

ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ ДВУХОСНОГО АВТОМОБИЛЯ MAZ-4570

Вихренко В.С., Пищов С.Н.

Spectral theory is used for investigating the characteristics of motion of a vehicle with two vibrational degrees of freedom in longitudinal section. As an example truck MAZ-4570 is considered.

Аналитические исследования динамики машин и механизмов играют важную роль, поскольку при незначительных затратах средств позволяют получить важную информацию, необходимую для проектирования оптимальных устройств или определения оптимальных режимов их эксплуатации. В данной работе на примере MAZ-4570 исследуется возможность использования автомобиля общего назначения для транспортировки грузов по лесным дорогам. Для учета статистического характера воздействия дороги на автомобиль используется спектральная теория поддрессирования транспортных средств [1–3].

Динамическая модель автомобиля и ее спектральные характеристики. Рассмотрим автомобиль, движущийся со скоростью u по горизонтальному участку дороги. Предположим, что неровности дороги могут быть заданы в виде стационарного случайного процесса, статистические характеристики которого определяются двухточечной корреляционной функцией. Расчетная схема автомобиля представлена на рис. 1.

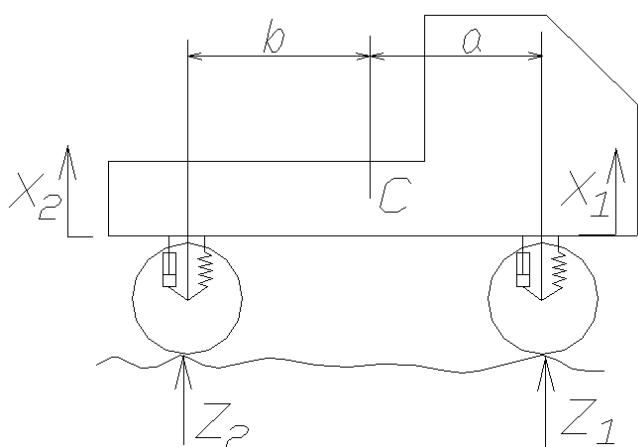


Рис. 1. Расчетная схема автомобиля
 C – центр масс автомобиля, x_1 и x_2 – вертикальные перемещения поддрессоренных масс, z_1 и z_2 – профиль дороги под колесами автомобиля, отсчитываемый от среднего уровня.

Для упрощения расчетов исследуем плоское движение автомобиля как твердого тела. В этом случае его колебаниями относительно продольной оси можно пренебречь. Автомобиль обладает двумя колебательными степенями свободы. В качестве обобщенных координат выберем вертикальные перемещения x_1 и x_2 точек автомобиля над передней и задней его осями.

Для составления уравнений движения используем уравнения Лагранжа второго рода.

Вычисляя вертикальную составляющую скорости движения центра масс автомобиля и его угловую скорость, запишем выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{ax_2 + bx_1}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{l} \right)^2, \quad (1)$$

где m – масса автомобиля, $l = a + b$ – его база, a и b – расстояния от центра масс до передней и задней осей, соответственно, J – момент инерции автомобиля относительно его центра масс.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = mg \left(\frac{ax_2 + bx_1}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} c_1 \lambda_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \lambda_2^2, \quad (2)$$

где $\lambda_1 = \lambda_{\text{н}01} + x_1 - z_1$ и $\lambda_2 = \lambda_{\text{н}02} + x_2 - z_2$ – деформации передних и задних рессор, соответственно, $\lambda_{\text{н}01}$, $\lambda_{\text{н}02}$ – их статические деформации, c_1 и c_2 – жесткости рессор.

Для описания влияния демпферов воспользуемся диссипативной функцией Релея:

$$R = \frac{1}{2} \mu_1 (\dot{x}_1 - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2} \mu_2 (\dot{x}_2 - \dot{z}_2)^2, \quad (3)$$

где μ_1 и μ_2 – коэффициенты сопротивления передних и задних амортизаторов.

После соответствующих вычислений система уравнений Лагранжа принимает вид:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{x}_1 + a_{12} \ddot{x}_2 + \mu_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 &= c_1 z_1 + \mu_1 \dot{z}_1, \\ a_{21} \ddot{x}_1 + a_{22} \ddot{x}_2 + \mu_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 &= c_2 z_2 + \mu_2 \dot{z}_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где для коэффициентов инерции введены обозначения $a_{11} = (mb^2 + J)/l^2$, $a_{21} = a_{12} = (mab - J)/l^2$, $a_{22} = (ma^2 + J)/l^2$.

Полученная система уравнений может быть сведена к системе двух независимых уравнений, если предположить, что между массой автомобиля m , его центральным моментом инерции J и геометрическими параметрами выполняется соотношение $J = mab$. В этом случае колебания передней и задней подвесок являются независимыми, так как $a_{12} = a_{21} = 0$, и их исследование значительно упрощается [4]. Ниже рассмотрен общий случай, поскольку для рассматриваемого автомобиля МАЗ-4570 $a_{12} = a_{21} \neq 0$.

Выполняя преобразование Лапласа, приведем систему уравнений (4) к виду:

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= W_{11}(\omega)Z_1(\omega) + W_{12}(\omega)Z_2(\omega), \\ X_2(\omega) &= W_{21}(\omega)Z_1(\omega) + W_{22}(\omega)Z_2(\omega), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} W_{11} &= [(-c_1 a_{22} - \mu_1 \mu_2) \omega^2 + c_1 c_2 + (c_1 \mu_2 - a_{22} \mu_1 \omega^2 + c_2 \mu_1) \omega \cdot i] / \Delta, \\ W_{12} &= (c_2 a_{12} \omega^2 + a_{12} \mu_2 \omega^3 i) / \Delta, \quad W_{21} = (c_1 a_{12} \omega^2 + a_{12} \mu_1 \omega^3 i) / \Delta, \\ W_{22} &= [(-c_2 a_{11} - \mu_1 \mu_2) \omega^2 + c_1 c_2 + (c_2 \mu_1 - a_{11} \mu_2 \omega^2 + c_1 \mu_2) \omega \cdot i] / \Delta \end{aligned} \quad (6)$$

– так называемые передаточные функции системы, $i = \sqrt{-1}$,

$$\Delta = (c_1 - a_{11} \omega^2)(c_2 - a_{22} \omega^2) - a_{12}^2 \omega^4 + [(c_1 - a_{11} \omega^2) \mu_2 + (c_2 - a_{22} \omega^2) \mu_1] \omega \cdot i.$$

Для получения спектральной плотности колебаний необходимо вычислить спектральные плотности автокорреляционных функций перемещения подвесок

$$R_{X,j}(\omega) = \langle X_j(\omega) \cdot X_j^*(\omega) \rangle, \quad j=1,2, \quad (7)$$

где звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения, а угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по участкам дороги.

После использования в (7) системы уравнений (5) и некоторых преобразований получим спектральные плотности колебаний передней и задней осей автомобиля

$$\begin{aligned} R_{X1}(\omega) &= [|W_{11}(\omega)|^2 + |W_{12}(\omega)|^2 + \text{Re}(W_{11}(\omega) \cdot W_{12}^*(\omega)) \cos(\omega \cdot l / u)] \cdot R_Z(\omega), \\ R_{X2}(\omega) &= [|W_{21}(\omega)|^2 + |W_{22}(\omega)|^2 + \text{Re}(W_{21}(\omega) \cdot W_{22}^*(\omega)) \cos(\omega \cdot l / u)] \cdot R_Z(\omega), \end{aligned} \quad (8)$$

где символ $\text{Re}(\dots)$ выделяет действительную часть выражения в скобках, $R_Z(\omega)$ – спектральная плотность корреляционной функции дороги.

Одной из наиболее распространенных зависимостей, используемых для аппроксимации статистических характеристик дороги, является корреляционная функция вида

$$R_Z(s) = D_Z e^{-\alpha_S |s|} \cos(\beta_S s), \quad (9)$$

где α_s характеризует интенсивность затухания корреляционной функции в зависимости от расстояния s между точками дороги, тогда как β_s определяет характерную длину неровностей дороги. D_Z равно среднему квадрату отклонений профиля дороги от среднего значения, $D_Z = \langle z^2 \rangle$.

Переход ко времени осуществляется с учетом скорости u движения автомобиля $s = ut$. При этом корреляционная функция дороги приобретает вид:

$$R_Z(t) = D_Z e^{-\alpha|t|} \cos(\beta t), \quad (10)$$

где $\alpha = \alpha_s u$, $\beta = \beta_s u$. Ее Фурье преобразование

$$R_Z(\omega) = \frac{D_Z}{\pi} \left(\frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \right). \quad (11)$$

Важными характеристиками плавности движения автомобиля являются вертикальные составляющие ускорений движения подрессоренных масс. Их спектральные плотности

$$S_a(\omega) = \omega^4 R_X(\omega). \quad (12)$$

Для определения динамической нагруженности подвески необходимо определить спектральную плотность действующих сил. Силы, действующие на подвеску автомобиля

$$R_j(t) = c_j(z_j - x_j) + \mu_j(\dot{z}_j - \dot{x}_j), \quad j=1, 2. \quad (13)$$

После применения преобразования Лапласа и некоторых упрощений выражение спектральной плотности сил для передней и задней подвесок приобретает вид

$$S_{f1} = (c_1^2 + \mu_1^2 \omega^2) \{ R_Z(\omega) [1 - 2(\operatorname{Re} W_{11}) - \operatorname{Re} W_{12} \cos(\omega l / u) + \operatorname{Im} W_{12} \sin(\omega l / u)] + R_{X1}(\omega) \}, \quad (14)$$

$$S_{f2} = (c_2^2 + \mu_2^2 \omega^2) \{ R_Z(\omega) [1 - 2(\operatorname{Re} W_{22}) - \operatorname{Re} W_{21} \cos(\omega l / u) + \operatorname{Im} W_{21} \sin(\omega l / u)] + R_{X2}(\omega) \}. \quad (15)$$

Результаты вычислений и их анализ. В качестве реальной модели рассмотрим МАЗ-4570, который по данным завода-изготовителя имеет следующие характеристики: $l=3$ м, $a=1,953$ м, $b=1,047$ м, $J=26\,000$ кгм², $m=9165$ кг, жесткость передней подвески 1300 Н/см, жесткость задней подвески 5600 Н/см, коэффициент сопротивления амортизаторов 4000 кг/с для обеих подвесок. В целом и рессоры, и амортизаторы имеют нелинейные характеристики, и здесь приведены их линеанизированные значения. Необходимо отметить, что произведение $tab=18740$ существенно меньше значения момента инерции. Поэтому колебания подвесок нельзя рассматривать как независимые. С целью оценки возможности использования автомобиля в местах заготовки лесоматериалов исследуем его движение по лесному волоку со следующими характеристиками $\beta_s=0,71$ 1/м, $\alpha_s=0,15$ 1/м [3].

Графики спектральной плотности колебаний подвесок автомобиля, представленные на рис. 2, имеют по два максимума. Максимумы на меньших частотах определяются корреляционной функцией дороги, а на частотах, близких к 6 с⁻¹ и 9 с⁻¹ (для передней и задней подвесок, соответственно) определяются передаточными функциями автомобиля, которые на этих частотах достигают своего максимума. Для передней подвески имеет место и третий максимум. Он достигается вследствие перекрестной передаточной функции, максимум кото-

рой находится на частоте близкой к 9 с^{-1} . Скорость движения автомобиля практически не влияет на положение высокочастотных максимумов, но определяет их абсолютные значения.

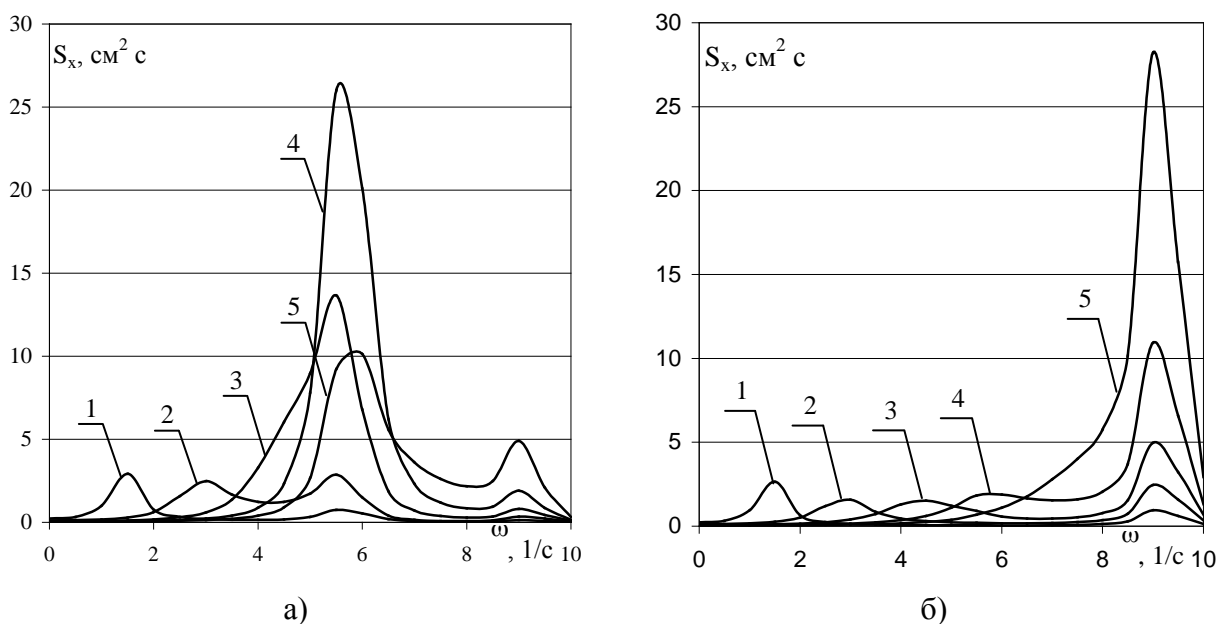


Рис. 2. Спектральные плотности перемещений (а и б – передняя и задняя подвески) при различных скоростях движения автомобиля: $u=2 \text{ м/с}$ (кривая 1), 4 (2), 6 (3), 8 (4), 10 (5).

Спектральные плотности ускорений движения представлены на рис. 3. Четвертая степень частоты, присутствующая в качестве множителя в выражении для этих спектральных плотностей, приводит к резкому увеличению вкладов высокочастотных участков

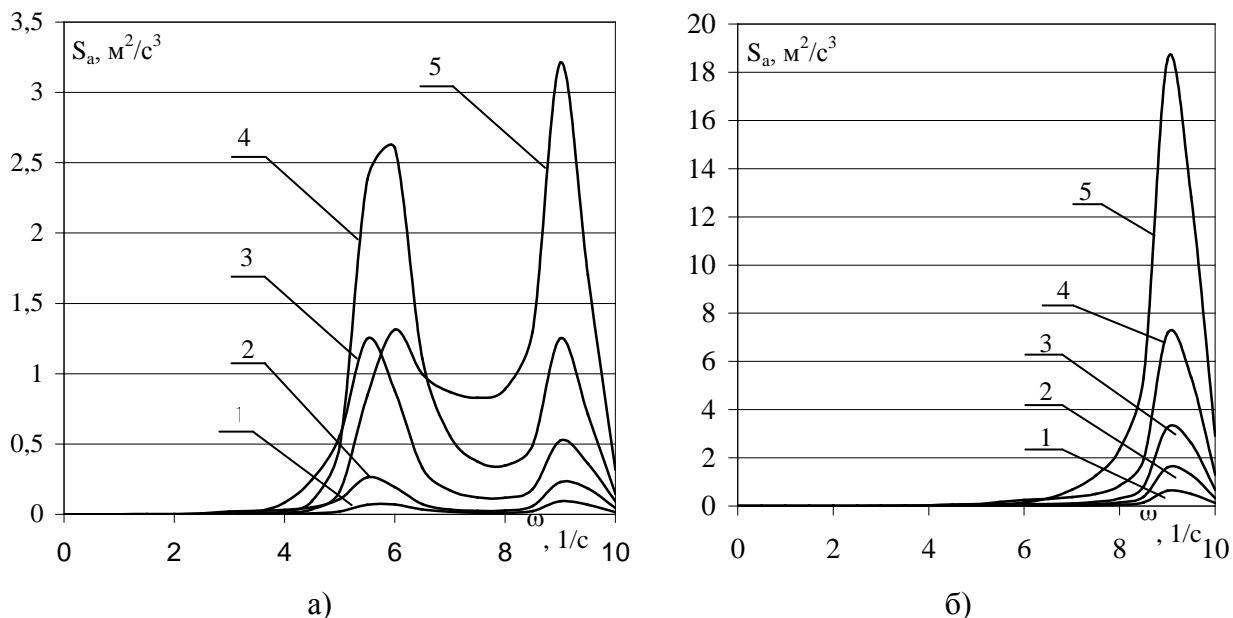


Рис. 3. Спектральные плотности ускорений (а и б – передняя и задняя подвески) при различных скоростях движения автомобиля: $u=2 \text{ м/с}$ (кривая 1), 4 (2), 6 (3), 8 (4), 10 (5).

спектральной плотности $S_X(\omega)$ и, фактически, остаются лишь высокочастотные пики. Для передней подвески четко выражены оба высокочастотных пика. Второй пик, как указано выше, обусловлен перекрестной передаточной функцией. Это обстоятельство подчеркивает

важность учета взаимовлияния колебаний подвесок, и это взаимовлияние более существенно сказывается на поведении передней подвески.

Среднеквадратичные силы определяются путем интегрирования спектральной плотности сил для передней и задней подвесок (14) и (15), соответственно. Вычисления произведены для каждой скорости движения автомобиля. Значения среднеквадратичных сил, возникающих в передней и задней подвесках автомобиля, приведены в табл. 1.

Таблица 1

u , м/с	2	4	6	8	10
$\langle F^2 \rangle^{1/2}$ (Н) передняя	1482	2 932	5 538	7 636	6 731
$\langle F^2 \rangle^{1/2}$ (Н) задняя	5 829	9 400	13 712	20 324	31 371

Заключение. В работе получены зависимости спектральных характеристик вертикальных перемещений подрессоренных масс и действующих на них сил от параметров автомобиля, скорости его движения и дорожных условий. Для серийного среднетоннажного автомобиля МАЗ 4570 выполнены вычисления и построены графики спектральных характеристик при различных скоростях движения по лесному волоку.

Показано, что возникающие усилия с учетом их случайного и динамического характера оказываются весьма значительными, и использование грузовых автомобилей общего назначения в условиях лесозаготовок не желательно. Для лесозаготовительной промышленности необходимо проектировать подвески автомобилей с учетом тяжелых дорожных условий, в которых эти автомобили будут работать. Спектральная теория подрессоривания позволяет осуществить оценку взаимовлияния различных факторов на характеристики движения транспортных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Силаев А.А. Спектральная теория подрессоривания транспортных машин. – М.: Лесная промышленность, 1972.
2. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1976.
3. Орлов С.Ф., Жуков А.В., Козьмин С.Ф. Спектральная теория подрессоривания специальных лесных машин. – Ленинград: ЛЛТА, 1980.
4. Дубинин О.В. Анализ зависимости статистических характеристик колебаний автомобиля от скорости его движения // 54-я студенч. науч.-тех. конф. / Материалы конф. – Минск: БГТУ, 2003. – Ч. 2. – С. 107 – 108.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ СПЛОШНОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Крушевский А.Е., Крушевский Е.А.

The equations of continuity of deformation in free curvilinear coordinates are received in that article. As an example the generalized nonorthogonal cylindrical coordinates are considered

Выводу уравнений сплошности посвящена многочисленная литература [1, 2, 3]. В частности, в декартовых координатах эти уравнения приводятся в каждом достаточно полном учебнике по механике деформируемого тела [1]. В других системах координат, например, в цилиндрических и сферических можно найти в книге А.И. Лурье [3], где рассмотрен также и общий случай ортогональных координат. Что касается неортогональных систем координат, то вывод таких уравнений сопровождается сложными выкладками. В связи со сказанным следует отметить некорректность вывода уравнений сплошности в книге Сокольников [2] на основе «линеаризации» тензора Римана первого рода. Выведенные им уравнения

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} = 0$$

справедливы лишь для декартовых систем. Эти уравнения выводятся не путем «линеаризации», а в результате обращения в нуль символов Кристоффеля первого и второго рода для декартовых систем.

Наиболее рациональный способ получения уравнений сплошности, как отмечено в работах Лурье А.И. [3], основан на условии существования потенциала для тензора деформации, т.е. из условия $rot(rotE)^* = 0$, где E – тензор деформации,

$(rotE)^*$ – транспонированный ротор тензора деформации.

Зная компоненты симметричного тензора деформации $E(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})$, находим сначала компоненты тензора

$$(rotE)^* = \frac{1}{\sqrt{g}} e^\beta \left[e_1 \left(\frac{\partial \varepsilon_{\beta 3}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{\beta 2}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{\beta 2}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{\beta 3}^\alpha \right) + \right. \\ \left. + \dot{a}_2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{\beta 1}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{\beta 3}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{\beta 3}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{\beta 1}^\alpha \right) + \dot{a}_3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{\beta 2}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{\beta 1}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{\beta 1}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{\beta 2}^\alpha \right) \right]$$

где $g = \det g_{ij}$, g_{ij} – ковариантный метрический тензор, e_1, e_2, e_3 – ковариантный базис, $\Gamma_{\beta 1}^\alpha, \Gamma_{\beta 2}^\alpha, \Gamma_{\beta 3}^\alpha$ – символы Кристоффеля II рода, α, β – немые индексы (индексы суммирования), x^1, x^2, x^3 – криволинейные координаты.

Применяя затем операцию rot к тензор $(rotE)^*$, получим

$$rot(rotE)^* = \frac{e_1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{e_1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{32}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{33}^\alpha \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\dot{a}_2}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{33}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{31}^\alpha \right) + \frac{\dot{a}_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{31}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{32}^\alpha \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[\frac{\dot{a}_1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{22}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{23}^\alpha \right) + \frac{\dot{a}_2}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{23}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{21}^\alpha \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\dot{a}_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{21}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{22}^\alpha \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\dot{a}_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{21}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{22}^\alpha \right) \Bigg] \Bigg\} + \frac{\dot{a}_2}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^3} \left[\frac{\dot{a}_1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{12}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{13}^\alpha \right) + \right. \right. \\
& + \frac{e_2}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{13}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{11}^\alpha \right) + \frac{e_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^1} - \right. \\
& - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{11}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{12}^\alpha \Bigg) \Bigg] - \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{\dot{a}_1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^2} - \right. \right. \\
& - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{32}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{33}^\alpha \Bigg) + \frac{e_2}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{33}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{31}^\alpha \right) + \\
& + \left. \left. \frac{e_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{31}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{32}^\alpha \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{\dot{a}_3}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{\dot{a}_1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{22}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{23}^\alpha \right) + \frac{\dot{a}_2}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{23}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{21}^\alpha \right) + \right. \right. \\
& + \frac{\dot{a}_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{21}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{22}^\alpha \right) \Bigg] - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{\dot{a}_1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{12}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{13}^\alpha \right) + \right. \\
& + \left. \left. \frac{\dot{a}_2}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{13}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{11}^\alpha \right) + \frac{\dot{a}_3}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{11}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{12}^\alpha \right) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Используя формулы дифференцирования базисных векторов $\frac{\partial e_j}{\partial x^k} = e_m \Gamma_{jk}^m$, получим следующие выражения для шести компонент тензора $rot(rot E)^*$.

$$\begin{aligned}
Q_{11} = & \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{32}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{33}^\alpha \right) \right] + \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{12}^1 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{32}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{33}^\alpha \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{22}^1 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{33}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{31}^\alpha \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{32}^1 \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{31}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{32}^\alpha \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{22}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{23}^\alpha \right) \right] - \\
& - \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{13}^1 \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{22}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{23}^\alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{23}^1 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{23}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{21}^\alpha \right) - \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{33}^1 \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{21}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{22}^\alpha \right) \right\} .
\end{aligned}$$

Для обобщенной (неортогональной) цилиндрической системы координат имеем.

$$\begin{aligned}
x &= \arccos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \quad z = z, \quad g_{11} = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi \\
g_{12} &= (b^2 - a^2) r \sin \varphi \cos \varphi, \quad g_{22} = r^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi), \quad g_{13} = 0
\end{aligned}$$

$$g_{23} = 0, \quad g_{33} = 1, \quad g = a^2 b^2 r^2, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r,$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_r, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\varphi}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{rz}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_\varphi, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\varphi z}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_z$$

$$Q_{rr} = \frac{1}{a^2 b^2} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{r^2 \partial \varphi^2} - \frac{2\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi z}}{\partial \varphi \partial z} - \frac{2\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} + (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} \right\}$$

$$Q_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{12}^2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{32}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{33}^\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{33}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{31}^\alpha \right) \right] + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{22}^2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{33}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{31}^\alpha \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{32}^2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{31}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{32}^\alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{13}^2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{22}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{23}^\alpha \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{23}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{21}^\alpha \right) \right] - \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{23}^2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{23}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{21}^\alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{33}^2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{21}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{22}^\alpha \right) \right\}$$

Для обобщенной цилиндрической системы

$$Q_{r\varphi} = \frac{1}{a^2 b^2 r} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2}{r \partial \varphi \partial z} \left(\varepsilon_{rz} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \right) + r \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\varphi z}}{r \partial z} \right) - \sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial z^2} \right\},$$

$$Q_{13} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{12}^3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{32}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{33}^\alpha \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{22}^3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{33}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{31}^\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{31}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{32}^\alpha \right) \right] + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{32}^3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{31}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{32}^\alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{13}^3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^3} - \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{22}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{21}^\alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{23}^3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1} - \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{23}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 3} \Gamma_{21}^\alpha \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^2} - \varepsilon_{\alpha 2} \Gamma_{21}^\alpha + \varepsilon_{\alpha 1} \Gamma_{22}^\alpha \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{33}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{21}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{22}^\alpha\right)\Big\} \\
Q_{rz} &= \frac{1}{a^2b^2}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\left(r\varepsilon_{\varphi z}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\right)+\frac{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}{r}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial z}+\right. \\
& \left.+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z}\left[\varepsilon_{r\varphi}\sqrt{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}\right]-\right. \\
& \left.-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\varepsilon_{rz}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\right)-\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial z}\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{22} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{13}^2\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3}-\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{12}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{13}^\alpha\right)+\right. \\
& +\frac{\partial}{\partial x^3}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^1}-\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{13}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{11}^\alpha\right)\right]+\frac{\Gamma_{23}^2}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^1}-\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{13}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{11}^\alpha\right)+ \\
& +\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{33}^2\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{11}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{12}^\alpha\right)-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{11}^2\left(\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^3}-\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{32}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{33}^\alpha\right)- \\
& -\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^1}-\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{33}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{31}^\alpha\right)\right]-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{21}^2\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^1}-\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{33}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{31}^\alpha\right)- \\
& \left.-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{31}^2\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{31}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{32}^\alpha\right)\right\}.
\end{aligned}$$

В обобщенных цилиндрических координатах

$$Q_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2b^2r^2} = \left\{ (a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial z^2} - 2\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\varepsilon_{rz}}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial r^2} \right\},$$

$$\begin{aligned}
Q_{23} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{13}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3}-\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{12}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{13}^\alpha\right)+\right. \\
& +\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{23}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^1}-\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{13}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{11}^\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{11}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{12}^\alpha\right)\right]+ \\
& +\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{33}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{11}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{12}^\alpha\right)-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{11}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^3}-\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{32}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{33}^\alpha\right)- \\
& \left.-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{21}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial x^1}-\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{33}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{31}^\alpha\right)-\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{31}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{32}^\alpha\right)\right]-\right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{31}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{31}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{32}^\alpha\right)\Big\}$$

В обобщенных цилиндрических координатах

$$Q_{\varphi z}=\frac{1}{a^2b^2}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varepsilon_{r\varphi}}{\partial z}\right)\sqrt{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}-\right. \\ \left.-\sqrt{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{\varphi z})\right]+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\varepsilon_{rz}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\right)\right]-\right. \\ \left.-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z\partial\varphi}\left[\varepsilon_r(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\right]\right\},$$

$$Q_{33}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{11}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x^3}-\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{22}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{23}^\alpha\right)+\right. \\ \left.+\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{21}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x^1}-\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{23}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{21}^\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{21}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{22}^\alpha\right)\right]+\right. \\ \left.+\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{31}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{21}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{22}^\alpha\right)-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{12}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^3}-\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{12}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{13}^\alpha\right)\right. \\ \left.-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{22}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^3}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x^1}-\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{13}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 3}\Gamma_{11}^\alpha\right)-\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{11}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{12}^\alpha\right)\right]-\right. \\ \left.-\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{23}^3\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x^2}-\varepsilon_{\alpha 2}\Gamma_{11}^\alpha+\varepsilon_{\alpha 1}\Gamma_{12}^\alpha\right)\right\}.$$

Для обобщенных цилиндрических координат

$$Q_{zz}=\frac{1}{a^2b^2}\left\{\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_\varphi+\frac{r\partial\varepsilon_\varphi}{\partial r}\right)+\right. \\ \left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\left[\varepsilon_r(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\right]-\frac{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}{r}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r}-\right. \\ \left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sqrt{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{r\varphi})\right]\right\}.$$

В случае ортогональных цилиндрических координат, т.е. при $a=b=1$ получаем уравнения, приведенные в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В.. Теория упругости и пластичности. М.: Физматлит., 2002, 416 с.
2. Сокольников И.С. Тензорный анализ. М.: Наука, 1971, 376 с.
3. Лурье А.И.. Пространственные задачи теории упругости. М.: Изд. Технико-теоретической литературы. 1955, 492 с.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛ ДЛЯ КРИВИЗНЫ, КРУЧЕНИЯ КРИВОЙ И ОРТОВ ЕСТЕСТВЕННОГО ТРЕХГРАННИКА.

Крушевский А.Е., Крушевский Е.А.

The formula for the modulus of derivative of unit vector with respect to time is received in this article. That formula is used for calculation of curvature and torsion of the curved line.

Формулы для кривизны, кручения и ортов естественного триэдра, в которых независимым аргументом является длина дуги, весьма неудобны при решении задач механики, а переход к параметрическому способу связан с трудоемкими выкладками. Так, например, в [1] приведен лишь переход к параметрическому представлению кривизны кривой, основанный на применении вспомогательной леммы, а вопрос о кручении оставлен в стороне.

Как кривизна, так и кручение вычисляются однотипно по формулам Френе:

$$K = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|, \quad T = \left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right|, \quad \text{где } s - \text{длина дуги, } \vec{\tau} - \text{орт касательной, } \vec{b} - \text{орт бинормали. Выразим}$$

орты касательной и бинормали через такие понятия кинематики, как скорость и ускорение:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}, \quad \text{где } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \text{вектор скорости, } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \text{вектор ускорения, } t - \text{время}$$

(параметр). Напомним, что вектор скорости и вектор ускорения лежат в соприкасающейся плоскости, что и позволило записать формулу для орта бинормали.

Итак, нам необходимо найти длины векторов кривизны и кручения

$$K = \left| \frac{1}{v} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|, \quad T = \left| \frac{1}{v} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} \right|.$$

Рассмотрим произвольный вектор \vec{m} и найдем модуль производной:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} \right) \right| &= \left| \frac{\frac{d\vec{m}}{dt} \cdot |\vec{m}| - \vec{m} \cdot \frac{d}{dt} \sqrt{|\vec{m}|^2}}{|\vec{m}|^2} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{m}|^2} \left[\frac{d\vec{m}}{dt} |\vec{m}| - \frac{\vec{m} \cdot \left(\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} \right)}{\sqrt{|\vec{m}|^2}} \right] \right| = \\ &= \left| \frac{1}{|\vec{m}|^3} \left[\frac{d\vec{m}}{dt} |\vec{m}|^2 - \vec{m} \cdot \left(\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} \right) \right] \right| = \left| \frac{1}{|\vec{m}|^3} \vec{m} \times \left(\frac{d\vec{m}}{dt} \times \vec{m} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{|\vec{m}|^3} \sqrt{\left[\frac{d\vec{m}}{dt} |\vec{m}|^2 - \vec{m} \cdot \left(\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} \right) \right]^2} = \frac{1}{|\vec{m}|^3} \left(\left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)^2 |\vec{m}|^4 - 2 \frac{d\vec{m}}{dt} |\vec{m}|^2 \cdot \vec{m} \cdot \left(\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} \right) + \right. \\ &+ \left. |\vec{m}|^2 \cdot \left| \vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} \right|^2 \right)^{1/2} = \frac{|\vec{m}|}{|\vec{m}|^3} \sqrt{\left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)^2 |\vec{m}|^2 - 2 \frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \vec{m} + \left| \vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} \right|^2} = \\ &= \frac{1}{|\vec{m}|^2} \sqrt{\left| \frac{d\vec{m}}{dt} \right|^2 |\vec{m}|^2 - \left(\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} \right)^2} = \frac{1}{|\vec{m}|^2} \left| \frac{d\vec{m}}{dt} \right| \cdot |\vec{m}| \sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{d\vec{m}}{dt}, \vec{m} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\vec{m}|^2} |\vec{m}| \cdot \left| \frac{d\vec{m}}{dt} \right| \sin \left(\frac{d\vec{m}}{dt}, \vec{m} \right) = \frac{\left| \vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} \right|}{|\vec{m}|^2}.$$

Если $\vec{m} = \vec{v}$, то $K = \left| \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{v} \right) \right| = \frac{1}{v^3} \left| \vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3}$, то есть кривизна кривой равна

отношению модуля векторного произведения вектора скорости на вектор ускорения к кубу скорости.

Если $\vec{m} = \vec{v} \times \vec{a}$, то получим формулу для кручения, а именно

$$T = \frac{1}{v} \frac{\left| d(\vec{v} \times \vec{a}) \right|}{\left| \vec{v} \times \vec{a} \right|} = \frac{\left| (\vec{v} \times \vec{a}) \times \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{a}) \right|}{v |\vec{v} \times \vec{a}|^2} = \frac{\left| (\vec{v} \times \vec{a}) \times (\vec{v} \times \frac{d\vec{a}}{dt}) \right|}{v |\vec{v} \times \vec{a}|^2} =$$

$$= \frac{\left| \vec{v} \cdot \left[(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \right] - \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot [(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{v}] \right|}{v |\vec{v} \times \vec{a}|^2} = \frac{\left| \vec{v} \cdot \left[(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \right] \right|}{v |\vec{v} \times \vec{a}|^2} = \frac{\left| (\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \right|}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2}.$$

В декартовых координатах кривизна и кручение вычисляются по формулам

$$K = \frac{\sqrt{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}},$$

$$T = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{[(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2]}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.2, Гостехиздат, М., 1954, 627 с.
2. Крушевский А.Е. Формула Бура в кинематике криволинейного движения точки. Методические материалы по вопросам преподавания теоретической механики в высшей школе. БТИ. Минск, 1989, с. 70-74.