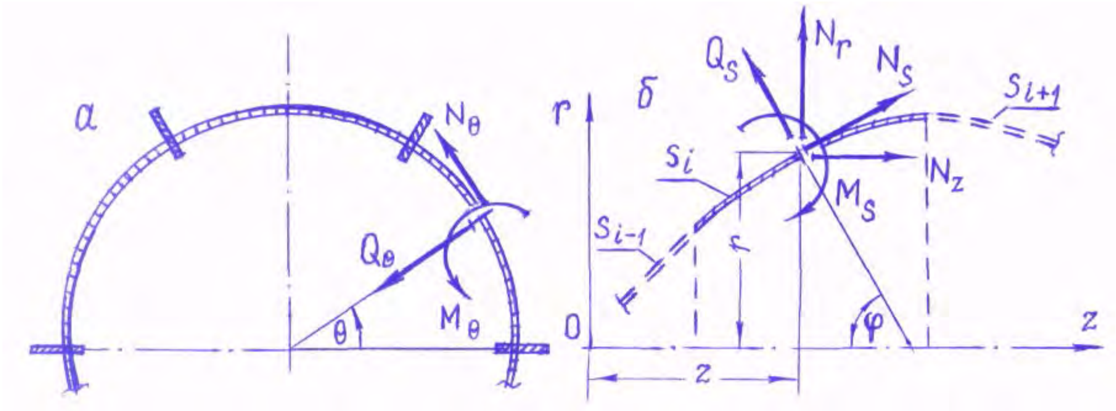
Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт

ПРУГКАЯ РАЎНАВАГА САСТАЎНЫХ АБАЛОНАК ВЯРЧЭННЯ З МЕРЫДЫЯНАЛЬНЫМІ РЭБРАМІ

Русан С.І.

The infinite basic system of the differential equations describing the elastic equilibrium of the rotation shells, strengthened by meridional ribs, is abtained. The shell envelope consists of several sections, distinguished by geometrical parameters and by exterior forces. The calculation model takes into account a discrete disposition of ribs.

1. Агульныя звесткі. Відавочныя перавагі рэбрыстых абалонак у параўнанні з гладкімі забяспечылі ім шырокае распаўсюджванне ў розных галінах тэхнікі: у будаўнічых канструкцыях, у машына-, авія-, суднабудаванні і інш. Імклівае развіццё тэхнікі стымулюе пошукі аптымальных канструкцый і распрацоўку новых, больш дасканалых, метадаў разліку іх напружана-дэфармаванага стану. У большасці вядомых прац разлік рэбрыстых абалонак выконваецца на падставе канструктыўна-анізатропнай мадэлі, якая не ўлічвае дыскрэтнае размяшчэнне рэбраў, і таму не дазваляе атрымліваць дакладныя рэзультаты. Тут выкарыстана разліковая мадэль, прапанаваная ў рабоце |1| для абалонак вярчэння з простай формай мерыдыяна. Як і ў рабоце |1|, разглядаецца абалонка пераменнай уздоўж мерыдыяна таўшчыні з рэгулярна размешчанымі ў акружным напрамку аднолькавымі рэбрамі (рыс. 1,а) пераменнай жорсткасці.



Рыс. 1.

Характар знешніх уздзеянняў і геаметрычныя параметры сістэмы забяспечваюць цыклічна-сіметрычны характар яе напружана-дэфармаванага стану. Рэбры працуюць ва ўмовах плоскага выгіну з расцяжэннем (сцісканнем). Нагрузкі на іх і сілы узаемадзеяння з абалонкай прыведзены да так званых *ліній спалучэння*, па якіх плоскасці сіметрыі рэбраў перасякаюцца з сярэдняй паверхняй абалонкі. У адрозненне ад работы |1|, тут разглядаюцца абалонкі, утваральныя якіх складаюцца з некалькіх розных па форме участкаў (рыс. 1,б). Акрамя таго, у якасці асноўных (шукаемых) функцый тут прыняты не кінематычныя, як у |1|, а *статыка-кінематычныя* функцыі, выкарыстаныя ўпершыню для даследавання рэбрыстых абалонак у рабоце |2|. У гэтых функцыях непасрэдна выражаюцца ўмовы на краях абалонкі і на межах участкаў.

2. Ураўненні раўнавагі. Як вышэй адзначана, участкі падмацаванай абалонкі адрозніваюцца геаметрычнымі параметрамі і нагрузкамі. Умовы спалучэння на іх граніцах для абалонкі і рэбраў аднолькавы. Па даўжыні абалонкі рэбры размешчаны ў агульных для ўсіх участкаў мерыдыянальных плоскасцях. Іх кантактныя сілы ўзаемадзеяння з абалонкай і ўсе кампаненты напружана-дэфармаванага стану абалонкі прадстаўляем у выглядзе трыганаметрычных шэрагаў па акружной каардынаце θ. Гэта дазваляе ўраўненні раўнавагі ў прыватных вытворных прывесці да звычайных дыферэнцыяльных ураўненняў адносна амплітудных значэнняў унутраных сіл і момантаў. Запішам іх для абалонкі з састаўным мерыдыянам, захоўваючы агульнапрынятыя абазначэнні сілавых фактараў:

$$N'_{rk} + a_2 N_{rk} - \frac{1}{r} N_{\theta k} + a_5 S_k - a_3^2 \, sin \, M_{\theta k} + a_\lambda \overline{q}_r + q^*_{rk} = 0; \tag{2.1}$$

$$N'_{zk} + a_2 N_{zk} + a_4 S_k + a_3^2 \, cos \, \varphi M_{\theta k} - \frac{2a_3}{r} H_k + a_\lambda \overline{q}_z + q^*_{zk} = 0; \tag{2.2}$$

$$S'_k - a_3 N_{\theta k} + 2a_2 S_k - a_1 a_3 M_{\theta k} + q^*_{\theta k} = 0 \qquad ; \tag{2.3}$$

$$M'_{sk} + 2a_3 H_k + a_2 M_{sk} - a_2 M_{\theta k} - sin \, \varphi N_{rk} + cos \, \varphi N_{zk} = 0. \tag{2.4}$$

Тут $a_1 = \frac{sin \, \varphi}{r}$; $a_2 = \frac{cos \, \varphi}{r}$; $a_3 = \frac{kn}{r}$; $a_4 = a_3 \, sin \, \varphi$; $a_5 = a_3 \, cos \, \varphi$;

$a_\lambda = \frac{n\lambda_k}{\pi r}$; $\lambda_k = \frac{1}{2}$ пры $k = 0$, $\lambda_k = 1$ пры $k \geq 1$; q^*_{rk}, q^*_{zk}, $q^*_{\theta k}$ - кампаненты нагрузкі на абалонку; $\overline{q}_r$, $\overline{q}_z$ - кантактныя сілы ўзаемадзеяння рэбраў з абалонкай; n - колькасць рэбраў; k - нумар члена раскладу ў шэраг. Штрыхом абазначана вытворная па s.

Ураўненні раўнавагі элемента рабра запісваюцца ў выглядзе:

$$\overline{N}'_r + \overline{q}^*_r + \overline{q}_r = 0, \; \overline{N}'_z + \overline{q}^*_z - \overline{q}_z = 0, \; \overline{M}'_s - sin \, \varphi \overline{N}_r + cos \, \varphi \overline{N}_z + \overline{m}^* = 0 \tag{2.5}$$

Ва ўраўненнях (2.5) $\overline{q}^*_r$, $\overline{q}^*_z$, $\overline{m}^*$ - зададзеныя сілавыя і маментная нагрузкі на рабро. Запішам суадносіны пругкасці для абалонкі (у амплітудных значэннях) і для рабра:

$$N_{rk} = \frac{1}{cos^2 \varphi} \left[D_1 (cos^2 \varphi u'_{rk} + \frac{1}{2} sin \, 2\varphi u'_{zk} + \nu a_2 u_{rk} + \nu a_5 \upsilon_k) - \frac{1}{2} sin \, 2\varphi N_{zk} \right]; \tag{2.6}$$

$$N_{\theta k} = D_1 (\nu \, cos \, \varphi u'_{rk} + \nu \, sin \, \varphi u'_{zk} + \frac{1}{r} u_{rk} + a_3 \upsilon_k); \tag{2.7}$$

$$S_k = \frac{1}{2} \mu p_0 D_1 \upsilon'_k - \mu kn (\frac{1}{2} a_2 D_1 + \frac{1}{r^2} sin \, 2\varphi D_2) u_{rk} + \mu kn (\frac{1}{r^2} a_2 \, sin \, 2\varphi D_2 - \frac{1}{2} a_1 D_1) u_{zk} -$$

$$- \frac{1}{2} \mu a_2 p_0 D_1 \upsilon_k - 2\mu a_1 a_2 D_2 \vartheta_{sk}; \tag{2.8}$$

$$M_{sk} = D_2 \left[\vartheta'_{sk} + \nu a_3^2 (sin \, \varphi u_{rk} - cos \, \varphi u_{zk}) + \nu (a_1 a_3 \upsilon_k + a_2 \vartheta_{sk}) \right]; \tag{2.9}$$

$$M_{\theta k} = D_2 \left[\nu \vartheta'_{sk} + a_3^2 (sin \, \varphi u_{rk} - cos \, \varphi u_{zk} + sin \, \varphi \upsilon_k) + a_2 \vartheta_{sk} \right]; \tag{2.10}$$

$$H_k = -\mu D_2 \left[a_2 a_3 (sin \, \varphi u_{rk} - cos \, \varphi u_{zk}) + a_1 a_2 \upsilon_k + a_3 \vartheta_{sk} - a_1 \upsilon'_k \right]; \tag{2.11}$$

$$\overline{N}_r = \frac{1}{cos^2 \varphi} \left[(cos^2 \varphi \overline{u}'_r + \frac{1}{2} sin \, 2\varphi \overline{u}'_z) D_3 + cos \, \varphi D_4 \overline{\vartheta}'_s - \frac{1}{2} sin \, 2\varphi \overline{N}_z \right]; \tag{2.12}$$

$$M_s = D_5 \overline{\vartheta}'_s + D_4 (cos \, \varphi \overline{u}'_r + sin \, \varphi \overline{u}'_z). \tag{2.13}$$

Тут $\overline{u}_r$, $\overline{u}_z$ - лінейные перамяшчэнні пунктаў лініі спалучэння;

$\overline{\vartheta}_s$ - вуглавая дэфармацыя рабра; D_1, D_2 і D_3, D_4, D_5 - характарыстыкі жорсткасцей абалонкі і рабра; $\mu = 1 - \nu$; ν - каэфіцыент Пуасона.

Залежнасць паміж кампанентамі сілавых фактараў ў прынятай тут цыліндрычнай сістэме каардынат z, r, Θ і ў натуральнай s, η, Θ вызначаецца формуламі

$$N_r = cos\,\varphi N_s + sin\,\varphi Q_s,\ N_z = sin\,\varphi N_s - cos\,\varphi Q_s; \tag{2.14}$$

$$\overline{N}_r = cos\,\varphi \overline{N}_s + sin\,\varphi \overline{Q}_s,\ \overline{N}_z = sin\,\varphi \overline{N}_s - cos\,\varphi \overline{Q}_s. \tag{2.15}$$

3. Асноўныя функцыі. Выбар асноўных функцый у значнай ступені вызначае поспех у рашэнні ўсёй задачы. Яны павінны задаволіць наступныя запатрабаванні: па-першае, апісваць напружана-дэфармаваны стан падмацаванай абалонкі; па-другое, дапускаць найбольш простую фармулёўку ўмоў на яе краях і на граніцах участкаў; па-трэцяе, дазваляць складанне асноўных дыферэнцыяльных ураўненняў у зручнай для рашэння з выкарыстаннем сучасных лікавых алгарытмаў форме. У якасці такіх функцый прымаем:

$$y_{1k} = u_{rk},\ y_{2k} = u_{zk},\ y_{3k} = \upsilon_k,\ y_{4k} = \vartheta_{sk}; \tag{3.1}$$

$$y_{5k} = N_{rk} + a_\lambda \overline{N}_r,\ y_{6k} = N_{zk} + a_\lambda \overline{N}_z,\ y_{7k} = S_k,\ y_{8k} = M_{sk} + a_\lambda \overline{M}_s. \tag{3.2}$$

4.Вывад сістэмы асноўных дыферэнцыяльных ураўненняў. Пяройдзем ва ўраўненнях (2.1)-(2.5) і суадносінах (2.6)-(2.13) да функцый (3.1), (3.2). Для гэтага памножым (2.12), (2.13) на a_λ і складзем вынік з (2.6), (2.9); тады злева ад знакаў роўнасці атрымаем функцыі y_{5K}, y_{8K}. Запішам гэтыя ўраўненні у выглядзе:

$$D_1 u'_{rk} + a_\lambda D_3 \overline{u}'_r + tg\varphi D_1 u'_{zk} + a_\lambda tg\varphi D_1 \overline{u}'_z + \frac{a_\lambda}{cos\,\varphi} D_4 \overline{\vartheta}'_s = E_{1k} \tag{4.1}$$

$$a_\lambda\, cos\,\varphi D_4 \overline{u}'_r + a_\lambda\, sin\,\varphi D_4 \overline{u}'_z + D_2 \vartheta'_{sk} + a_\lambda D_5 \overline{\vartheta}'_s = E_{2k} \tag{4.2}$$

$$-sin\,\varphi u'_{rk} + cos\,\varphi u'_{zk} = E_{3k} \tag{4.3}$$

дзе $$E_{1k} = -\frac{\nu}{r\,cos\,\varphi} D_1 (\, y_{1k} + kny_{3k} + y_{5k} + tg\varphi y_{6k}\,),$$

$$E_{2k} = \nu a_3(-a_4 y_{1k} + a_5 y_{2k} - a_1 y_{3k}) D_2 - \nu a_2 D_1 y_{4k};\ E_{3k} = y_{4k}.$$

Калі ўлічыць, што $\overline{u}_r = \sum_{k=0}^{\infty} u_{rk}$, $\overline{u}_z = \sum_{k=0}^{\infty} u_{zk}$, $\overline{\vartheta}_s = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_{sk}$ (4.4)

і разглядаць сістэму (4.1) – (4.3) як алгебраічную адносна u'_{rk}, u'_{zk}, ϑ'_{sk}, то па формулах Крамера атрымаем:

$$y'_{1k} = \frac{d_{(1)j}}{d}\ (j = 3k + 1),\ y'_{2k} = \frac{d_{(2)j}}{d}\ (j = 3k + 2),\ y'_{4k} = \frac{d_{(4)j}}{d}\ (j = 3k + 3). \tag{4.5}$$

Тут $d = \left\| e_{ij} \right\|$ - вызначальнік бесканечнага парадку, элементамі якога з’яўляюцца каэфіцыенты пры u'_{rk}, u'_{zk}, ϑ'_{sk} сістэмы (4.1) – (4.3);

$d_{(...)j} = \sum_{k=0}^{\infty} (E_{1k} A_{ij} + E_{2k} A_{(i+1)j} + E_{3k} A_{(i+2)j})$, дзе $i = 3k + 1$; A_{ij}, $A_{(i+1)j}$, $A_{(i+2)j}$ - ад’юнкты элементаў e_{ij} вызначальніка d.

З суадносіны (2.8) знаходзім:

$$y'_{3k} = a_5 y_{1k} + \frac{a_4}{p_0}(1 - 4a_2^2 D_2 / D_1) y_{2k} + a_2 y_{3k} + \frac{4a_4 D_2}{p_0 D_1} y_{4k} . \tag{4.6}$$

Прывядзем ураўненні (2.5) да выгляду:

$$(a_\lambda \overline{N}_r)' + a_\lambda a_2 \overline{N}_r + a_\lambda (\overline{q}_r^* - \overline{q}_r) = 0 ; \tag{4.7}$$

$$(a_\lambda \overline{N}_z)' + a_\lambda a_2 \overline{N}_z + a_\lambda (\overline{q}_z^* - \overline{q}_z) = 0 ; \tag{4.8}$$

$$(a_\lambda \overline{M}_s)' + a_\lambda (a_2 \overline{M}_s - sin\,\varphi \overline{N}_r + cos\,\varphi \overline{N}_z + \overline{m}^*) = 0 . \tag{4.9}$$

Складзем (2.1), (2.2) і (2.4) адпаведна з (4.7), (4.8), (4.9); выключым з атрыманых ураўненняў і з (2.3) велічыні $N_{\theta k}$, $M_{\theta k}$ і H_k на падставе (2.7), (2.10), (2.11) з улікам (4.5). Рэзультат запішам у выглядзе:

$$y'_{5k} = \sum_{j=1}^{8} a_{5j} y_{jk} + \frac{1}{d}(l_1 d_{(1)(3k+1)} + l_2 d_{(2)(3k+2)} + l_{3k} d_{(4)(3k+3)}) - f_{5k} ; \tag{4.10}$$

$$y'_{6k} = \sum_{j=1}^{8} a_{6j} y_{jk} + \frac{1}{d} l_{4k} d_{(4)(3k+3)} - f_{6k} ; \tag{4.11}$$

$$y'_{7k} = \sum_{j=1}^{8} a_{7j} y_{jk} + \frac{kn}{d}(l_1 d_{(1)(3k+1)} + l_2 d_{(2)(3k+2)} + l_{3k} d_{(4)(3k+3)}) - f_{7k} ; \tag{4.12}$$

$$y'_{8k} = \sum_{j=1}^{8} a_{8j} y_{jk} + \frac{1}{d} l_{4k} d_{(4)(3k+3)} - f_{8k} . \tag{4.13}$$

Тут $a_{51} = \frac{1}{r^2} D_1 + a_3^2 a_4^2 D_2$, $a_{52} = -a_3^2 a_4 a_5 D_2$, $a_{53} = \frac{a_3}{r} D_1 + a_1 a_3^2 a_4 D_2$,

$a_{54} = a_1 a_3 a_4 D_2$, $a_{55} = -a_2$, $a_{56} = -a_5$, $a_{57} = a_{58} = 0$;

$a_{61} = -a_3^2 a_4 a_5 D_2$, $a_{62} = a_3^2 (\frac{2\mu}{a_6} D_1 - a_5^2) D_2$, $a_{63} = -a_1 a_3^2 a_5 D_2$,

$a_{64} = -\frac{kna_3}{a_6} \left[4a_1^2 (2\nu + cos^2 \varphi) D_2 + (2 + cos^2 \varphi) D_1 \right] D_2$, $a_{65} = 0$, $a_{66} = -a_2$,

$a_{67} = \frac{a_4}{a_6}(4D_2 - a_6)$, $a_{68} = 0$;

$a_{71} = a_3^2 (D_1 + a_4^2 D_2)$, $a_{72} = -a_{63}$, $a_{73} = kna_3^2 (D_1 + a_1^2 D_2)$, $a_{74} = a_1 a_2 a_3$,

$a_{75} = 0$, $a_{76} = 0$, $a_{77} = -2a_2$, $a_{78} = 0$;

$$a_{81} = (2-v)a_{54},\ a_{82} = -\frac{kna_3}{a_6}\left[(2-2\nu+cos^2\varphi)D_1 + 2a_1a_2D_2\right]D_2,\ a_{83} = a_{74},$$

$$a_{84} = \frac{1}{a_6}\left[(2\mu k^2n^2 + cos^2\varphi)D_1 + 6\mu a_4^2D_2 + 4a_1^2\,cos^2\varphi\right],\ a_{85} = sin\varphi,\ a_{86} = -cos\varphi,$$

$$a_{87} = -\frac{4}{a_6}kn\sin\varphi D_2,\ a_{88} = -a_2;$$

$$a_6 = r^2D_1 + 4\,sin^2\varphi D_2,\ l_1 = \nu a_2D_1,\ l_2 = \nu a_1D_1,$$

$$l_{3k} = \nu a_3a_4D_2,\ l_{4k} = -\nu a_3a_5D_2;\ f_{5k} = q^*_{rk} + a_\lambda\overline{q}^*_r,\ f_{6k} = q^*_{zk} + a_\lambda\overline{q}^*_z,$$

$$f_{7k} = q^*_{\theta k},\ f_{8k} = a_\lambda\overline{m}^*.$$

5. Заключэнне. Ураўненні (4.5), (4.6), (4.10)-(4.13) утвараюць асноўную сістэму для рашэння пастаўленай задачы. Дзякуючы выбару асноўных функцый у выглядзе (3.1), (3.2) каэфіцыенты гэтых ураўненняў не ўтрымліваюць вытворных ад характарыстык жорсткасці абалонкі і рэбраў. Паколькі ў выражэнні $d_{(1)j}$, $d_{(2)j}$, $d_{(4)j}$ амплітудныя значэнні перамяшчэнняў уваходзяць пад знакамі бесканечных сум, то асноўная сістэма ўяўляе бесканечную сістэму звязаных паміж сабою звычайных дыферэнцыльных ураўненняў з пераменнымі каэфіцыентамі. Калі колькасць членаў разлажэння ў шэрагі абмяжуем некаторым значэннем m, то атрымаем “усечаную” сістэму, парадак якой роўны $8m+6$. Сыходнасць рэзультата можна ўстанавіць шляхам лікавых даследванняў.

ЛІТАРАТУРА

1. Ильин Л.А. Дифференциальные уравнения упругого равновесия оболочек вращения с меридиональными ребрами при силовых и температурных воздействиях //Прикл. мех. – 1964. – Т.10, вып. 3.
2. Волк С.И., Макарон А.Я. Упругое равновесие замкнутых конических оболочек с меридиональными ребрами // Прикл. мех. – 1977. – Т.13, вып.5.