

## СИНТЕЗ РОБАСТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХМАССОВЫМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

Канд. техн. наук, доц. ОПЕЙКО О. Ф.

*Белорусский национальный технический университет*

Анализ и синтез систем управления электроприводами с учетом упругих деформаций в механической части является предметом многочисленных исследований. Для точного описания динамики упругих деформаций необходимо применять уравнения в частных производных [1]. Однако в инженерных расчетах используют приближенные многомассовые модели, в частности двухмассовую модель [2–6]. Для двухмассовых электромеханических объектов разработаны методы синтеза традиционных линейных регуляторов, а также адаптивных и нечетких управлений [4–6]. Обычно в процессе проектирования вопрос о необходимости использования одно- либо двухмассовой модели решается на основании приближенного сравнения частоты собственных колебаний упругого звена с частотами среза контуров регулирования синтезируемой системы. Такой способ может дать ошибочный результат по причине зависимости собственных частот упругих колебаний от параметров регулятора.

Целью данной работы является определение условий, при которых одномассовая модель может быть применена для синтеза системы, где возможны упругие колебания. Тогда возможно обеспечить показатели качества без усложнения структуры системы. Используется метод малого параметра [7, 8], и определяется численная оценка условия малости параметра. За малый параметр  $\mu$  принято отношение требуемой характеристической частоты синтезируемой системы к собственной частоте свободных колебаний упругого звена. Поскольку для параметров объекта известны лишь интервалы их изменения, синтезируемая система должна обладать свойством параметрической грубости (робастности, инвариантности к внутренним возмущениям объекта).

Рассмотрим синтез робастной линейной системы с одним входом и одним выходом. Критерием качества является принадлежность замкнутой системы множеству линейных моделей, характеристический полином которых имеет вид

$$N(s) = p^m + d_m p + \dots + d_2 p + d_1. \quad (1)$$

Показатели затухания  $\kappa_i$  и характеристическая частота  $\nu_0$  модели определяются по коэффициентам полинома в соответствии с выражениями [10, 11]:

$$\kappa_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} a_{i+1}}; \quad (2)$$

$$\nu_0 = \frac{d_2}{d_1}. \quad (3)$$

Эти две величины должны удовлетворять условиям:

$$\kappa_i \in [\underline{\kappa}, \bar{\kappa}]; \quad v_0 \in [\underline{v}, \bar{v}]. \quad (4)$$

Здесь черта снизу означает нижнюю, а черта сверху – верхнюю границы допустимых значений. Условия (4) вводятся в качестве критерия принадлежности моделей допустимому множеству. Очевидно, они могут быть выполнены для моделей различных порядков  $m$ . Вначале принимаем  $\mu = 0$ , пренебрегая быстрой составляющей движения. Выполняется синтез управления для медленной составляющей таким образом, чтобы замкнутая система удовлетворяла условиям (2)–(4) при:

$$\kappa_i = \bar{\kappa}; \quad v_0 = \bar{v}. \quad (5)$$

В результате получим замкнутую систему, которая при учете быстрой составляющей не будет удовлетворять принятому оптимуму. Возможно, однако, что система будет принадлежать множеству, определяемому соотношениями (2)–(4).

Электропривод при условии постоянства потокосцепления ротора  $\Psi = \text{const}$  с учетом упругих деформаций описывается линеаризованными уравнениями:

$$J_2 \dot{\omega}_2 = M_2; \quad (6)$$

$$\dot{M}_2 = c(b\omega_1 - \omega_2); \quad (7)$$

$$J_1 \dot{\omega}_1 = M_1 - bM_2; \quad (8)$$

$$T \dot{M}_1 = -M_1 + k_M k \omega_1 / R_3 + b_2 u. \quad (9)$$

Здесь  $\omega_1, \omega_2$  – скорости соответственно двигателя и рабочего органа;  $M_1 = k_M i$  – электромагнитный момент двигателя;  $M_2$  – упругий момент;  $J_1, J_2$  – моменты инерции;  $T = T_3$  – электромагнитная постоянная времени;  $b_2 = \beta_{\Pi} k_M / R_3$ ,  $c, k, k_M, R_3, b, \beta$  – постоянные параметры.

Если привод содержит П-регулятор активной составляющей тока с коэффициентом усиления  $\beta_T$  и обратной связью  $k_T$ , то электромагнитный процесс эквивалентного звена описывается уравнением

$$T \dot{M}_1 = -M_1 - k_0 \omega_1 + b_2 u, \quad (10)$$

где  $k_0 = k k_M / R$ ;  $R = R_3 + \beta_T \beta_{\Pi} k_T$ ;  $T = T_3 R_3 / R$ ;  $\beta = \beta_T \beta_{\Pi}$ ;  $b_2 = \beta k_M / R$ .

Если привод содержит ПИ-регулятор активной составляющей тока с передаточной функцией  $(T_3 p + 1) / (T_{\mu} k_T b_2 p)$  и обратной связью  $k_T$ , то электромагнитный процесс эквивалентного звена описывается уравнением (10), где  $T = T_{\mu}$ .

Измеряемая датчиком скорость ротора двигателя  $\omega_1$  может рассматриваться в качестве выходной величины системы. Динамика системы (6)–(9)

зависит от следующих параметров: электромеханической постоянной времени  $T_M = J_1 R / (k k_M)$ ;  $\lambda = J_2 / J_1$ ;  $\bar{\lambda} = b^2 J_2 / J_1 + 1$ ; собственных частот  $v_1 = 1 / \sqrt{T T_M}$ ;  $v_2 = \sqrt{c / J_2}$ . Введем обозначения:  $x_1 = \omega_2$ ;  $x_2 = M_2$ ,  $z_1 = \omega_1$ ;  $z_2 = \dot{z}_1$ . Упругие колебания можно рассматривать как быструю составляющую движения, описываемую уравнениями (6), (7). Медленное движение определяется (8), (9). В соответствии с [7, 8] при изучении быстрого движения медленные переменные приближенно принимаются за постоянные величины, а при анализе медленной составляющей пренебрегают инерционностью быстрого звена. В качестве малого параметра принята величина  $\mu = v_0 / v_2$ . Система (6)–(9) принимает вид:

$$J_2 \dot{x}_1 = x_2; \quad (11)$$

$$\mu^2 \dot{x}_2 = v_0^2 J_2 (b z_1 - x_1);$$

$$\dot{z}_1 = z_2; \quad (12)$$

$$\dot{z}_2 = b \lambda v_2^2 x_1 - (b / J_1 T) x_2 + (\lambda b^2 v_2^2 + v_1^2) z_1 - z_2 / T + b_2 u.$$

Значению  $\mu = 0$  соответствует медленная составляющая движения. Медленные переменные обозначены чертой сверху. Модель для них примет вид:

$$J_2 \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2; \quad 0 = v_0^2 J_2 (b \bar{z}_1 - \bar{x}_1);$$

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{z}_2;$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = b \lambda v_2^2 \bar{x}_1 - (b / J_1 T) \bar{x}_2 + (\lambda b^2 v_2^2 + v_1^2) \bar{z}_1 - \bar{z}_2 / T + v_1^2 b_2 \bar{u}.$$

После преобразований, обозначая  $\bar{b}_2 = b_2 v_1^2$ ;  $v_\Sigma^2 = \lambda b^2 + v_1^2$ , получим:

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{z}_2; \quad (13)$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = b^2 \lambda v_2^2 \bar{z}_1 - (b^2 \lambda T) \bar{z}_2 + v_\Sigma^2 \bar{z}_1 - \bar{z}_2 / T + b_2 \bar{u}.$$

Сигнал управления для медленного движения, обеспечивающий пропорциональные (П) регуляторы скорости и ускорения, определяется следующим образом:

$$\bar{u} = k_1 (\omega^* - \bar{z}_1) - k_2 \bar{z}_2. \quad (14)$$

Для управления с пропорционально-интегрирующим (ПИ) регулятором скорости справедливо выражение

$$\bar{u} = k_0 \int_0^t (\omega^* - \bar{z}_1) dt + k_1 (\omega^* - \bar{z}_1) - k_2 \bar{z}_2. \quad (15)$$

Здесь  $\omega^*$  – заданное значение скорости. Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в контурах регулирования следует определить из условия, чтобы замкнутая система с моделью (13) объекта имела характеристический полином заданного вида. В случае П- и ПИ-регуляторов скорости это будут полиномы второго и третьего порядков соответственно:

$$\begin{aligned} N_2(p) &= p^2 + \overline{\kappa}\overline{v}_0 p + \overline{\kappa}\overline{v}_0^2; \\ N_3(p) &= p^3 + \overline{\kappa}^2\overline{v}_0 p^2 + \overline{\kappa}^3\overline{v}_0^2 p + \overline{\kappa}^3\overline{v}_0^3. \end{aligned} \quad (16)$$

Характеристическая частота  $\overline{v}_0$  и показатель  $\overline{\kappa}$  затухания синтезируемой системы принимаются в зависимости от требуемого быстродействия и допустимого в системе перерегулирования. Так, модульному оптимуму соответствует  $\overline{\kappa} = 2$ , а при  $\overline{\kappa} = 4$  получим близкие к аperiodическим процессы, что соответствует кратным корням характеристического полинома  $N_2(p)$ . Приравнивая характеристический полином системы (13) к полиному (16), получим выражения для коэффициентов  $k_0, k_1, k_2$  в контурах регулирования в случае ПИ-регулятора:

$$\overline{b}_2 k_0 = \overline{v}_0^3; \quad \overline{b}_2 k_1 = \overline{\kappa}\overline{v}_0^2 - v_2^2; \quad \overline{b}_2 k_2 = \overline{\kappa}\overline{v}_0 - 1/T.$$

В случае П-регулятора скорости нужно принять  $\overline{b}_2 k_0 = 0$ . Сигнал управления (14) или (15), полученный для редуцированной модели (13), будет действовать в системе с двухмассовым объектом (11), (12). Такая замкнутая система для управления (14) описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} J_2 \dot{x}_1 &= x_2; \\ \mu^2 \dot{x}_2 &= v_0^2 J_2 (bz_1 - x_1); \\ \dot{z}_1 &= z_2; \\ \dot{z}_2 &= b\lambda v_2^2 x_1 - (b/J_1 T)x_2 - K_1 z_1 - K_2 z_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь значения  $K_1, K_2$  принимают различный вид в зависимости от условий синтеза. Так, если электромагнитная постоянная  $T$  достаточно мала, а именно,  $\overline{\kappa}\overline{v}_0 \leq 1/T$ , то коэффициент  $k_2$  усиления по ускорению получается отрицательным, что означало бы положительность соответствующей обратной связи. В случае робастного синтеза соотношение  $\overline{\kappa}\overline{v}_0 \leq 1/T$  указывает на возможность принять  $k_2 = 0$ , что должно упростить структуру системы без существенного снижения ее качества. Если же  $k_i \geq 0$ , то справедливы выражения:

$$K_1 = \overline{\kappa}\overline{v}_0^2 \overline{\lambda} + \lambda b^2 v_2^2; \quad K_2 = \overline{\lambda}\overline{\kappa}\overline{v}_0 - b^2 \lambda / T. \quad (18)$$

Характеристический полином системы (17) имеет вид

$$N_4(p) = p^4 + a_4 p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1. \quad (19)$$

Значения коэффициентов полинома, если  $1/T \geq \bar{\kappa}\bar{v}_0$ , определяются выражениями:

$$a_1 = \bar{\lambda}\bar{\kappa}\mu^2 v_2^4; \quad a_3 = v_2^2 \bar{\lambda} (1 + \bar{\kappa}\mu^2); \quad a_2 = \bar{\kappa} (1/T) v_2^2 \bar{\lambda}; \quad a_4 = K_2 = 1/T. \quad (20)$$

Если обозначить  $\delta = T\bar{v}_0$  для случая  $1/T \leq \bar{\kappa}\bar{v}_0$ , то справедливы эти же выражения, но

$$a_4 = K_2 = (\bar{\lambda}\bar{\kappa} - b^2\lambda/\delta)\bar{v}_0. \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$\alpha_2 = (1 + \delta\mu^2)/\delta; \quad \alpha'_2 = 1/\delta; \quad \alpha''_2 = (1 + \delta\mu^2)/\delta; \quad \alpha_3 = 1 + \bar{\kappa}\mu^2; \\ \alpha_4 = \bar{\lambda}\bar{\kappa} - b^2\lambda/\delta.$$

Теперь полином (19) можно записать в виде

$$N_4(p) = p^4 + \bar{v}_0\alpha_4 p^3 + \bar{\lambda}v_2^2\alpha_3 p^2 + \bar{\kappa}\bar{\lambda}v_2^2\bar{v}_0\alpha'_2 p + \bar{\lambda}\bar{\kappa}\mu^2 v_2^4. \quad (22)$$

Для принадлежности системы (17) с управлением (14) множеству (4) достаточно соблюдения условий:

$$a_2^2 \geq \kappa a_1 a_2; \quad a_3^2 \geq \kappa a_2 a_4; \quad a_4^2 \geq \kappa a_3; \quad a_1/a_2 = v_0; \quad \bar{\kappa}\bar{v}_0 \leq 1/T. \quad (23)$$

Здесь  $\kappa$  и  $v_0$  должны удовлетворять условиям (4). С учетом принятых обозначений условия (23) преобразуются к выражениям (25), (26), представленным в табл. 1. Система (6)–(9) с управлением (15) имеет характеристический полином

$$N_5(p) = (p^4 + a_4 p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1) p + (p^2 + v_2^2) \bar{v}_0^3 \bar{\lambda}. \quad (24)$$

Для принадлежности системы множеству (4) достаточно соблюдения условий (27), (28), представленных в табл. 1.

Таблица 1

| Условие                          | Система с ПД-регулятором скорости  | Система с ПИД-регулятором скорости  |
|----------------------------------|--|---|
| $\bar{\kappa}\bar{v}_0 \leq 1/T$ | $\begin{aligned} (\alpha'_2)^2 &\geq \bar{\kappa}\bar{\lambda}\alpha_3; \\ \bar{\lambda}\alpha_3^2 &\geq \kappa\alpha'_2; \\ (\alpha'_2)^2 &\geq \bar{\kappa}\bar{\mu}^2\alpha_3 \end{aligned} \quad (25)$ | $\begin{aligned} (\alpha'_2)^2 &\geq \bar{\kappa}\bar{\lambda}\alpha_3; \\ \bar{\lambda}\alpha_3^2 &\geq \bar{\kappa}\mu^2\alpha'_2\alpha_2\delta; \\ (\alpha_2\delta\mu)^2 &\geq \bar{\kappa}\alpha_3; \\ \bar{\kappa}^{-2} &\geq \kappa\alpha_2 \end{aligned} \quad (27)$ |
| $\bar{\kappa}\bar{v}_0 \geq 1/T$ | $\begin{aligned} \alpha_4^2\mu^2 &\geq \bar{\kappa}\bar{\lambda}\alpha_3; \\ \bar{\lambda}\alpha_3^2 &\geq \bar{\kappa}\bar{\mu}^2\alpha_4; \\ \bar{\kappa} &\geq \kappa\alpha_3 \end{aligned} \quad (26)$ | $\begin{aligned} \alpha_4^2\mu^2 &\geq \bar{\kappa}\bar{\lambda}\alpha_3; \\ \bar{\lambda}\alpha_3^2 &\geq \bar{\kappa}\bar{\mu}\alpha''_2\alpha_4; \\ \bar{\kappa} &\geq \kappa\alpha_3; \\ \bar{\kappa}^{-2} &\geq \kappa\alpha_3''/\mu \end{aligned} \quad (28)$         |

Условия (27)–(29) относятся к системе с астатическим регулятором скорости, причем условие (29) для случая  $\bar{k}v_0 \geq 1/T$  является избыточным, поскольку, как можно убедиться, всегда выполняется при выполнении  $\bar{k} \geq k\alpha_3$ .

Вначале проверяется возможность обеспечить заданные показатели качества в разомкнутой системе, учитывая, что характеристический полином для системы (12) имеет вид

$$N_0(p) = p^4 + (1/T)p^3 + \bar{\lambda}v_2^2p^2 + (\bar{\lambda}v_2^2/T)p + v_1^2v_2^2.$$

Условия принадлежности полинома заданному множеству принимают вид:

$$1/T^2 \geq k\bar{\lambda}v_2^2; \quad \bar{\lambda}v_2^2T^2 \geq \kappa; \quad \bar{\lambda}/T^2 \geq \kappa v_1^2. \quad (30)$$

Если эти условия соблюдаются и к электроприводу не предъявляются какие-либо требования по точности обработки выходной величины, то система может быть построена как разомкнутая. Иначе следует ввести обратную связь по скорости электродвигателя и проверить условия (25) либо (27). Если они не выполняются, то следует проверка условий (26) или (28) для двухконтурной системы.

Полученный в результате синтеза сигнал управления (15) может быть использован в структуре с обратными связями по скорости и ее производной и с ПИ-регулятором скорости. Другой вариант структуры содержит обратную связь по скорости и ПИД-регулятор скорости (рис. 1).

На рис. 1 приняты обозначения:

$$K_P = b_1(1 + b_0/p) + \frac{b_2 J p}{T p + 1}; \quad K_T = \frac{k_M}{R(T p + 1)};$$

$$K_M = \frac{1}{J_1 p}; \quad K_{M1} = \frac{b^2 J_2 p^2}{J_2 p^2 + c} = \frac{b^2 p^2}{p^2 + v_2^2}.$$

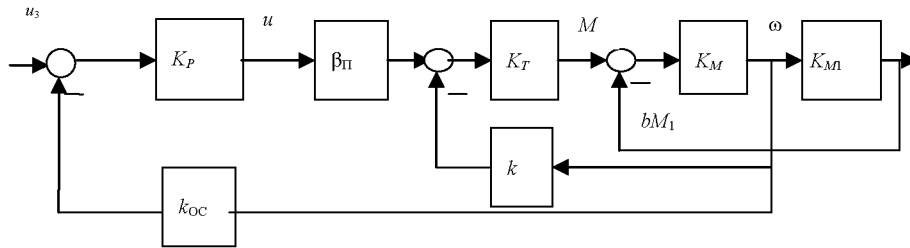


Рис. 1. Структура системы управления

Для линейной модели (12) с сигналом управления (15) выполнено математическое моделирование переходных процессов при параметрах:  $J_1 = 0,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $J_2 = 20 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $c = 0,7 \cdot 10^6 \text{ сДж/рад}$ ;  $b = 0,2$ ;  $T = 0,02 \text{ с}$ ;  $R = 0,4 \text{ Ом}$ ;  $k = 2,44$ ;  $k_M = 4,2$ ;  $k_{oc} = 1$ .

На рис. 2 представлены процессы в системе с ПИД-регулятором скорости при задающем воздействии  $u_3 = 10$  рад/с, формируемом инерционным фильтром. В первом случае (рис. 2а, б) задано значение  $\nu_0 = 70$  с<sup>-1</sup>. Условия (27) не выполнены, но выполнены условия (28).

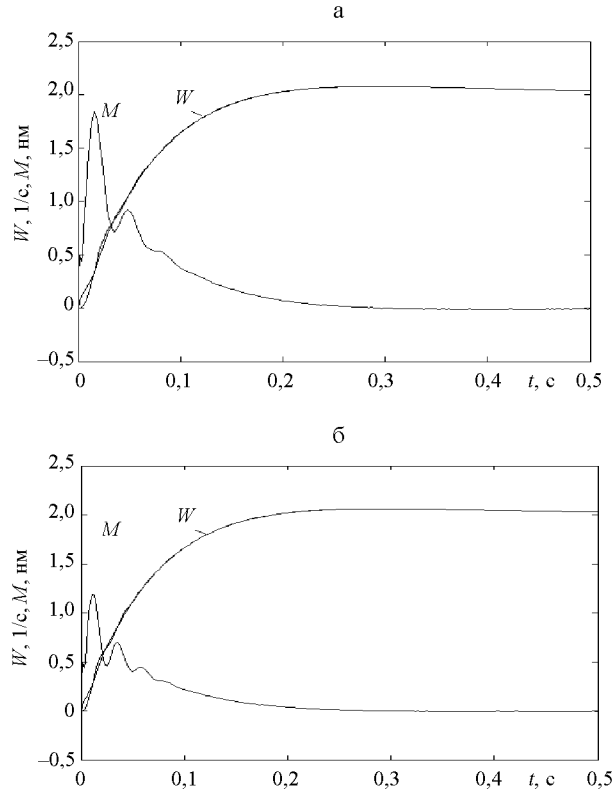


Рис. 2. Переходные процессы в системе: а – при  $\nu_0 = 70$  с<sup>-1</sup> и расчетных значениях параметров; б – при уменьшенном вдвое моменте инерции  $J_2$

Как показывают результаты моделирования, при задании более высоких, чем 70 с<sup>-1</sup> характеристических частот, условия (27), (28) не удается выполнить, а переходные процессы в системе имеют неудовлетворительные показатели качества. В таких случаях необходимо синтезировать систему с обратными связями по переменным упругой механической части.

## ВЫВОД

Метод синтеза позволяет в случаях, где не требуются высокие динамические показатели и точность, обойтись простой структурой системы управления. Если изложенный метод не дает возможности удовлетворить заданным требованиям, необходим переход к структуре с полной системой обратных связей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рассудов, Л. Н. Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов / Л. Н. Рассудов, В. Н. Мядзель. – Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1987. – 144 с.

2. К о в ч и н, С. А. Теория электропривода: учеб. для вузов / С. А. Ковчин, Ю. А. Сабинин. – СПб.: Энергоатомиздат, Санкт-Петербургское отд-ние, 2000. – 496 с.
3. Ф и р а г о, Б. И. Теория электропривода: учеб. пособие / Б. И. Фираго, Л. Б. Павлячик. – Минск: ЗАО «Техноперспектива», 2004. – 527 с.
4. Б о р ц о в, Ю. А. Автоматизированный электропривод с упругими связями. – 2-е изд., перераб. и доп. / Ю. А. Борцов, Г. Г. Соколовский. – СПб.: Энергоатомиздат, Санкт-Петербургское отд-ние, 1992. – 288 с.
5. Б о р ц о в, Ю. А. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением / Ю. А. Борцов, Н. Д. Поляхов, В. В. Путов. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.
6. S z a b a t, K. Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i pomiarów Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej / K. Szabat // Studia i Materialy. – 2003. – № 23. – P. 186–195.
7. М о i с е е в, N. N. Asymptotik Methods in the Theory of Optimal Control / N. N. Moiseev, F. L. Chernousko // IEEE Transactions on AC. – 1981. – Vol. AC-26. – P. 993–1000.
8. С h o w, J. H. A Decomposition of Near-Optimum Regulators for Systems with Slow and Fast Modes / J. H. Chow, P. V. Kokotović // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1976. – Vol. AC-21. – № 5. – P. 701–705.
9. N a s l i n, P. Polinômes normaux et critère algebrique d' amortissement (I). Automatisme / P. Naslin. – 1963. – Vol. VIII, № 6. – P. 215–223.
10. С и с т е м ы автоматического управления объектами с переменными параметрами. Инженерные методы анализа и синтеза / Б. Н. Петров [и др.]. – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
11. О п е й к о, О. Ф. Синтез линейной системы на основании упрощенной модели объекта / О. Ф. Опейко // АиТ. – 2005. – № 1. – С. 29–35.

Представлена кафедрой электропривода  
и автоматизации промышленных установок  
и технологических комплексов

Поступила 22.02.2008

УДК 62-83

## СИНТЕЗ КОМБИНИРОВАННОГО РЕГУЛЯТОРА ПОЛОЖЕНИЯ

Доц. МИХЕЕВ Н. Н., инж. РАТКЕВИЧ Е. П.

*Белорусский национальный технический университет*

Основные требования к системам воспроизведения движения и позиционным системам как частному случаю систем воспроизведения – быстродействие и точность. Эти требования частично совпадают, так как уменьшение ошибки будет происходить тем быстрее, чем больше быстродействие системы. Однако эти требования противоречат друг другу, так как для получения максимального быстродействия требуется максимальное управление, а для получения высокой точности необходимо постепенное уменьшение управления при подходе к заданному положению с тем, чтобы исключить перерегулирование и возникновение колебаний [1, 2].

Качество работы систем воспроизведения движения можно повысить за счет рационального построения управляющего устройства. Примем за ос-