

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Гу Юй

Elastoplastic sandwich beam with compressible filler under action of surface loadings is considered. For the kinematics description of carryings layers accepted the hypotheses Bernoulli. Filler is hard, compressible. Received combined equations of equilibrium and its analytical solution via moving. Conducted numeric analysis of tinning decisions.

Введение. Значительное распространение трехслойных конструкций во многих отраслях промышленности привело к необходимости разработки методов их расчета. В условиях деформации изгиба они оказываются наиболее рациональными, то есть близкими оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. Трехслойные конструкции с несжимаемым по толщине наполнителем, в том числе и упругопластические, исследованы в работах [1–5]. Здесь приводится постановка и решение задачи об изгибе трехслойного упругопластического [6, 7] стержня со сжимаемым физически нелинейным наполнителем.

Постановка и решение задачи. Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень со сжимаемым наполнителем, наружные несущие слои которого выполнены из упругопластического материала, а наполнитель – нелинейно-упругий. Для описания кинематики пакета приняты следующие предположения: в несущих слоях выполняются гипотезы Бернулли, в жёстком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается его обжатие, деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя); b – ширина стержня. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине l . Распределенные поверхностные нагрузки $p(x), q(x)$ приложены к внешней плоскости первого слоя (рис. 1).

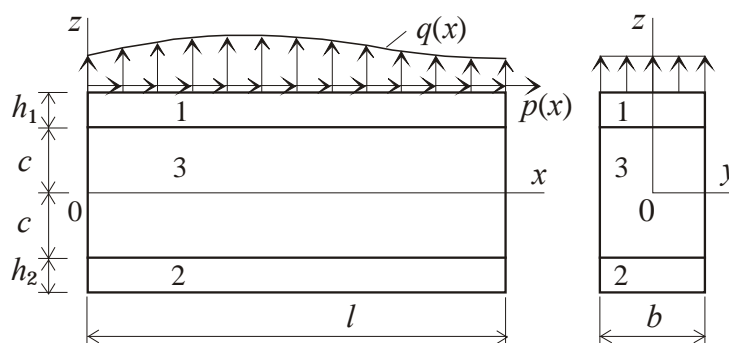


Рис. 1. Трехслойный стержень

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w_1(x), u_1(x), w_2(x)$ и $u_2(x)$:

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c). \quad (1)$$

Здесь z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим, используя соотношения Коши и выражения (1):

$$\varepsilon_x^{(1)} = u_{1,x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,xx} \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_{1,x} + \frac{h_1}{4}w_{1,xx}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_{2,x} - \frac{h_2}{4}w_{2,xx}\right),$$

$$\varepsilon_{xz}^{(3)} = \left(\frac{2z + h_1}{8c} + \frac{1}{4}\right) w_{1,x} + \left(\frac{-2z + h_2}{8c} + \frac{1}{4}\right) w_{2,x} + \frac{u_1 - u_2}{4c}, \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{1}{2c} (w_1 - w_2) \quad (-c \leq z \leq c);$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = u_{2,x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,xx} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0. \quad (2)$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в рассматриваемом случае будут следующими ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}$; $i, j = x, y, z$):

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3} \varepsilon_x^{(k)}; \quad \varepsilon_x^{(k)} = \frac{2}{3} \varepsilon_x^{(k)} \quad (k=1, 2); \quad \varepsilon^{(3)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_x^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}); \quad \varepsilon_x^{(3)} = \frac{2}{3} \varepsilon_x^{(3)} - \frac{1}{3} \varepsilon_z^{(3)}. \quad (3)$$

Введем внутренние усилия и моменты:

$$N_x^{(k)} = b \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz; \quad M_x^{(k)} = b \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz; \quad Q^{(3)} = b \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz; \quad N_z^{(3)} = b \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz; \quad M_{xz}^{(3)} = b \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz, \quad (4)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений; интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемого стержня следуют из вариационного принципа Лагранжа [1]:

$$\delta A_e - \delta A_i = 0, \quad (5)$$

где δA_e – вариация работы внешних сил; δA_i – вариация работы внутренних сил упругости;

$$\delta A = b \int_0^l \left[p \left(\delta u_1 - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,x} \right) + q \delta w_1 \right] dx;$$

$$\delta A_i = b \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] dx. \quad (6)$$

Рассмотрим интегралы по толщине слоев, входящие в выражение (6). Для первого слоя с учетом выражений (2) и (4) получаем

$$\int_{h_1} \sigma_x^{(1)} \delta \varepsilon_x^{(1)} dz = \int_{h_1} \sigma_x^{(1)} \left[\delta u_{1,x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) \delta w_{1,xx} \right] dz =$$

$$= \frac{1}{b} \left[\delta u_{1,x} N^{(1)} + \delta w_{1,xx} \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N^{(1)} - \delta w_{1,xx} M^{(1)} \right].$$

Аналогично для остальных слоев

$$\begin{aligned}
\int_{h_2} \sigma_x^{(2)} \delta \varepsilon_x^{(2)} dz &= \frac{1}{b} \left[\delta u_{2,x} N^{(2)} - \delta w_{2,xx} \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N^{(2)} - \delta w_{2,xx} M^{(2)} \right]; \\
\int_{h_3} \sigma_x^{(3)} \delta \varepsilon_x^{(3)} dz &= \frac{1}{b} \left[\frac{\delta u_{1,x}}{2} \left(N^{(3)} + \frac{M^{(3)}}{c} \right) + \frac{\delta u_{2,x}}{2} \left(N^{(3)} - \frac{M^{(3)}}{c} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta w_{1,xx} h_1}{4} \left(N^{(3)} + \frac{M^{(3)}}{c} \right) - \frac{\delta w_{2,xx} h_2}{4} \left(N^{(3)} - \frac{M^{(3)}}{c} \right) \right]; \\
\int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz &= \frac{1}{8b} \left[\delta w_{1,x} \left(\left(2 + \frac{h_1}{c} \right) Q^{(3)} + \frac{2M_{xz}^{(3)}}{c} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta w_{2,x} \left(\left(2 + \frac{h_2}{c} \right) Q^{(3)} - \frac{2M_{xz}^{(3)}}{c} \right) + \frac{2\delta u_1}{c} Q^{(3)} - \frac{2\delta u_2}{c} Q^{(3)} \right]; \\
\int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz &= \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \frac{\delta w_1 - \delta w_2}{2c} dz = \frac{\delta w_1 - \delta w_2}{2bc} N_z^{(3)}. \tag{7}
\end{aligned}$$

В слоях стержня используются физические уравнения состояния теории малых упруго-пластических деформаций Ильюшина, которые в девiatorно-шаровой форме имеют вид:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k (1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})) \vartheta_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad (k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z). \tag{8}$$

Здесь $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девiatorная и шаровая части тензора напряжений; $\vartheta_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девiatorная и шаровая части тензора деформаций (2); $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое,

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{zz}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{zz}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)})^2 + 6((\varepsilon_{xy}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{yz}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{zx}^{(k)})^2)};$$

$\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – при $k = 1, 2$ это функции пластичности Ильюшина, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_t^{(k)}$ следует положить равной нулю; $\varepsilon_t^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев; $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации.

Рассмотрим методику решения краевой задачи. Исходя из соотношений (8) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}; \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k \vartheta_{ij}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}; \quad \sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k \omega^{(k)} \vartheta_{ij}^{(k)}. \tag{9}$$

Для рассматриваемого трехслойного стержня, с учетом формул для девiatorа и шаровой части тензора деформаций (3), получим

▪ в несущих слоях

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}; \quad \sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} = \frac{4}{3} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)};$$

▪ в заполнителе

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(3)} &= \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)\omega}; \quad \sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3 \vartheta_{xx}^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}; \\
\sigma_{xx}^{(3)\omega} &= 2G_3 \vartheta_{xx}^{(3)} \omega^{(3)} = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)}; \quad \sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)\omega}; \\
\sigma_{zz}^{(3)0} &= 2G_3 \vartheta_{zz}^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}; \quad \sigma_{zz}^{(3)\omega} = 2G_3 \vartheta_{zz}^{(3)} \omega^{(3)} = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)}; \\
\sigma_{xz}^{(3)} &= \sigma_{xz}^{(3)0} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}; \quad \sigma_{xz}^{(3)0} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Здесь $\omega^{(k)} \equiv \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – универсальные функции нелинейности материалов слоев, определяемые экспериментально; $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k$; $K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k$.

Проведя подобную (10) операцию с внутренними усилиями (4), получим:

$$\begin{aligned} N_x^{(k)} &= N_x^{(k)0} - N_x^{(k)\omega}; & N_z^{(3)} &= N_z^{(3)0} - N_z^{(3)\omega}; & M_x^{(k)} &= M_x^{(k)0} - M_x^{(k)\omega}; \\ M_{xz}^{(3)} &= M_{xz}^{(3)0} - M_{xz}^{(3)\omega}; & Q^{(3)} &= Q^{(3)0} - Q^{(3)\omega}. \end{aligned} \quad (11)$$

Основные (с индексом «0») и дополнительные (с индексом « ω ») составляющие во внутренних усилиях (11) вычисляются по следующим формулам:

▪ в несущих слоях

$$\begin{aligned} N_x^{(k)0} &= b \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} dz = b \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} dz; & N_x^{(k)\omega} &= b \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} dz = \frac{4}{3} b \int_{h_k} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} dz; \\ M_x^{(k)0} &= b \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} z dz = b \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} z dz; & M_x^{(k)\omega} &= b \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} z dz = \frac{4}{3} b \int_{h_k} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} z dz; \end{aligned}$$

▪ в заполнителе

$$\begin{aligned} N_x^{(3)0} &= b \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} dz = b \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}) dz; & N_x^{(3)\omega} &= b \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega} dz = \frac{2}{3} b \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} dz; \\ N_z^{(3)0} &= b \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)0} dz = b \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}) dz; & N_z^{(3)\omega} &= b \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega} dz = \frac{2}{3} b \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} dz; \\ M_x^{(3)0} &= b \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} z dz = b \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}) z dz; & M_x^{(3)\omega} &= b \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega} z dz = \frac{2}{3} b \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} z dz; \\ M_z^{(3)0} &= b \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)0} z dz = b \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}) z dz; & M_z^{(3)\omega} &= b \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega} z dz = \frac{2}{3} b \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} z dz; \\ Q^{(3)0} &= b \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} dz = 2b \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)0} dz; & Q^{(3)\omega} &= b \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz = 2b \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)\omega} \omega^{(3)} dz. \end{aligned}$$

После подстановки в (5) значения работ (6), используя выражения (7), (9)–(11), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений. В итерационном виде

$$\begin{aligned} a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_{1,xx}^n - a_5 u_{2,xx}^n + a_2 w_{1,x}^n + a_3 w_{2,x}^n - 2a_6 w_{1,xxx}^n + a_7 w_{2,xxx}^n &= p + p_\omega^{n-1}; \\ -a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_{1,xx}^n - a_9 u_{2,xx}^n - a_3 w_{1,x}^n - a_2 w_{2,x}^n - a_6 w_{1,xxx}^n + 2a_7 w_{2,xxx}^n &= h_\omega^{n-1}; \\ a_{10} u_{1,x}^n - a_{17} u_{2,x}^n + 2a_6 u_{1,xxx}^n + a_6 u_{2,xxx}^n + a_{11} w_{1,xx}^n - a_{12} w_{2,xx}^n + \\ + a_{15} w_{1,xxx}^n - a_{16} w_{2,xxx}^n + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n &= q + \frac{1}{2} p_{,x} h_1 + q_\omega^{n-1}; \\ -a_{18} u_{1,x}^n + a_{19} u_{2,x}^n - a_7 u_{1,xxx}^n - 2a_7 u_{2,xxx}^n - a_{12} w_{1,xx}^n + a_{14} w_{2,xx}^n - \\ - a_{16} w_{1,xxx}^n + a_{13} w_{2,xxx}^n - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n &= g_\omega^{n-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

где a_i ($i = 1, \dots, 19$) – коэффициенты, выражающиеся через объемный и сдвиговой модули упругости материалов K_k , G_k и геометрические параметры слоев стержня;

$$\begin{aligned} p_\omega^{n-1} &= \frac{1}{b} (H_1^{\omega(n-1)} - P_1^{\omega(n-1)},_x); & q_\omega^{n-1} &= \frac{1}{b} (S_1^{\omega(n-1)},_{xx} + H_2^{\omega(n-1)} - T_1^{\omega(n-1)},_x); \\ g_\omega^{n-1} &= \frac{1}{b} (S_2^{\omega(n-1)},_{xx} - H_2^{\omega(n-1)} - T_2^{\omega(n-1)},_x); & H_1^{\omega(n-1)} &= \frac{2Q^{(3)\omega(n-1)}}{c}; & H_2^{\omega(n-1)} &= \frac{N_z^{(3)\omega(n-1)}}{2c}; \\ T_1^{\omega(n-1)} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}; & T_2^{\omega(n-1)} &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1^{\omega(n-1)} &= \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_x^{(1)\omega(n-1)} - M_x^{(1)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)} ; \\
S_2^{\omega(n-1)} &= - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_x^{(2)\omega(n-1)} - M_x^{(2)\omega(n-1)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)} ; \\
P_1^{\omega(n-1)} &= \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(1)\omega(n-1)} ; \quad P_2^{\omega(n-1)} = \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(2)\omega(n-1)} ; \\
N_x^{(k)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} b \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)(n-1)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) dz \quad (k = 1, 2) ; \\
M_x^{(k)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} b \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)(n-1)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) z dz \quad (k = 1, 2) ; \\
N_x^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)(n-1)} - \varepsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) dz ; \\
N_z^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)(n-1)} - \varepsilon_x^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) dz ; \\
M_x^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)(n-1)} - \varepsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) z dz ; \\
M_z^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)(n-1)} - \varepsilon_x^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) z dz ; \quad Q^{(3)\omega(n-1)} = 2b \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)(n-1)} \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) dz .
\end{aligned}$$

Примем условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Граничные условия в сечениях $x = 0$; l (l – длина стержня) принимают в перемещениях следующий вид:

$$w^{kn} = u^{kn},_{,x} = w^{kn},_{xx} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (13)$$

где k – номер несущего слоя, n – номер линейного приближения.

Решение системы дифференциальных уравнений (12) предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям опирания на жесткие опоры (13):

$$\begin{aligned}
u_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right); \quad u_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right); \\
w_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right); \quad w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad (14)
\end{aligned}$$

где $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$ – неизвестные амплитуды перемещений на n -м шаге.

Положим продольную нагрузку $p(x) \equiv 0$. Поперечную нагрузку $q(x)$ и дополнительные «внешние» усилия представим в виде разложений в следующие ряды:

$$\begin{aligned}
q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx; \quad q_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\
q_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx; \quad g_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad g_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l g_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx; \\
h_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad h_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx;
\end{aligned}$$

$$p_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad p_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx. \quad (15)$$

После подстановки перемещений (14) и нагрузок (15) в (12) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для искомых амплитуд перемещений U_{1m}^n , U_{2m}^n , W_{1m}^n , W_{2m}^n :

$$\begin{cases} b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n = p_{\omega m}^{n-1}, \\ b_2 U_{1m}^n + b_5 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n = h_{\omega m}^{n-1}, \\ b_8 U_{1m}^n + b_9 U_{2m}^n + b_{10} W_{1m}^n + b_{11} W_{2m}^n = q_m + q_{\omega m}^{n-1}, \\ b_{12} U_{1m}^n - b_{13} U_{2m}^n + b_{11} W_{1m}^n + b_{14} W_{2m}^n = g_{\omega m}^{n-1}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь параметры b_i выражаются через коэффициенты a_n и зависят от параметра m .

Решение системы (3.104) можно выписать в определителях

$$U_{1m}^n = \frac{\Delta_{1m}^{n-1}}{\Delta}, \quad U_{2m}^n = \frac{\Delta_{2m}^{n-1}}{\Delta}, \quad W_{1m}^n = \frac{\Delta_{3m}^{n-1}}{\Delta}, \quad W_{2m}^n = \frac{\Delta_{4m}^{n-1}}{\Delta}, \quad (17)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} \\ b_{12} & -b_{13} & b_{11} & b_{14} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{1m}^{n-1} = \begin{vmatrix} p_{\omega m}^{n-1} & b_2 & b_3 & b_4 \\ h_{\omega m}^{n-1} & b_5 & b_6 & -b_7 \\ q_m + q_{\omega m}^{n-1} & b_9 & b_{10} & b_{11} \\ g_{\omega m}^{n-1} & -b_{13} & b_{11} & b_{14} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2m}^{n-1} = \begin{vmatrix} b_1 & p_{\omega m}^{n-1} & b_3 & b_4 \\ b_2 & h_{\omega m}^{n-1} & b_6 & -b_7 \\ b_8 & q_m + q_{\omega m}^{n-1} & b_{10} & b_{11} \\ b_{12} & g_{\omega m}^{n-1} & b_{11} & b_{14} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{3m}^{n-1} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & p_{\omega m}^{n-1} & b_4 \\ b_2 & b_5 & h_{\omega m}^{n-1} & -b_7 \\ b_8 & b_9 & q_m + q_{\omega m}^{n-1} & b_{11} \\ b_{12} & -b_{13} & g_{\omega m}^{n-1} & b_{14} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{4m}^{n-1} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & p_{\omega m}^{n-1} \\ b_2 & b_5 & b_6 & h_{\omega m}^{n-1} \\ b_8 & b_9 & b_{10} & q_m + q_{\omega m}^{n-1} \\ b_{12} & -b_{13} & b_{11} & g_{\omega m}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Вычисляя определители в (17) любым из стандартных методов, получим амплитуды U_{1m} , U_{2m} , W_{1m} , W_{2m} . Далее по формулам (14) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (1), деформации – из (2), напряжения – из (8).

Численные результаты. Численный счёт производился для трехслойного стержня, пакет которого составлен из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Величина нагрузки и относительные толщины слоев подбирались таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени ($h_1 = h_2 = c = 0,06$; $q = 11 \cdot 10^6$ Па). В качестве материалов слоев предполагаются Д16Т-фторопласт-Д16Т [2]. Аналитический вид функции пластичности для несущих слоев ($\omega^{(1)} \equiv \omega^{(2)}$) принимается следующий:

$$\omega^{(1)}(\varepsilon_u, I) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_r(I); \\ A_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_r(I)}{\varepsilon_u}\right)^{\alpha_1}, & \varepsilon_u > \varepsilon_r(I). \end{cases}$$

Подобная функция физической нелинейности принимается и для заполнителя

$$\omega^{(3)}(\varepsilon_u, I) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_s(I); \\ A_3 \left(1 - \frac{\varepsilon_s(I)}{\varepsilon_u}\right)^{\alpha_3}, & \varepsilon_u > \varepsilon_s(I). \end{cases}$$

Рис. 2 иллюстрирует процесс сходимости метода упругих решений (на примере перемещения w_1, u_1) при исследовании изгиба упругопластического трехслойного стержня. На всех рисунках номер кривой соответствует номеру итерации.

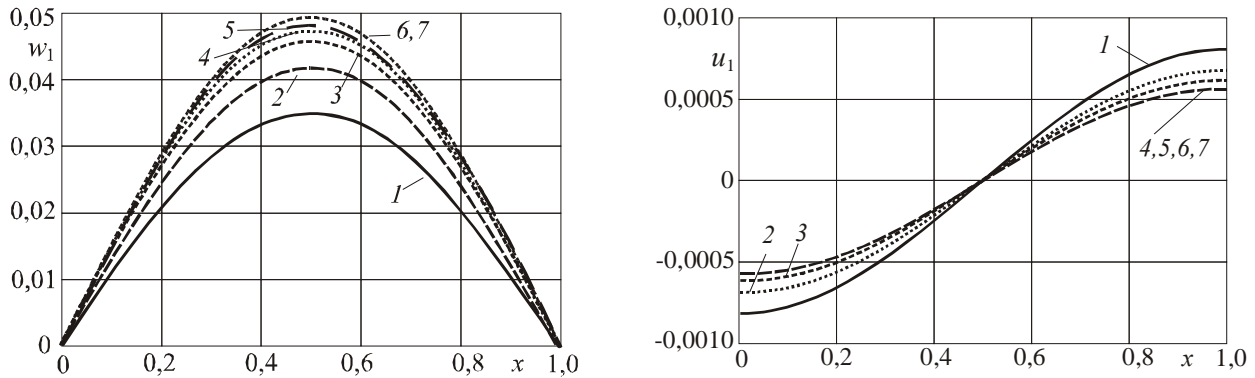


Рис. 2. Сходимость метода упругих решений

Первое приближение является решением задачи теории упругости; 2-е приближение отличается от него в среднем на 19 %. На каждой последующей итерации разница между приближениями уменьшается и 7-е приближение, которое принято за искомое решение, отличается от 6-го на 0,2 %. Дальнейшая проверка практической сходимости метода показала устойчивое стремление к нулю разности между последующим и предыдущим приближениями. В итоге учет пластических и физически нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению упругого расчетного прогиба на 43 %.

Рис. 3 иллюстрирует распределение пластических и нелинейно-упругих деформаций по толщине в слоях стержня. Первые пластические деформации появляются в середине пролета на внутренних плоскостях несущих слоев. При увеличении нагрузки эти области растут, и со временем образуется еще одна пластическая зона, примыкающая к внешней поверхности первого слоя. Весь наполнитель деформируется физически нелинейно.

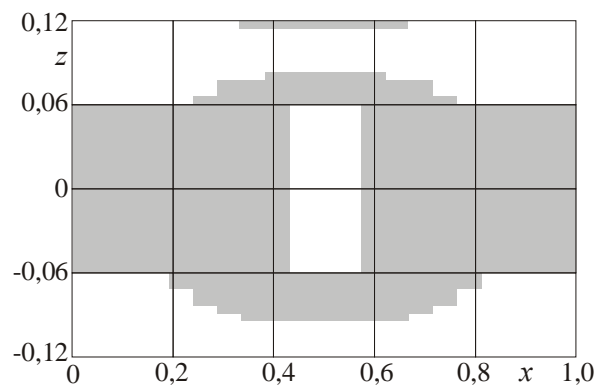


Рис. 3. Распределение областей пластичности и физической нелинейности (темная заливка) в слоях стержня

Рис. 4 показывает расчетное изменение поперечной деформации в наполнителе вдоль оси стержня при различных физических уравнениях состояния. Учет пластичности и физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению ε_{zz} практически в 2 раза.

При учете пластичности и физической нелинейности материалов слоев величина нормальных напряжений по модулю во внешних слоях возрастает на 50 % и 90 % соответственно (рис. 5). В наполнителе максимальные напряжения увеличиваются в 4, 5 раза. Значения напряжений во внешних слоях уменьшены в 10^9 , в наполнителе – в 10^8 раз.

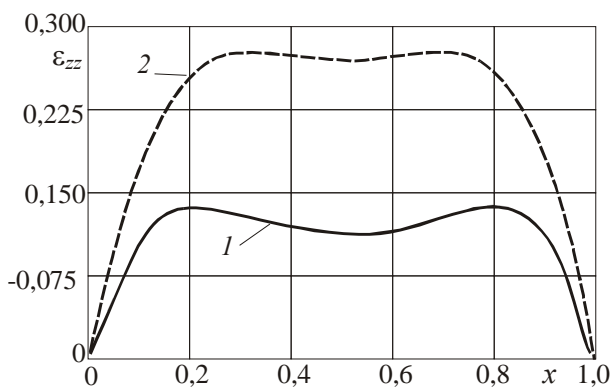


Рис. 4. Изменение поперечной деформации в заполнителе (в процентах) вдоль оси стержня: 1 – упругий стержень, 2 – упругопластический

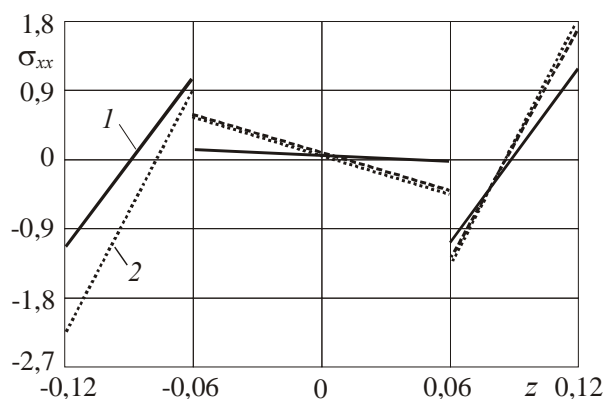


Рис. 5. Изменение нормальных напряжений по толщине стержня ($x = 0,5$): 1 – упругий стержень, 2 – упругопластический

Распределение нормальных напряжений $\sigma_{xx}^{(1)}$ по граничным плоскостям первого слоя показано на рис. 6 (значения уменьшены в 10^9 раз). При учете пластических и физически нелинейных свойств материалов слоев на внешней плоскости напряжения увеличиваются примерно на 60 %. В склейке с заполнителем напряжения изменяются подобным образом, но в гораздо меньшей степени.

Изменение вдоль оси стержня нормальных напряжений $\sigma_{xx}^{(3)}$ в заполнителе на плоскостях склейки с несущими слоями иллюстрирует рис. 7 (значения уменьшены в 10^7 раз). При учете пластических и физически нелинейных свойств материалов слоев на верхней плоскости заполнителя напряжения меняют знак и увеличиваются в несколько раз. В нижней склейке напряжения остаются того же знака, достигают максимума и увеличиваются в 4,5 раза.

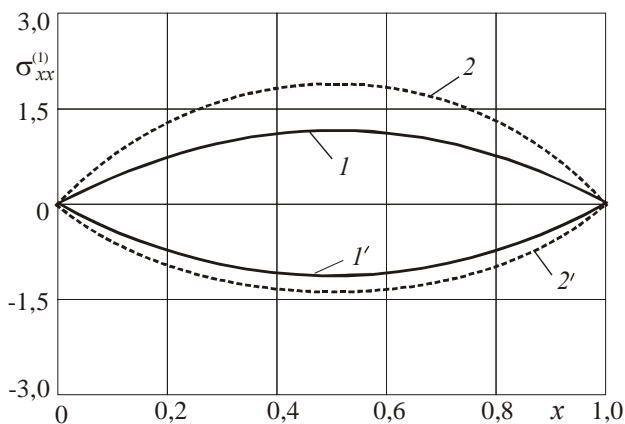


Рис. 6. Изменение вдоль оси стержня напряжений σ_{zz} на плоскостях слоя 1 (без штриха – $z = c + h_1$, со штрихом – $z = c$): 1 – упругий стержень; 2 – упругопластический

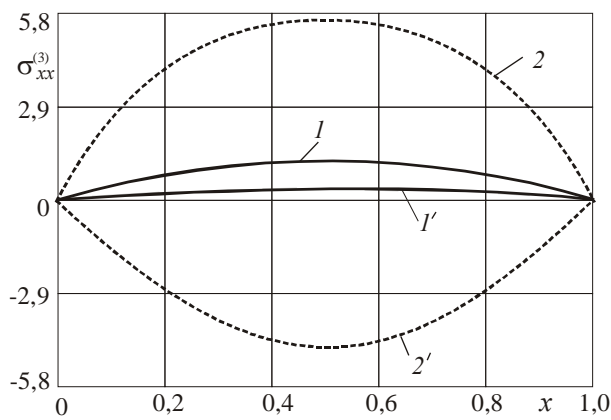


Рис. 7. Изменение вдоль оси стержня нормальных напряжений σ_{xx} на плоскостях заполнителя (без штриха $z = -c$, со штрихом $z = c$): 1 – упругий стержень; 2 – упругопластический

Заключение. Таким образом, приведенные постановка и решение задачи об упруго-пластическом деформировании трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, находящегося под действием поверхностных нагрузок, позволяют проводить численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния материалов слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с

2. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Деформирование металлополимерных систем. – Мн.: Бел. наука, 2004. – 342 с.
3. Горшков А. Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д. В. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.
4. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций.– Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
5. Яровая А. В., Гу Юй. Изгиб трехслойного стержня локальными нагрузками // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. –Т. 9, № 1.– С. 11–14.
6. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
7. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 с.