Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА НЕЛИНЕЙНОГО ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ НА ВНЕШНЕМ ЦИЛИНДРЕ

Гавриленко С.Л., Шилько С.В.

The Coutte-Taylor model identification for nonlinear viscoelastic material has been proposed. The linear-viscous friction on the outer cylinder is taking into account. It's shown that algorithm of regularization stabilizes the numerical solution of incorrect inverse problem under consideration. The rheological constants for liquid-crystal lubricant flow in wide temperature range has been obtained using the rotational viscosimeter and developed numerical procedure.

Введение. Режим вязкого течения с выраженным пределом текучести характерен для большинства технологических процессов, например, метода глубокой вытяжки, основанных на использовании явления сверхпластичности [1,2]. Вязкопластическое течение наблюдается также при получении полимерных сплавов путем механической активации в смесителях и экструдерах; подобное течение имеет место в сопряжениях машин в слое консистентной смазки или краски в печатающих устройствах.

В расчетах подобных технологических режимов обычно используется модель вязкопластичности с нелинейной вязкостью и нулевым пределом текучести. Однако часто принципиальное значение имеет учет порогового напряжения, поэтому необходимы методики определения констант вязкопластического материала с учетом предела текучести и нелинейной скоростной чувствительности.

Как правило, в ротационных вискозиметрах, реализующих течение Куэтта-Тейлора, имеет место движение внутреннего цилиндра, а внешний цилиндр покоится. В этой связи представляется необходимым вводить соответствующие описания, например, модель течения с линейно вязким трением на внешнем цилиндре. Кроме того, задачи идентификации являются некорректными по А.Н. Тихонову [5] (т.е. неустойчивыми относительно входных данных), поэтому необходимо применять специальные методы регуляризации, одним из которых является минимизация сглаживающего функционала с критерием выбора параметра регуляризации. В настоящей работе задача идентификации модели нелинейного вязкопластического материала с учетом линейно вязкого трения на внешнем цилиндре решена одним из таких методов.

Постановка задачи. Рассмотрим процесс установившегося течения вязко-пластического материала в зазоре между недеформируемыми коаксиальными цилиндрами бесконечной длинны с радиусами a и b ($b>a$), в котором внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью ω_a, а на внешнем цилиндре происходит линейно-вязкое трение с коэффициентом λ, которое описывается соотношением $\sigma_{r\varphi} = -\lambda(\vartheta_Ж - \vartheta_{CT})$, где $\vartheta_Ж$ - скорость течения вблизи внешнего цилиндра, ϑ_{CT} - скорость внешнего цилиндра.

Примем следующие определяющие соотношения для несжимаемого нелинейного вязкопластического материала:

$$\begin{cases} S_{ij} = 2\dfrac{\tau}{H}\xi_{ij} \\ \tau = \tau_0 + K\left(\dfrac{H}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^m, \text{ при } \tau > \tau_0 \text{ и } H=0 \text{ при } \tau < \tau_0 \\ div\vec{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

где S_{ij} - компоненты девиатора тензора напряжений, ξ_{ij} - компоненты девиатора тензора скоростей деформации, τ_0 - предел текучести (пороговое напряжение), τ - интенсивность сдвиговых напряжений, H - интенсивность сдвиговых скоростей деформации, m - параметр скоростной чувствительности, K - коэффициент вязкости, $\vec{\vartheta}$ -вектор скорости.

Граничные условия. Считаем, что на внутреннем цилиндре выполняется условие адгезии (прилипания): $\vartheta_\varphi(a)=\omega_a a$; на внешнем цилиндре происходит линейно вязкое трение: $\sigma_{r\varphi}=-\lambda(\vartheta_Ж-\vartheta_{СТ})$.

Метод решения. Из решения задачи о движении материала в зазоре[3] имеем:

$$-\frac{U_\varphi}{\dot{\varepsilon}_0}=\frac{r}{K^n}\int\left(\frac{1}{r}\right)^{2n+1}\left(C_1-\tau_0 r^2\right)^n dr .$$

Введем функцию:

$$F(\mathrm{r})=\frac{1}{K^n}\int\left(\frac{1}{r}\right)^{2n+1}\left(C_1-\tau_0 r^2\right)^n dr=-\frac{U\varphi(r)}{r};\ \text{тогда}$$

$$F(b)\text{-}F(a)=-\frac{U\varphi(b)}{b}+\frac{U\varphi(a)}{a}=\left(\frac{1}{K}\right)^n\int_a^b\left(\frac{1}{r}\right)^{2n+1}\left(C_1-\tau_0 r^2\right)^n dr,\ -\frac{U_\varphi(a)}{\dot{\varepsilon}_0 a}=-\frac{\omega_a}{\dot{\varepsilon}_0}=F(a)$$

$F(b)=-\dfrac{U_\varphi(b)}{\dot{\varepsilon}_0 b}=-\dfrac{\omega_b}{\dot{\varepsilon}_0}$; величину ω_b найдем из условия вязкого трения на внешнем цилиндре (который будем считать в дальнейшем покоится): $\sigma_{r\varphi}\big|_{r=b}=-\lambda\omega_b b$. Из решения прямой задачи следует $\sigma_{r\varphi}=-\dfrac{C_1}{r^2}$, $C_1>0$. Имеем: $\dfrac{C_1}{b^2}=\lambda\dfrac{\omega_b b}{\dot{\varepsilon}_0}\ \Rightarrow\ \dfrac{\omega_b}{\dot{\varepsilon}_0}=\dfrac{C_1}{\lambda b^3}$, далее

$$\frac{\omega_a}{\dot{\varepsilon}_0}-\frac{C_1\dot{\varepsilon}_0}{\lambda b^3}=\left(\frac{1}{K}\right)^n\int_a^b\left(\frac{1}{r}\right)^{2n+1}\left(C_1-\tau_0 r^2\right)^n dr . \tag{1}$$

Так как в уравнение (1) входит 4 неизвестные λ,τ_0,K,n, то для их определения необходимо провести 4 эксперимента, из которых имеем следующую систему:

$$\frac{\omega_a{}^{(i)}}{\dot{\varepsilon}_0}-\frac{C_1{}^{(i)}\dot{\varepsilon}_0}{\lambda b^3}=\left(\frac{1}{K}\right)^n\int_a^b\left(\frac{1}{r}\right)^{2n+1}\left(C_1{}^{(i)}-\tau_0 r^2\right)^n dr\ \ \mathrm{i}=1;2;3;4. \qquad (2).$$

Для удобства расчетов данную систему представим в безразмерном виде. Для этого используем следующие значения параметров: $\tau_0=10$ Па, a = 0.01975 м, $\dot{\varepsilon}_0$-наименьшее из 4 значений угловых скоростей, входящих в систему (2). Тогда $C_1^i=\tau_0^0 C_1^{'i}$, $K=\tau_0^0 K'$, $\tau_0=\tau_0^0\tau_0'$, $r=r'a$, $\omega_a^{(i)}=\dot{\varepsilon}_0\,\omega_a^{'(i)}$., где штрихом обозначены безразмерные параметры (далее штрихи опущены). После преобразований имеем систему уравнений:

$$\omega_a^{(i)}-\frac{C_1{}^{(i)}}{\lambda\left(\frac{b}{a}\right)^3}=\left(\frac{1}{K}\right)^n\int_1^{\frac{b}{a}}\left(\frac{1}{r}\right)^{2n+1}\left(C_1{}^{(i)}-\tau_0 r^2\right)^n dr\ \ \mathrm{i}=1,2,3,4.\ . \qquad (3).$$

Если представить это уравнение в операторном виде Az = u_δ , получим:

$$\lambda\left(\frac{b}{a}\right)^3 \omega_a^{(i)} - \lambda\left(\frac{b}{a}\right)^3 \left(\frac{1}{K}\right)^n \int_1^{\frac{b}{a}} \left(\frac{1}{r}\right)^{2n+1} \left(C_1^{(i)} - \tau_0 r^2\right)^n dr = C_1^{(i)}, \text{ i=1,2,3,4.} \quad (4)$$

<u>Алгоритм решения.</u> Пусть имеются данные 4[х] экспериментов и величины ω_a^i, C_1^i, где I = 1,2,3,4. Так как диапазон изменения констант модели τ_0, n известен, то перебором по τ_0, n с шагом $\Delta = 0{,}01$ можно из системы (3) при I = 3,4; найти λ, K. Область значений τ_0, n находим из условия $\tau_0 > 0$ и условия положительности подынтегрального выражения; следовательно $C_1^{(4)} > \tau_0 (1.02)^2$, т.е. $\tau_0 \in (0, \frac{C_1^4}{(1.02)^2})$, где C_1^4 - наименьшее из 4[х] экспериментальных значений $C_1^{(i)}$, взятых для идентификации. В качестве диапазона n взят интервал (0,1;10), что соответствует $m \in (0{,}1;10)$. Критерием выбора τ_0, n является наименьшее значение суммы абсолютных отклонений от нуля 1[го] и 2[го] уравнений системы (3). Таким образом определены все константы модели. Однако таким образом найденные константы определяются неустойчиво (за исключением λ).

Далее был предложен другой метод вычисления констант τ_0, n, K на основе алгоритма, минимизируюшего сглаживающий функционал А.Н. Тихонова $M^\alpha[\tau_0, K, n]$, где

$$M^\alpha[\tau_0, K, n] = \sum_{i=1}^{4} (\lambda\omega_a^{(i)} \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{\lambda\left(\frac{b}{a}\right)^3}{(K)^n} \int_1^{\frac{b}{a}} \left(\frac{1}{r}\right)^{2n+1} \left(C_1^{(i)} - \tau_0 r^2\right) dr - C_1^{(i)})^2 + \alpha\left(\tau_0^2 + K^2 + n^2\right) \quad (5)$$

где $\lambda = const$ (найдена ранее). Алгоритм минимизации состоит в следующем. Перебирая τ_0, n в указанном выше диапазоне и находя K из уравнения $\frac{\partial M^\alpha}{\partial K} = 0$, подставляем τ_0, n, K в M^α и находим константы, при которых M^α принимает наименьшее значение по τ_0, n, K. Данная процедура была применена для $\alpha = 1$; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3};10^{-4};10^{-5}. В этом алгоритме параметр K определялся из уравнения $\frac{\partial M^\alpha}{\partial K} = 0$ методом простой итерации с точностью до 1%. Выбор параметра регуляризации осуществлялся по квазиоптимальному критерию, при котором вводится величина $\Delta_p = \left\| x_p - x_{p-1} \right\|$, где $x_p = (\tau_0, K, n)$ соответствует $\alpha_p = 10^{-p}$. Значение p, при котором невязка Δ_p минимальна, выбирается в качестве значения α. В [4] обосновано применение критериев квазиоптимальности, минимума невязки и сглаживающего функционала для решения систем нелинейных алгебраических уравнений на примере задач геофизики и теории ньютоновского потенциала.

<u>Экспериментальная часть.</u> Для проверки описанной выше методики на ротационном вискозиметре «Rheotest 2.1», внутренний цилиндр которого вращается с некоторой угловой скоростью, а внешний цилиндр покоится, были проведены эксперименты, реализующие течение Куэтта-Тейлора. В качестве исследуемого материала была взята жидкокристаллическая смазка в диапазоне температур от 40^o*C* до 110^o*C*. В таблице 1 представлены экспериментальные данные, из которых 4 значения были взяты для идентификации, а остальные в

качестве контрольных. Значения температуры указаны в градусах Цельсия, напряжения в таблице 1 указаны в Паскалях.

Таблица 1.

Экспериментальные данные, полученные на ротационном вискозиметре

ω_i c^{-1}	T=30° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$	T=40° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$	T=50° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$	T=60° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$	T=70° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$	T=80° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$	T=90° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$	T=100° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$	T=110° $\lvert\sigma_{r\varphi}\rvert$
1310,6						173,8	113,1	77,08	54,12
728,13				328,0	185,3	95,12	62,32	41,82	32,8
435,88				177,1	109,8	56,58	35,26	26,32	19,52
242,71			202,5	107,4	59,86	33,29	21,57	15,01	10,58
145,62			120,5	64,78	36,08	20,09	13,61	9,1	6,97
80,903		177,12	67,24	34,44	21,48	11,07	7,79	5,01	3,94
48,542		100,04	38,54	22,47	12,96	6,97	4,67	3,28	2,3
26,957	193,5	54,12	23,62	12,63	7,38	3,94	2,54	1,8	1,23
16,181	119,7	33,13	14,02	7,71	4,43	2,38	1,48		
8,996	66,42	19,19	7,71	4,35	2,46	1,15			
5,404	40,18	11,81	4,76	2,54	1,31				
2,997	24,6	6,56	2,62	1,39					

Результаты численного анализа. С полученными экспериментальными данными произведена идентификация модели из 4ˣ экспериментов. При T = 30, 40, 50 и 60°C значения угловых скоростей взяты следующие: $\omega^{(1)} = 26{,}957\,c^{-1}$, $\omega^{(2)} = 16{,}181\,c^{-1}$, $\omega^{(3)} = 8{,}996\,c^{-1}$, $\omega^{(4)} = 5{,}404\,c^{-1}$. При T = 70, 80, 90, 100 и 110°*C* значения угловых скоростей брались следующие: $\omega^{(1)} = 145{,}62\,c^{-1}$, $\omega^{(2)} = 80{,}903\,c^{-1}$, $\omega^{(3)} = 48{,}542\,c^{-1}$, $\omega^{(4)} = 26{,}957\,c^{-1}$. Значение характерной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$ приравнивалось наименьшей угловой скорости из 4ˣ значений, взятых для идентификации. Константы, найденные по описанному алгоритму, приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Реологические константы для жидкокристаллической смазки

T, °C	$\lambda, \frac{Па \cdot с}{м}$	τ_0, Па	*K*, Па	*n*
30	357,91	0,7	1	0,32
40	104,4	2,5	1	0,71
50	44,88	0,2	1,01	0,93
60	24,26	0,5	1	1,22
70	13,29	0,4	1	0,88
80	7	0,3	1	0,94
90	4,73	0,1	1	1,1
100	3,28	0,1	0,993	1,53
110	2,42	0,1	0,998	1,57

Для проверки результатов расчета в контрольном эксперименте определялось сдвиговое напряжение для каждого значения температуры и угловой скорости. Установлено, что найденные константы удовлетворительно описывают течение материала. Максимальная относительная погрешность не превышала 17%, причем среднее значение погрешности для большинства экспериментов не превышало 6%.

Выводы:

1) Обратная некорректная задача идентификации с использованием решения прямой задачи сводится к решению системы 4^x нелинейных алгебраических уравнений. Использованными численными методами без регуляризации устойчиво решить систему не удается.

2) Предложенный алгоритм решения, основанный на минимизации сглаживающего функционала А.Н. Тихонова, позволяет устойчиво определить константы модели из 4^x опытов на использованном ротационном вискозиметре.

3) Проверка найденных констант путем сравнения расчетного значения сдвигового напряжения с экспериментальным показала, что отклонения в большинстве случаев незначительны.

4) Получено решение частной обратной задачи вида $Az = u_\delta$ (u_δ - приближенно заданные экспериментальные данные) с зависимостью левой части от u_δ, теория которой находится в стадии развития.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов О.М. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности.- М.: Машиностроение, 1979.

2. Кайбышев О.А. Сверхпластичность промышленных сплавов.- М.: Металургия, 1984.

3. Гавриленко С.Л., Шилько С.В., Васин Р.А. Определение характеристик вязкопластического материала в условиях течения Куэтта // ПМТФ, 2002, т. 43, № 3.

4. Гласко В.Б., Гущин Г.В., Старостенко В.И. О применении метода регуляризации Тихонова А.Н. к решению нелинейных систем уравнений // ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 2.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979.