Новороссийская государственная морская академия

ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Ершов В.И.

Развиваются основные положения работы автора, доложенной на международной конференции в Минске в феврале 2004 г. и опубликованной в материалах традиционной зимней 14 научной школы по теоретической и прикладной механике (Пермь – 2005 г.).

Проблема о соответствии начального и конечного базисов, трактуемых в обычном смысле [1]. [2], [3] как совокупность координат точек, искомых функций и их производных, возникла в теории упругости в XIX веке вместе с формированием исходных дифференциальных уравнений. Особое внимание этой проблеме уделяли выдающиеся ученые В.В. Новожилов и К.Ф Черных, на первых страницах своих классических произведений [4], [5] большое внимание уделявшие координатам двух типов:

- координатам точек в исходном недеформированном положении;
- координатам тех же точек в конечном деформированном состоянии.

Это обстоятельство связано с тем, что исходные уравнения получаются для деформированного состояния , а при решении системы дифференциальных уравнений исследователи вынуждены пользоваться координатами точек в исходном положении. Это приводит к значительным трудностям в задачах теории упругости при больших деформациях, а при малых деформациях для их преодоления используют предпосылку о соответствии начального и конечного базисов. Такой широко и давно освоенный подход хорошо оправдал себя в декартовых координатах и был распространен на криволинейные координаты в конце XIX века. При решении данного вопроса руководствовались тем, что приращение координаты есть малая величина, однако эта величина не является бесконечно малой. Более того, эта величина является искомой функцией

В криволинейных координатах искомые функции незначительно отличаются при замене координат в деформированном состоянии, которые мы знаем только после окончания расчетов, известными координатами для исходного положения.

Этого нельзя сказать о первой производной от радиального перемещения (полярные координаты) по криволинейной координате, физический смысл которой при малых деформациях – угол между касательной к исследуемой кривой и касательной к криволинейной оси. При изменении положения точки этот угол будет изменяться на величину, *вопрос о необходимости учета которой диктуется не только тем, насколько она мала или велика, а также тем, присутствует ли эта величина в ранее полученных корректных соотношениях, используемых при решении задач.*

Эта проблема особенно ясна из следующего примера. При решении одной из задач в систему дифференциальных уравнений входит уравнение в полярных координатах

$$(1/r)\partial U(r+U,\ \theta+V/r)/\partial\theta+\partial V(r+U,\ \theta+V/r)/\partial r - V/r=0\ ,$$

$r\ ,\ \theta$ - полярные координаты точки в исходном положении;
$U,\ V$- соответственно радиальное и окружное искомые перемещения;
$(r+U,\ \theta+V/r)$ – полярные координаты в деформированном положении .

Исключительная сложность этого уравнения и системы в целом состоит в том, что искомая функция входят в переменную, что требует корректного удаления искомой функции из аргумента. Если бы удалось решить исходную систему, то было бы точное решение задачи, но до сих пор точного решения нет и поэтому упрощают это уравнение и систему. В настоящее время вместо приведенного выше уравнения рассматривают приближенное, грубо удаляя из аргумента искомые функции:

$(1/r)\ \partial U(r, \theta)/\partial\theta+\partial V(r, \theta)/\partial r - V/r=0$.

Алогизм очевиден: удаляя V/r из одной части уравнения, сохраняют его в другой части того же уравнения! Вопрос о приемлемости получаемого решения проблематичен.

При решении задач о перемещениях предполагается, что задача решается в начальных координатах, хотя в действительности имеет место не только явное использование начальных координат в процессе интегрирования, но и очевидное использование конечных координат при составлении исходной системы дифференциальных уравнений.

На сегодняшний день наиболее корректный путь решения состоит в последовательном и правильном переводе всех уравнений рассматриваемой системы уравнений в начальные координаты точек.

При обязательном корректном переходе от конечного к начальному базису, неизбежно возникает вопрос о зависимость между первыми производными в полярных координатах по криволинейной координате для исходного и конечного базисов. Этот вопрос может быть решен разными способами.

Широко распространенной и основополагающей в теории упругости является хорошо известная в математическом анализе задача, устанавливающая зависимость между значениями функции U двух переменных S и r ($S/r=\theta$) для двух близко расположенных точек, расстояние между которыми равно dS :

$$U(S+dS) = U(S) + (\partial U(S)/\partial S)\ dS .$$

Дифференцируя по переменной S, имеем:

$$\partial U (S+ dS)/\partial S=\partial U(S)/\partial S + (\partial^2 U(S)/\partial S^2)\ dS .$$

Для малых перемещений $\partial^2 U(S)/\partial S^2$ есть кривизна $1/\rho$ и потому:

$$\partial U (S+ dS)/\partial S=\partial U(S)/\partial S + (1/\rho)\ dS .$$

Представляется возможным перейти от кривизны $1/\rho$ кривой U к кривизне координатной линии 1/r, обозачая через Δ приращение первой производной и пользуясь следующим выражением, получаемым из геометрических соображений:

$$\rho= r\ (1+U/r) / (1+\Delta/d\theta) \cos(\partial U(S)/\partial S) .$$

Поскольку при малых перемещениях$(\partial U(S)/\partial S)\ dS< U << r$; $d\theta= dS/ r<<1$,
то в этом выражении множитель при координате r незначительно отличается от единицы; что дает возможность заменить ρ на r.

$$\partial U (S+ dS)/\partial S=\partial U(S)/\partial S + (1/r)\ dS .$$

Несколько иной в физической трактовке, но гораздо сложнее в математической постановке, является задача о связи между первыми производными одной и той же точки для начальных и конечных координат при малых деформациях, когда перемещение по криволинейной оси равно V=V(S, r). Полагая в (1) dS= V и далее пренебрегая произведением производных $(\partial U(S)/\partial S)(\partial V(S)/\partial S)$, имеем окончательно :

$$\partial U (S+ V)/\partial S=\partial U(S)/\partial S + V/r . \qquad (1)$$

Последний член, конечно, мал, но его следует учитывать в тех задачах где в других параллельных дифференциальных соотношениях этот член присутствует.

Результатом такого перехода от одних переменных к другим будут два эквивалентные выражения для начального приведенного и конечного базисов.

Далее используем для определения перемещений в задаче Фламана систему дифференциальных уравнений , справедливую для исходных координат

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r},\ \ \varepsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},\ \ \gamma_{\theta r} = \frac{\partial U}{r\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial r}.$$

и выражения для напряжений

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r}\cos\theta;\ \ \sigma_\theta = 0;\ \ \sigma_{r\theta} = 0.$$

Обозначая $2P/\pi E = K$, получим выражения для деформаций:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{K\cos\theta}{r}. \tag{2}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{\mu K\cos\theta}{r}. \tag{3}$$

$$\gamma_{\theta r} = \frac{\partial U}{r\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (3), имеем:

$$U = -K\cos\theta\ \ \ln r + F(\theta)\ . \tag{5}$$

Для определения функции F(θ) воспользуемся условием, что при $r=H$ радиальные перемещения отсутствуют:

$$F(\theta) = K\cos\theta\ \ \ln H\ .$$

С учетом полученного результата имеем выражение для радиальных перемещений:

$$U = K\cos\theta\ \ln\frac{H}{r}\ . \tag{6}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (3), имеем:

$$V = \mu K\sin\theta - K\sin\theta\ \ \ln\frac{H}{r} + f(r)\ . \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) и (7) в дифференциальное уравнение (4), получим дифференциальное уравнение для функции $f(r)$:

$$\frac{-K\sin\theta}{r}\ln\frac{H}{r} + \frac{K\sin\theta}{r} + f'(r) = 0\ .$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь:

$$f(r) = -\frac{K\sin\theta}{2}\ln^2\frac{H}{r} - K\sin\theta\ \ \ln r + \varphi(\theta)\,.$$

Функцию $\varphi(\theta)$ найдем из условия, что радиальные перемещения при $r=H$ отсутствуют в соответствии с расчетной схемой:

$$\varphi(\theta) = -\mu K\sin\theta + K\sin\theta\ \ln H$$

Тогда вместо выражения (7) получим:

$$V = \mu K \sin\theta - K\sin\theta \ln\frac{H}{r} - \frac{K\sin\theta}{2}\ln^2\frac{H}{r} - K\sin\theta\ln r - \mu K\sin\theta + K\sin\theta\ln H \ .$$

Окончательно имеем для окружных перемещений:

$$V = -\frac{K\sin\theta}{2}\ln^2\frac{H}{r} \ . \tag{8}$$

Из формулы (8) будем иметь вертикальные перемещения для точек горизонтальной поверхности:

$$V_{(\theta=\pi/2)} = \frac{P}{\pi E}\ln^2\frac{H}{r} \ .$$

Таким образом, при определении окружных перемещений в задаче Фламана в начальном приведенном базисе следует пользоваться полученной формулой (8).

Интересно отметить, что полученное решение для окружных перемещений по сравнению с существующим в большей степени соответствует натурным наблюдениям, поскольку перемещения быстрее затухают по мере удаления от точки приложения силы.

Автор благодарит профессора И.С. Куликова за полезные замечания, высказанные при обсуждении рукописи этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. –204 с.
2. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. – ОНТИ, 1935.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
5. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336с.