

СЛАБЫЕ РАЗРЫВЫ В МАГНИТОУПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ С ИДЕАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Босяков С.М., Скляр О.Н.

The equation of characteristics for system of the equations of movement isotropic magnet-elastic media with ideal conductivity is obtained and expressions for velocities of propagation magnet-elastic waves are found. The analysis of influence of a magnetic field on change of values of velocities of propagation of elastic waves for various angles of an declination of a normal to a characteristic surface is carried out. The equations of bicharacteristics are obtained and three-dimensional fronts magnet-elastic waves is constructed. It is shown, that for the certain values a component of a vector of a magnetic induction, on a surface magnet-elastic quasitransversal waves originate two lacunas. Components of a vector discontinuities are determined.

Теория магнитоупругости изучает взаимное воздействие поля деформаций и электромагнитного поля в твердом теле, и является одним из современных направлений механики деформируемого твердого тела [1]. Результаты исследований в этой области механики сплошных сред относятся к одномерным и двумерным динамическим процессам в магнитоупругих средах с идеальной и реальной проводимостью [2, 3]. Настоящая работа посвящена изучению закономерностей распространения объемных магнитоупругих волн в изотропной среде с идеальной проводимостью с позиций метода характеристик (метода слабых разрывов) [4]. Разрешающая система уравнений имеет следующий вид [2]:

$$A_4 \Delta \vec{u} + (A_1 - A_4) \text{grad} \text{div} \vec{u} + \frac{1}{\mu_e} \text{rot} \left(\text{rot} (\vec{u} \times \vec{B}) \right) \times \vec{B} = \rho \ddot{\vec{u}}, \quad (1)$$

где A_1, A_4 - константы упругости материала; $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ - вектор магнитной индукции; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор перемещений; μ_e и ρ - абсолютная магнитная проницаемость и плотность среды соответственно; Δ - оператор Лапласа.

Начальные данные для системы (1) зададим на поверхности $Z = Z(t, x_1, x_2, x_3)$ и перейдем к новым переменным $Z = Z(t, x_1, x_2, x_3)$ и $Z_i = Z_i(t, x_1, x_2, x_3)$ [4]. Следуя стандартной процедуре [4], из (1) будем иметь характеристическое уравнение

$$\det \| w_{ij} \|_{3 \times 3} = 0, \quad (2)$$

где $w_{ii} = g^2 + (a - 1) p_i^2 - p_0^2 / c_2^2 + p_i^2 (b_k^2 + b_l^2) + p_k^2 b_k^2 + p_l^2 b_l^2 + 2 p_k p_l b_k b_l$;

$w_{ik} = w_{ki} = (a - 1) p_i p_k - (p_i^2 + p_k^2) b_i b_k + p_i p_k b_l^2 - p_l b_l (p_i b_k + p_k b_i)$; $p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}$;

$p_i = \frac{\partial Z}{\partial x_i}$; $g = |\text{grad} Z|$; $a = A_1 / A_4$; $c_2 = \sqrt{A_4 / \rho}$; $b_k = B_k / A_4 \mu_e$; $i \neq k \neq l = \overline{1, 3}$.

Из (2) после несложных преобразований, получим следующие выражения для частных производных по времени t от Z :

$$p_0^{(1,2)} = c_2 \sqrt{\frac{g}{2} \left(g a_1 \pm \sqrt{a_2^2 g^2 + 4(1-a)s^2} \right)}, \quad (3)$$

$$p_0^{(3)} = c_2 \sqrt{g^2 + s^2}.$$

В (3) введены обозначения $a_1 = a + 1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, $a_2 = a - 1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, $s = b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3$.

Отсюда для безразмерных скоростей распространения магнитоупругих волн будем иметь

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a_1 \pm \sqrt{a_2^2 + 4(1-a)\tilde{s}^2} \right)}, v_3 = \sqrt{1 + \tilde{s}^2}. \quad (4)$$

Здесь $v = V/c_2$ - безразмерная скорость распространения поверхности разрыва; $V = p_0/g$; $\tilde{s} = b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3$; $n_k = \cos \alpha_k = p_k/g$ - направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности, $k = \overline{1,3}$.

Формулы (4) показывают, что скорости волн, распространяющихся в изотропной магнитоупругой среде, зависят от направления распространения (направления нормали к характеристической поверхности), а также от значений компонентов вектора \vec{B} . В случае равенства нулю составляющих вектора магнитной индукции (4) переходят в выражения для безразмерных скоростей распространения продольной ($v_1 = \sqrt{a}$) и поперечных ($v_{2,3} = 1$) волн.

На рис. 1 приведены поверхности обратных скоростей $1/v_k$, $k = \overline{1,3}$ магнитоупругих волн для материала с идеальной проводимостью, находящегося в магнитном поле с индукцией $b_1 = b_3 = 0,5$ и $b_2 = 1$ (упругие свойства материала характеризуются коэффициентом $a = 2.723$).

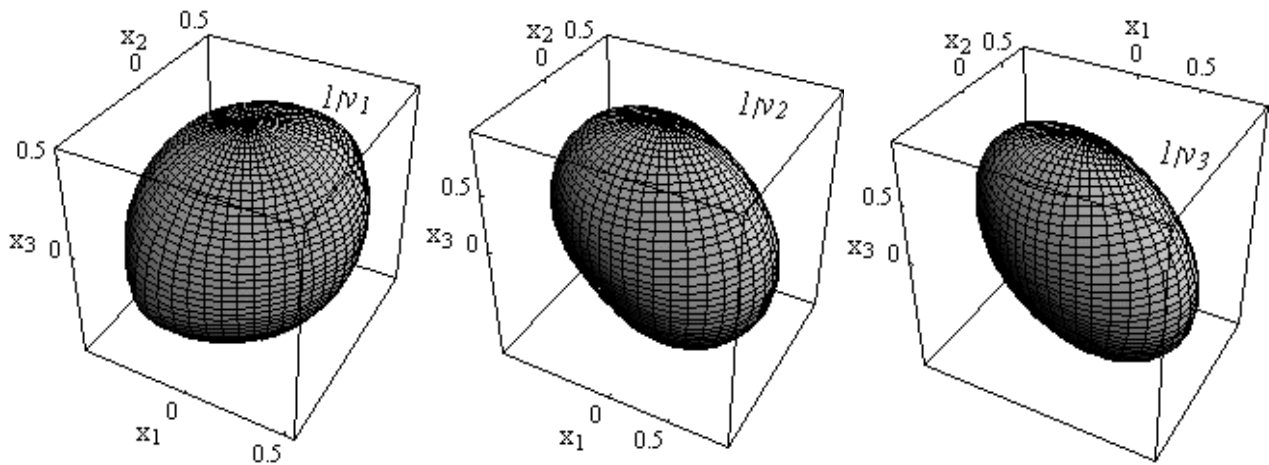


Рис. 1. Поверхности обратных скоростей $1/v_k$, $k = \overline{1,3}$ магнитоупругих волн, распространяющихся в изотропной среде с идеальной проводимостью

Из рис. 1 видно, что поверхность обратных скоростей $1/v_2$ содержит два участка, на которых выпуклость переходит вогнутость. Это указывает на появление двух лакун на трехмерном фронте магнитоупругой волны, распространяющейся со скоростью v_2 . Поверхности обратных скоростей $1/v_1$ и $1/v_3$ вышеуказанными особенностями не обладают, то есть распространение магнитоупругих волн со скоростями v_1 и v_3 не сопровождается образованием лакун.

Задавая соответствующие направляющие косинусы n_k нормали к характеристической поверхности, с помощью (4) можно построить сечения поверхностей обратных скоростей плоскостями координат, а также плоскостями, проходящими через начало координат.

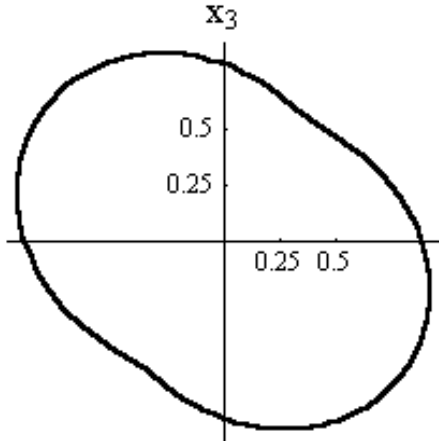


Рис. 2. Кривая обратных скоростей $1/v_2$ в плоскости, составляющей с плоскостью $x_2 = 0$ угол $\pi/4$

На рис. 2 показано сечение поверхности $1/v_2$ плоскостью, получаемой поворотом координатной плоскости $x_2 = 0$ вокруг оси x_3 на угол $\pi/4$ против часовой стрелки (числовые данные те же).

Из рис. 2 видно, что на кривой обратных скоростей $1/v_2$ можно выделить два участка, где касательная к кривой касается ее в двух различных точках. Наличие таких касательных является необходимым признаком появления лакун на волновом фронте в плоскости «падения» [4]. Поэтому в плоскости, составляющей с плоскостью $x_2 = 0$ угол $\pi/4$, возникают две лакуны. Найдем бихарактеристики системы (1).

Для этого продифференцируем выражения для $p_0^{(k)}$ по p_i , $i, k = \overline{1,3}$.

$$\frac{\partial p_0^{(1,2)}}{\partial p_i} = \frac{dx_i^{(1,2)}}{dt} = \frac{2p_i a_1 + \frac{g(4(1-a)b_3 s \pm p_i a_2^2)}{\sqrt{4(1-a)s^2 + a_2^2 g^2}} \pm \frac{p_i}{g} \sqrt{4(1-a)s^2 + a_2^2 g^2}}{2\sqrt{2g(ag \pm \sqrt{4(1-a)s^2 + a_2^2 g^2})}} c_2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial p_0^{(3)}}{\partial p_i} = \frac{dx_i^{(3)}}{dt} = \frac{c_2(p_i + b_i s)}{\sqrt{g^2 + s^2}}.$$

Интегрируя правые части (5) по времени t , будем иметь искомые бихарактеристики:

$$x_i^{(1,2)} = \frac{c_2 t}{4v_{1,2}} \left(2n_i a_1 + \frac{(4(1-a)b_3 \bar{b} \pm n_i a_2^2)}{\sqrt{4(1-a)\bar{b}^2 + a_2^2}} \pm n_i \sqrt{4(1-a)\bar{b}^2 + a_2^2} \right), \quad (6)$$

$$x_i^{(3)} = \frac{(n_i + b_i \bar{b}) c_2 t}{v_3}.$$

Применим (6) для построения поверхностей магнитоупругих волн. На рис. 3 представлены их безразмерные трехмерные фронты l_k , $k = \overline{1,3}$, положение которых определяется соответствующими координатами точек $(x_1^{(k)}/c_2 t, x_2^{(k)}/c_2 t, x_3^{(k)}/c_2 t)$. При построении принимаем $b_1 = b_3 = 0,5$, $b_2 = 1$, $a = 2.723$, $t = 1$ с.

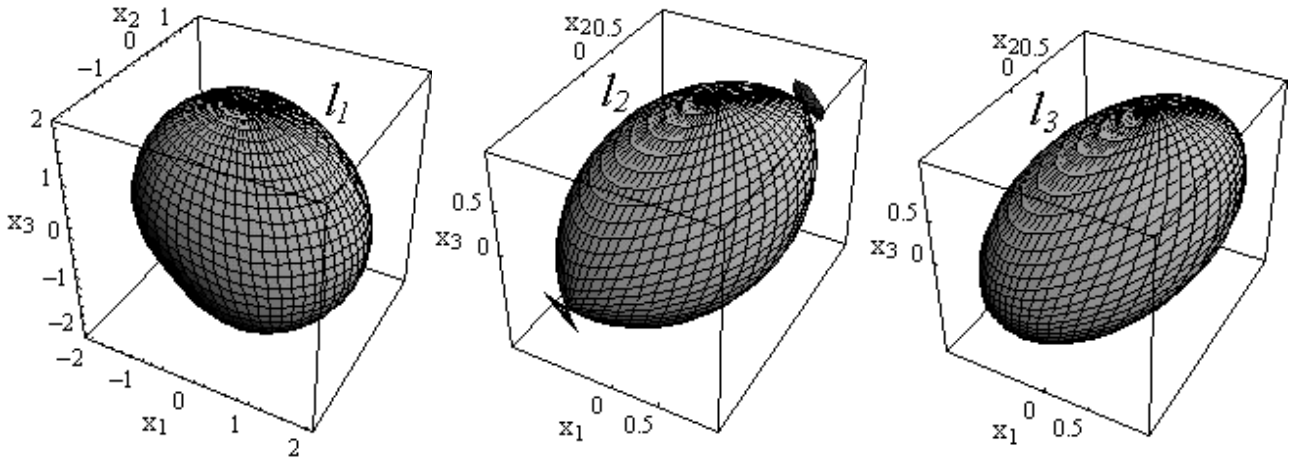


Рис. 3. Трехмерные фронты магнитоупругих волн l_k , $k = \overline{1,3}$, распространяющихся в изотропной среде с идеальной проводимостью

Из рис.3 видно, что при распространении магнитоупругой волны со скоростью v_2 при данных значениях компонент вектора магнитной индукции возникают две лакуны. При распространении двух других магнитоупругих волн лакун не возникает.

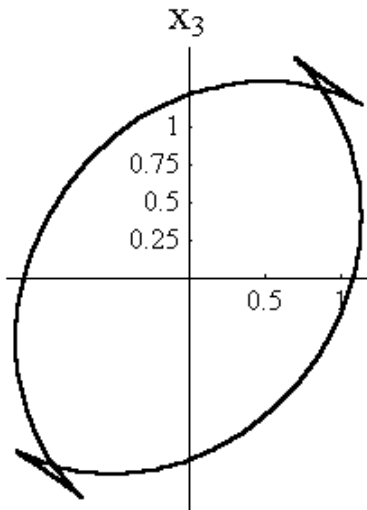


Рис. 4. Волновой фронт l_2 в плоскости, составляющей с плоскостью $x_2 = 0$ угол $\pi/4$

На рис. 4 представлено сечение волновой поверхности $1/v_2$ плоскостью $x_2 = 0$ повернутой вокруг оси x_3 на угол $\pi/4$ против часовой стрелки (числовые данные прежние).

Анализ условий появления лакун под действием магнитного поля показывает, что наблюдать возникновение лакун на волновом фронте l_2 магнитоупругой волны можно при выполнении приближенного равенства единице хотя бы одной из трех компонент вектора магнитной индукции. Так, например, появление лакун можно наблюдать в случаях, когда $b_1 = b_3 = 0,2$, $b_2 = 1$ или $b_1 = b_2 = b_3 = 1$.

Исследуем характер фронтов магнитоупругих волн, распространяющихся в изотропной среде с идеальной проводимостью. Введем вектор прерывности $\vec{h}^{(k)} = (h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, h_3^{(k)})$, $k = \overline{1,3}$. Для определения отношений компонент вектора прерывности имеем следующую систему неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{11} + \tilde{w}_{12}H_2^{(k)} + \tilde{w}_{13}H_3^{(k)} &= 0, \\ \tilde{w}_{21} + \tilde{w}_{22}H_2^{(k)} + \tilde{w}_{23}H_3^{(k)} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $H_2^{(k)} = h_2^{(k)} / h_1^{(k)}$, $H_3^{(k)} = h_3^{(k)} / h_1^{(k)}$.

Выпишем коэффициенты системы (7):

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{11} &= 1 + (a - 1 + 2b^2)n_1^2 + (n_2 + n_3)^2 b^2 - v^2, \\ \tilde{w}_{22} &= 1 + (a - 1 + 2b^2)n_2^2 + (n_1 + n_3)^2 b^2 - v^2, \\ \tilde{w}_{12} = \bar{w}_{21} &= (a - 1)n_1 n_2 - (n_1^2 + n_2^2 - n_1 n_2 + n_3(n_1 + n_2))b^2, \\ \tilde{w}_{13} &= (a - 1)n_1 n_3 - (n_1^2 + n_3^2 - n_1 n_3 + n_2(n_1 + n_3))b^2, \\ \tilde{w}_{23} &= (a - 1)n_2 n_3 - (n_2^2 + n_3^2 - n_2 n_3 + n_1(n_2 + n_3))b^2.\end{aligned}$$

Из (7) получаем

$$H_2 = \frac{\tilde{w}_{12}\tilde{w}_{13} - \tilde{w}_{11}\tilde{w}_{23}}{\tilde{w}_{12}\tilde{w}_{23} - \tilde{w}_{13}\tilde{w}_{22}}, H_3 = \frac{\tilde{w}_{12}^2 - \tilde{w}_{11}\tilde{w}_{22}}{\tilde{w}_{13}\tilde{w}_{22} - \tilde{w}_{12}\tilde{w}_{23}}. \quad (8)$$

Выражение для косинуса угла наклона вектора прерывности к нормали характеристической поверхности найдем, подставив (8) в следующее выражение

$$\cos \gamma = \frac{n_1 + n_2 H_2 + n_3 H_3}{\sqrt{1 + H_2^2 + H_3^2}}. \quad (9)$$

Для нахождения косинусов углов между векторами прерывности \vec{h} и нормалью \vec{n} в (9) следует внести выражения для скоростей распространения магнитоупругих волн (4). Так, подставляя в (9) скорость $v_3 = \sqrt{1 + \tilde{s}^2}$, получим $\cos \gamma_3 = 0$, то есть вектор прерывности перпендикулярен нормали к волновой поверхности (поперечная волна). Таким образом, магнитное поле не оказывает влияния на упругие перемещения, сопровождающее распространение этой волны в изотропной среде с идеальной проводимостью.

Анализ зависимостей косинуса угла между векторами \vec{h} и нормалью \vec{n} от направляющих косинусов нормали к волновой поверхности, полученных при подстановке в (9) выражений для скоростей v_1 и v_2 показывает, что наличие магнитного поля в каждом из случаев приводит к изменению ориентации вектора прерывности. Так, в зависимости от направляющих косинусов нормали к поверхности абсолютная величина $\cos \gamma_2$ может принимать значения от нуля до 0,005 ($b_1 = b_2 = b_3 = 0,1$, $a = 2.723$). Это позволяет сделать вывод о том, что магнитоупругие волны, распространяющиеся в изотропной среде с идеальной проводимостью со скоростями v_1 и v_2 , являются квазипродольной и квазипоперечной волнами, то есть действие магнитного поля приводит к появлению анизотропии упругих свойств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бардзокас Д. И. Кудрявцев Б. А., Сенник Н. А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М.: Едиториал УРСС. 2003. 336 с.
2. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
3. Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Магнитоупругость // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М: ВИНТИ. 1981. Т. 14. С. 3—59.
4. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука. 1981. 284 с.