одномерного движения точки

Ввод данных

Интервал интегрирования (в секундах)	LT := 100
Число узлов интегрирования	N := 100
Ускорение свободного падения (м/сек)	g := 9.8
Коэффициент учета силы тяжести	A := 1
Масса точки (кг)	m := 1

Коэффициенты пропорциональности

для силы сопротивления	BV := 0.090
для силы упругости	CY := 0.000

Показатели степени

для силы сопротивления	Nv := 1
для силы упругости	Ny := 1

Начальное положение точки (м)

$$Y_0 := 10000$$

Начальная скорость (м/с)

$$V_0 := 0$$

Решение

Шаг интегрирования (сек)	DT := $\frac{LT}{N}$	DT = 1	
FF := $\frac{CY}{m}$	FF = 0	BB := $\frac{BV}{m}$	BB = 0.09

Формирование вектора значений скорости (V[1:N])

WRITEPRN("V.TXT") := for I ∈ 1..N

$$\left| \begin{array}{l} V_I \leftarrow [V_{I-1} - FF \cdot DT \cdot (Y_{I-1})^{N_y} - BB \cdot DT \cdot (V_{I-1})^{N_v} - A \cdot g \cdot DT] \\ Y_I \leftarrow (Y_{I-1} + DT \cdot V_{I-1}) \\ V \end{array} \right.$$

Формирование вектора значений координаты (Y[1:N])

WRITEPRN("Y.TXT") := for I ∈ 1.. N

$$\begin{cases} V_I \leftarrow [V_{I-1} - FF \cdot DT \cdot (Y_{I-1})^{Ny} - BB \cdot DT \cdot (V_{I-1})^{Nv} - A \cdot g \cdot DT] \\ Y_I \leftarrow (Y_{I-1} + DT \cdot V_{I-1}) \\ Y \end{cases}$$

Построение графиков

K := 0.. N

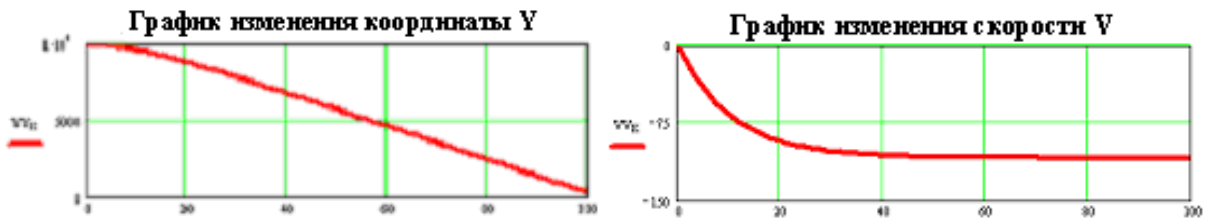
TK := K · DT

TKON := DT · N

TKON = 100

YYK := READ("Y.TXT")

VVK := READ("V.TXT")



Конец программы.

Полученные графики сравниваются с аналитическим решением, в котором присутствует функция  $exp(-kt)$ . По графикам определяются время падения точки, скорость и время установившегося движения.

Далее, изменив данные, вводя в программу различные значения коэффициента сопротивления среды, предлагается решить дифференциальное уравнение затухающих колебаний, исследовать аperiодическое движение. Уместно дать понятие фазовой плоскости, направления обхода фазовой кривой, устойчивости движения.

Рекомендуется, получив графический результат, проанализировать его (рис.1)

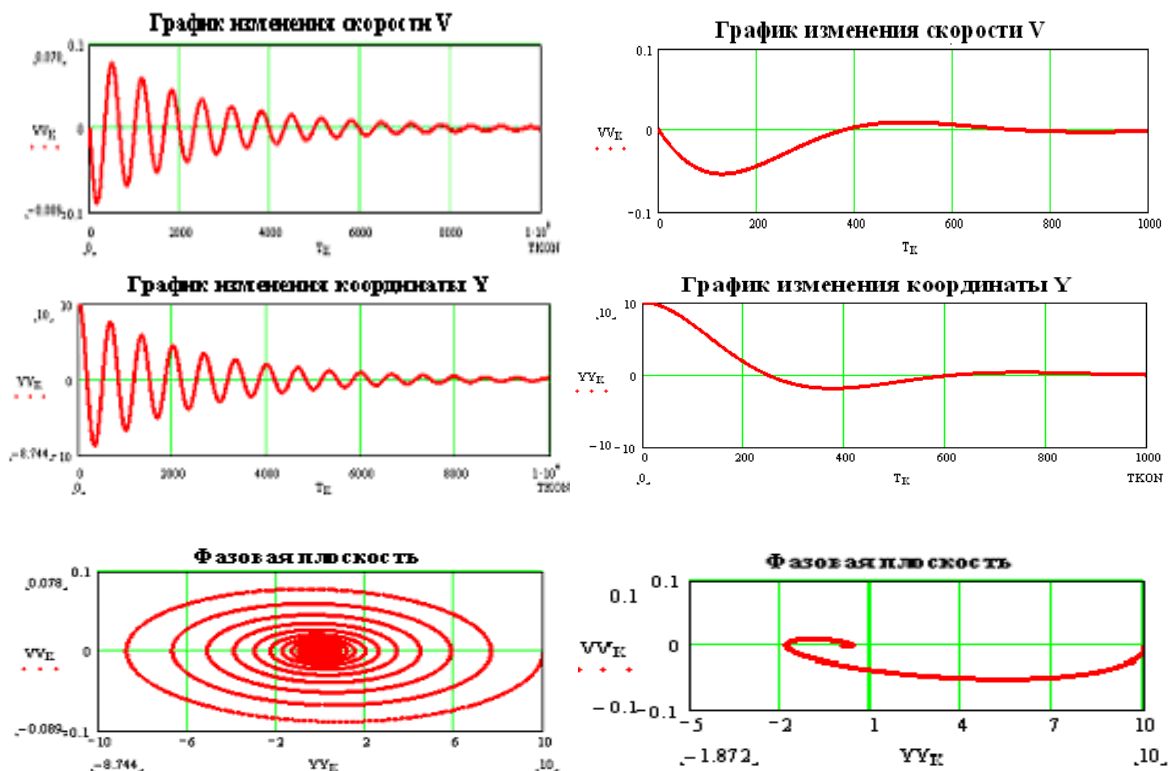


Рис.1.

Аналогичная методика применяется и в задачах двумерного движения материальной точки. Указывается, что в этом случае необходимо составить систему четырех дифференциальных уравнений:

$$\dot{X} = V_X \quad \dot{Y} = V_Y, \quad \dot{V}_X = \left(\frac{1}{m}\right)(F_X(t, X, Y, \dot{X}, \dot{Y})) \quad \dot{V}_Y = \left(\frac{1}{m}\right)(F_Y(t, X, Y, \dot{X}, \dot{Y})).$$

Алгоритм решения такой системы подобен предыдущему. Для исследования движения точки в вязкой среде в программе вводится вектор значений коэффициента сопротивления среды. При составлении программы используется понятие внешнего и внутреннего циклов: по параметру сопротивления среды и по интервалу интегрирования. Ниже приводится фрагмент программы.

```
WRITEPRN ("VY.TXT") := for SS ∈ 0..SN - 1
  for I ∈ 1..N
    VN ← (VYSS,I-1)Nv
    VYSS,I ← (VYSS,I-1 - BBSS · VN · DT - g · DT)
    YSS,I ← (YSS,I-1 + DT · VYSS,I-1)
    VYSS,I
  VY
```

Графические результаты, приведенные на рис.2, позволяют оценить влияние коэффициента сопротивления на движение точки.

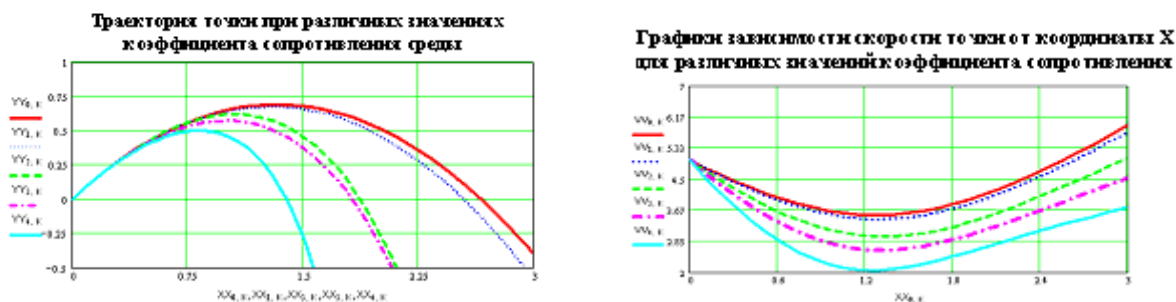


Рис.2

Принимая во внимание условия загруженности компьютерных классов и сокращение часов, отводимых на изучение теоретической механики, следует отметить, что применение описанной технологии самостоятельной работы подтвердило ее доступность и эффективность. При таком подходе не тратится время на обучение работе со стандартным пакетом. Активные в учебе студенты заинтересованно относятся к таким домашним заданиям. Полученные ими графики с интересом анализируются на последующих практических занятиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. - М.: Высш. шк., 1986. 136.
2. Носов В. М. Программирование на персональных ЭВМ задач теоретической механики: Учеб. пособие для инженерно - техн. специальностей вузов / М - во образования Респ. Беларусь. - Минск: ТЕХНОПРИНТ, 1997 - 367,[9]с.: ил.