1. Белорусский национальный технический университет, Минск
2. Смоленская государственная академия физической культуры, спорта и туризма

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗВЕНА КОНЕЧНОСТИ ЧЕЛОВЕКА ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ КОМПОЗИТОМ

Чигарев А.В.[1], Борисов А.В.[2]

Двуногая ходьба редко встречается в природе. В ней еще много неисследованного. Так, в эксперименте обнаружено, что при ходьбе возникают большие ускорения в нижних конечностях, которые при абсолютной жесткости модели должны мгновенно передаваться в мозг. Однако в реальных условиях подобные ускорения в верхнем отделе не наблюдаются. Из этого следует вывод, что жесткие модели не адекватно отражают реальные явления. В живой природе основное место занимают деформируемые системы. Поэтому при моделировании биологических систем необходимо использование механических деформируемых моделей.

Механика деформаций многогранна. Учет деформаций и расчет многозвенных деформируемых систем очень сложен, а возможности применения и эффекты, связанные с их использованием, велики.

Рассмотрим один из возможных вариантов учета деформируемости звеньев. Будем считать, что звенья ноги являются двухкомпонентными композитами. Одна компонента имеет упругие модули кости, другая – упругие модули хрящевой ткани. Эффективные модули звеньев можно рассчитать по формулам схемы Фойхта:

$$E_i^{\Phi} = E_{i(1)}c_{(1)} + E_{i(2)}c_{(2)}, \quad c_{(1)} + c_{(2)} = 1, \tag{1}$$

где $E_{i(\alpha)}$ – модуль Юнга для $\alpha = 1$ – кости, для $\alpha = 2$ – хрящевой ткани i-того звена, $c_{(\alpha)}$ – объемные концентрации кости ($\alpha = 1$) $c_{(1)} = \dfrac{V_{кости}}{V_{звена}}$, хрящевой ткани ($\alpha = 2$) $c_{(2)} = \dfrac{V_{ткани}}{V_{звена}}$.

И схемы Рейсса:

$$\frac{1}{E_i^R} = \frac{c_{(1)}}{E_{i(1)}} + \frac{c_{(2)}}{E_{i(2)}}. \tag{2}$$

Истинное значение модуля Юнга i-того звена E_i находится между нижней (Рейсса) и верхней (Фойхта) границами:

$$E_i^R \le E_i \le E_i^{\Phi}. \tag{3}$$

Зная верхнюю и нижнюю границы, можно провести оценку модулей упругости согласно формулы Хилла:

$$E_i^H = \frac{1}{2}(E_i^R + E_i^{\Phi}). \tag{4}$$

Полученные значения E_i^H подставим в уравнения динамики, которые были получены нами ранее [2].

Будем считать, что деформации звеньев механической системы при движении малы. Это положение справедливо для модели биомеханической системы, моделирующей человека. Кости человека при движении не испытывают предельных нагрузок и значительных деформаций (не более 1% [1]). Сустав может быть и нелинейным, но если распределить деформации по всему звену, то деформации будут малы. Следовательно, для нахождения деформаций, можно воспользоваться линейным законом Гука, согласно которому удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе:

$$F_i = \frac{E_i S_i}{l_{0i}} \Delta l_i, \tag{5}$$

где F_i – сила, действующая на конце i-того стержня, l_{0i} – длина i-того недеформированного стержня, S_i – площадь поперечного сечения i-того стержня, $\Delta l_i = l_i - l_{0i}$ – изменение длины i-того стержня, E_i – модуль Юнга для i-того стержня.

Выражая изменение длины стрежня, получаем деформации кости:

$$\Delta l_i = \frac{F_i l_{0i}}{E_i S_i}. \quad (6)$$

Рассмотрим механизм затухания ударного возмущения при распределении вдоль ноги в рассматриваемой модели.

Пусть схематически изменение упругих свойств вдоль ноги снизу вверх описывается зависимостью модуля Юнга $E(x)$ в виде, изображенном на рис. 1.

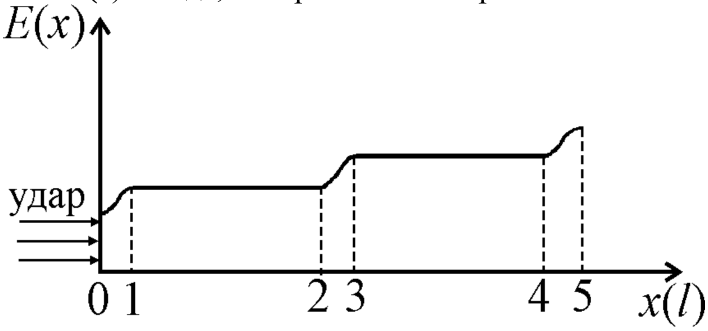

Рис. 1. Зависимость модуля Юнга от длины звеньев ноги
На рисунке зона (0-1) соответствует голеностопному суставу,(1-2) кости голени, (2-3) коленному суставу, (3-4) кости бедра, (4-5) тазобедренному суставу.

Распространение продольного ударного импульса описывается уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где u – перемещение на фронте волны.

Импульс распространяется от $x = 0$ в виде волны скачка напряжений и перемещений. Вследствие того, что жесткость ноги вдоль оси x растет, то будут иметь место прямая и обратная отраженная волны, что обусловливает рассеяние энергии. При этом величина скачка напряжений на фронте растет, а производных перемещений и самих перемещений убывает [3]. Ростом напряжений можно объяснить накопление повреждений в костях и хрящевых тканях.

Следовательно, учет упругости позволяет построить более реальную модель динамики опорно-двигательного аппарата человека.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровский В.И., Федорова В.Н. Биомеханика. – М.: Владос-Пресс, 2003. – 672 с.
2. Чигарев А.В., Борисов А.В. Уравнения движения одиннадцатизвенного антропоморфного механизма с деформируемыми звеньями // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ 29-30 июня 2004 года. / МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ. – М.-Луганск, 2004. – Т. 4. – С. 120-124.
3. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Минск: УП "Технопринт", 2000. – 425 с.