

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539:374.002.62

Ю.В. ВАСИЛЕВИЧ, д-р физ. мат. наук  
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

В.М. САХОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук  
Московский государственный открытый университет, Россия

С.В. САХОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук  
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

К.А. ГОРЕЛЫЙ, генеральный директор; Е.В. МАЛЮТИН, главный конструктор  
ОАО «Авангард», Россия

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕПРЕГОВ ПРИ СЖАТИИ

*Представлена модель деформации препрегов из гладких и мультиаксиальных тканей. Для них установлены функциональные зависимости для определения величины деформации при поперечном сжатии каждого из семейств нитей. Установлены характеристики в виде неупругой постоянной сжатия и модуля упругости при сжатии. Разработаны методики определения этих характеристик. Для ткани Т-13 проведены соответствующие испытания и найдены значения указанных характеристик.*

**Ключевые слова:** препрег, композит, сжатие, неупругая составляющая, деформация, система уравнений, семейство нитей

**Введение.** Развитие промышленного производства композитов невозможно без широкого внедрения технологии изготовления изделий из полуфабрикатов, в частности, препрегов. При этом к препрегам предъявляются дополнительные требования технологического характера, основными из которых являются гибкость и податливость. В результате уже сформированное изделие может приобрести новые формы с изменением размеров. Такое обстоятельство открывает перед технологами неограниченные возможности, позволяющие в некоторых случаях упростить оснастку, уменьшить период изготовления изделия, повысить его качество и прочностные характеристики. Создание композита тесно связано с проблемой его расчета и поэтому, чтобы гетерогенная система могла рассматриваться как сплошная анизотропная среда с некоторым тензором вязкоупругих характеристик, необходимо установить методы оценки величины этих характеристик.

**Постановка задачи.** Рассмотрим многослойные препреги, состоящие из нескольких слоев гладких тканей [1] или из мультиаксиальных тканей [2]. Для таких препрегов внешняя нагрузка может создавать условия для возникновения растягивающих напря-

жений в нитях, усилий сжатия нитей в поперечном к ним направлении, взаимного смещения нитей одного семейства по нитям второго семейства.

Отметим, что сжатие у препрегов может быть двоякой формы. Очевидно, что сжатие в обычном смысле приводит к потере устойчивости армирующего материала каркаса ткани, так как он представляет собой абсолютно гибкие нити, которые могут воспринимать только растягивающие нагрузки. Сжатие без потери устойчивости может быть осуществлено только совместно с растяжением второго семейства нитей. Простейший случай такого сжатия получается при параллельном сдвиге одного семейства нитей вдоль второго. При таком сжатии сжимающие усилия передаются от одной нити к другой только при непосредственном контакте между нитями разных семейств в узлах переплетения. При этом вначале сечение нити, состоящее из 1000 и более элементарных нитей, доуплотняется даже при незначительной по величине силе. В результате происходит сдвиг между семействами нитей. Дальнейшее увеличение усилий сжатия сопровождается упругими деформациями.

Задачей настоящего исследования является установление функциональной зависимости для

определения величины деформации при поперечном сжатии препрегов, а также определение характеристик препрега, которые используются в расчетных формулах.

Для моделирования процессов, происходящих при сжатии препрегов, проводились испытания плоских образцов, изготовленных из тканого материала. Приспособление для испытаний представляет собой четырехзвенник в виде квадрата [3, 4] (рисунок 1). Образец ткани в общем случае в виде ромба и, в частности, в виде квадрата со сторонами, параллельными семействам нитей, защемляется по двум противоположным сторонам четырехзвенника. Две другие стороны образца остаются свободными. Растягивающая нагрузка прикладывается к противоположным углам четырехзвенника. При испытаниях образец удлиняется в направлении действия силы и укорачивается в перпендикулярном направлении, оставаясь все время ромбом. В результате уменьшается расстояние между параллельными сторонами четырехзвенника. Такое обстоятельство приводит к поперечному сжатию нитей основы и утка.

Если в приспособлении защемлены нити основы, то при их сжатии само сжатие осуществляется следующим образом. Происходит параллельный сдвиг нитей, уменьшая расстояние между ними. Изменяются геометрические параметры сечения нитей за счет доуплотнения, пока не обеспечивается ее целостность до установления размеров, не зависящих от величины приложенной внешней нагрузки. Эти изменения происходят при небольшой по величине нагрузке. Дальнейшее сжатие характеризуется только упругими деформациями. Таким образом, процесс сжатия можно разбить на два этапа: неупругое сжатие и упругое сжатие. Такое представление о сжатии имеет важное практическое значение. Дело в том, что если при переработке препрегов достигнуты условия, при которых имеют место упругие сжатия, то это может привести к потере устойчивости армирующего материала. В результате произойдут значительные геометрические изменения, которые могут привести к

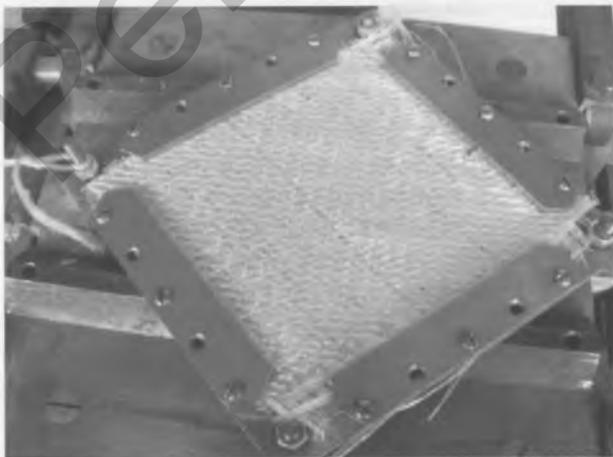


Рисунок 1 — Приспособление для испытаний

складкам, заломам и расслоениям в материале готового изделия, что недопустимо. На этом основании переработка препрегов должна осуществляться в пределах неупругих деформаций. Отсюда вытекает необходимость знания максимального значения неупругих деформаций для каждого семейства нитей у препрегов.

У второго семейства концы нитей не закреплены, поэтому при деформации они могут свободно перемещаться. При сжатии такое свободное перемещение позволяет увеличить долю неупругого сжатия, так как в этом случае появляется возможность неупруго изменить сечение нити, уменьшая ширину сечения за счет увеличения ее толщины.

Проведенные исследования позволяют сделать следующий вывод. При испытаниях образцов ткани с использованием приспособления в виде четырехзвенника упругая стадия сжатия первоначально наступает у семейства нитей, концы которых защемлены. Второе семейство нитей в это время испытывает только неупругие деформации сжатия и поэтому практически деформационное поведение образца ткани может быть описано деформациями сжатия первого семейства. При этом первое семейство берет на себя значительную часть внешней нагрузки, расходуя ее на упругое сжатие.

Пусть вырезан квадратный образец со стороной  $l$ , у которого стороны параллельны соответствующим семействам нитей. При испытаниях фиксируется усилие  $P$ , приложенное к рамке четырехзвенника и перемещение  $\Delta W$ , которое равносильно изменению длины диагонали образца.

Представление сжатия тканых материалов, состоящего из двух фаз неупругой и упругой, позволяет предположить линейную зависимость перемещения  $\Delta W$  от нагрузки  $P$  [5]. Таким образом

$$\Delta W = \gamma + \gamma_1 P, \quad (1)$$

где  $\gamma$  и  $\gamma_1$  — некоторые постоянные, причем величина  $\gamma$  представляет собой неупругую составляющую перемещения. Найдем их методом наименьших квадратов с использованием результатов проведенных испытаний.

Формула (1) может быть представлена в таком виде

$$\gamma + \gamma_1 P - \Delta W = 0. \quad (2)$$

Точки  $(P, \Delta W)$  представляют собой результаты проведенных испытаний и поэтому они приближенно лежат на прямой, следовательно формулы (1) и (2) приближенные. Подставляя в формулу (2) вместо  $P$  и  $\Delta W$  их значения  $P_i$  и  $\Delta W_{ij}$ , взятые из таблицы результатов испытаний, получим равенства

$$\gamma + \gamma_1 P_i - \Delta W_{ij} = \epsilon_j \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n),$$

где  $m$  — количество используемых образцов экспериментов;  $n$  — количество нагружений образца;  $\epsilon_j$  — некоторые числа не равные нулю, которые имеют смысл погрешностей.

Требуется подобрать коэффициенты  $\gamma$  и  $\gamma_1$  таким образом, чтобы эти погрешности были по воз-

возможности малыми по абсолютной величине. Для этого необходимо отыскать минимальное значение функционала

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\gamma + \gamma_1 P_i - \Delta W_{ij})^2.$$

Итак, функцию  $U$  можно рассматривать как функцию от двух переменных  $\gamma$  и  $\gamma_1$ . Подберем эти переменные так, чтобы функция  $U$  получила возможно меньшее значение. Для этого необходимо, чтобы соблюдались следующие условия

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} = 0.$$

Отсюда, удовлетворяя предыдущие зависимости, получим линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными  $\gamma$  и  $\gamma_1$

$$\begin{aligned} m \times n \times \gamma + \left( n \times \sum_{i=1}^m P_i \right) \gamma_1 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta W_{ij}; \\ \left( n \times \sum_{i=1}^m P_i \right) \gamma + \left( n \times \sum_{i=1}^m P_i^2 \right) \gamma_1 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_i \Delta W_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Это окончательный вид так называемой «нормальной системы способа наименьших квадратов». Из этой системы находим  $\gamma$  и  $\gamma_1$ , а затем подставляем их в эмпирическую формулу (1).

Результаты испытаний для ткани Т-13 представлены в таблице. Здесь первая строка данных относится к случаю, когда в приспособлении защемлены нити основы, вторая строка данных — защемлены нити утка, третья строка — все концы нитей защемлены.

Используя данные таблицы из системы (3), найдены величины  $\gamma$  и  $\gamma_1$ .

В случае защемления нитей основы  
 $\gamma = 63,8$  мм;  $\gamma_1 = 0,096$  мм/Н.

В случае защемления нитей утка  
 $\gamma = 71,6$  мм;  $\gamma_1 = 0,098$  мм/Н.

В случае защемления нитей основы и утка  
 $\gamma = 62,4$  мм;  $\gamma_1 = 0,110$  мм/Н.

Анализ данных таблицы показывает, что результаты испытаний в первом и третьем случаях практически одинаковы в диапазоне нагружения, обеспечивающего неупругое сжатие. Это означает, что в третьем случае при испытаниях, когда нити основы достигли фазы упругого сжатия, то нити утка еще не достигли ее. Такое положение доказывает правильность сделанных выше выводов о сжатии, что позволяет найти характеристики сжатия каждого семейства нитей у ткани.

Определим относительное сжатие соответствующего семейства нитей. Для этого воспользуемся схемой деформирования рамы, изображенной на рисунке 2. Здесь  $AD = AB = C'D' = B'C' = a$ . Искомое относительное сжатие  $\varepsilon$  равно

$$\varepsilon = \frac{AD - ED'}{AD}.$$

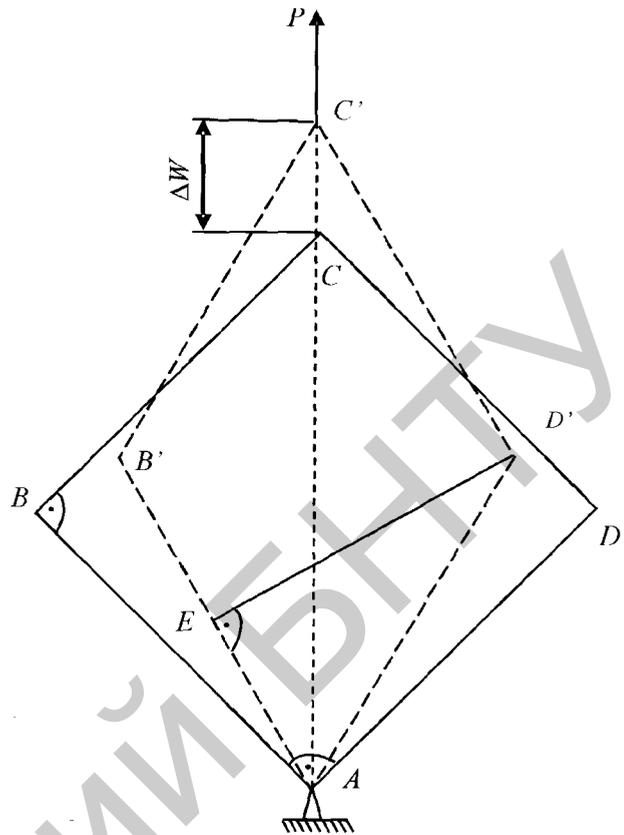


Рисунок 2 — Схема деформирования рамы

Запишем теорему косинусов для треугольника  $AD'C'$

$$(AC')^2 = (C'D')^2 + (AD')^2 - 2C'D' \times AD' \times \cos \angle AD'C'.$$

Если обозначим  $\angle B'AD'$  через  $\beta$ , то получим

$$(\sqrt{2}a + \Delta W)^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cos \beta.$$

С учетом того, что  $EA = a \cos \beta$ , найдем

$$EA = \frac{(\sqrt{2}a + \Delta W)^2 - 2a^2}{2a} = \sqrt{2}W + \frac{\Delta W^2}{2a}. \quad (4)$$

Считаем слагаемое

$$\frac{\gamma_1 P^2}{2a},$$

полученное в равенстве (4) с учетом (1), малым по сравнению с оставшейся суммой. В таком случае выражение для  $EA$  приобретает вид

$$EA \approx a(\gamma_{11} + \gamma_{12} P), \quad (5)$$

где

$$\gamma_{11} = \frac{\gamma}{a} \left( \sqrt{2} + \frac{\gamma}{2a} \right), \quad \gamma_{12} = \frac{\gamma_1}{a} \left( \sqrt{2} + \frac{\gamma}{a} \right).$$

Отметим, что выражение (5) для  $EA$  представляет собой два первых слагаемых в разложении ее функциональной зависимости по степени  $P$ . Поступая аналогичным образом при вычислении  $ED'$ , найдем

Таблица — Результаты испытаний образцов ткани Т-13 на сжатие

	$P, \text{ Н}$												
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	100	150	250
$W_{ij},$ мм	23	50	63	65	71	74	74	75	75	75	80	81	83
	34	58	73	77	82	83	87	88	89	90	94	95	97
	25	54	60	64	67	70	71	73	74	74	81	83	86
	26	55	68	76	79	80	82	84	85	85	90	91	92
	29	65	74	83	84	88	90	90	93	93	96	96	97
	31	61	63	68	70	73	74	75	76	77	82	85	87
	28	56	70	73	76	79	81	81	81	82	87	89	90
	31	66	78	82	86	88	90	90	91	91	96	97	98
	30	55	60	62	66	67	69	72	76	77	84	89	92
	27	55	62	72	75	76	78	79	80	80	85	88	90
	30	73	76	79	84	85	90	90	91	91	95	95	98
	29	60	66	70	73	74	77	77	78	79	85	88	90
	26	50	61	65	66	68	71	72	73	73	79	82	84
	30	63	77	82	85	87	88	89	90	91	95	97	98
	30	54	64	67	73	75	78	78	81	81	90	94	97
26	58	65	73	86	88	89	89	90	90	94	95	96	
29	64	70	70	84	86	86	88	89	92	94	96	96	
26	50	64	70	73	75	76	78	78	79	80	81	85	
27	59	71	76	79	81	82	83	84	85	89	90	91	
28	66	69	75	83	84	86	87	88	90	92	97	98	
28	54	63	65	69	70	73	74	76	79	82	86	87	
24	54	66	68	70	72	73	76	77	80	82	86	87	
28	55	65	69	71	72	74	75	77	78	85	88	94	
29	58	59	59	60	61	65	70	75	80	83	86	88	
28	52	58	59	60	60	61	61	62	63	71	75	80	
30	58	70	76	80	81	84	85	86	87	92	94	95	
31	65	68	70	72	74	76	77	78	79	84	92	95	
25	52	64	70	78	80	81	83	83	84	85	85	86	
30	61	77	79	81	80	84	85	86	88	90	92	94	
29	55	65	71	73	76	78	80	80	81	86	91	92	

$$ED' = \sqrt{(AD')^2 - AE^2} \approx \sqrt{1 - \gamma_{11}^2 - 2\gamma_{11}\gamma_{12}P} \approx a\sqrt{1 - \gamma_{11}^2} \cdot \left(1 - \frac{\gamma_{11}\gamma_{12}}{1 - \gamma_{11}^2}P\right). \quad (6)$$

Нагрузка  $P = 250 \text{ Н}$  является предельной. Это значение при проведении испытаний было выбрано с целью проверки точности полученных формул на всем возможном диапазоне изменения  $P$ . Очевидно, что зависимость (6) является точной при  $P = 0$ . Наибольшая погрешность наблюдается при максимальном значении  $P$ . Для ткани Т-13, участвующей в испытаниях, при  $a = 180 \text{ мм}$  точное значение  $ED' = 101,5 \text{ мм}$ , а приближенное, подсчитанное по формуле (6), равно  $80,5 \text{ мм}$ . Погрешность вычисления в этом случае составила около 20 %.

С учетом того, что переработка препрегов осуществляется при малых значениях нагрузки  $P$ , рас-

четы по формуле (6) являются приемлемыми. Во многих случаях достаточно знать только величину неупругого перемещения, которое в случае малости  $P$  практически равно искомому. С учетом найденной зависимости (6) для  $ED'$  относительное сжатие  $\varepsilon$  семейства нитей равно

$$\varepsilon \approx \left(1 - \sqrt{1 - \gamma_{11}^2}\right) + \frac{\gamma_{11}\gamma_{12}}{1 - \gamma_{11}^2}P. \quad (7)$$

Здесь первое слагаемое в равенстве для  $\varepsilon$  отвечает за неупругую относительную часть сжатия семейства нитей, а второе — за упругую. В таком случае второе слагаемое в равенстве (7) можно представить в виде:

$$\frac{\gamma_{11}\gamma_{12}}{1 - \gamma_{11}^2}P = \frac{\sigma_{сж}}{E_{сж}}, \quad (8)$$

где  $\sigma_{сж}$  — напряжение поперечного сжатия семейств нитей;  $E_{сж}$  — модуль упругости при сжатии.

Для нахождения  $\sigma_{сж}$  поступим следующим образом. Внешняя нагрузка  $P$  уравнивается напряжениями  $\sigma_p$ , которые испытывает образец ткани (условно удаляется образец ткани из приспособления для испытаний и заменяется его действие на четырехзвенник усилиями  $\sigma_p$ ). Таким образом, работа силы  $P$  равна работе сил сопротивления  $\sigma_p$ . При этом необходимо учесть, что работа на неупругих перемещениях равна нулю. Второе уравнение для определения  $\sigma_{сж}$  найдем из условия равенства потенциальной энергии деформации образца ткани работе внешних сил. С учетом того, что упругие деформации сжатия  $\sigma_{сж}$  и растяжения  $\sigma_p$  испытывает только семейство нитей, закрепленное по концам в приспособлении для испытаний, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma_1 P^2 &= \frac{1}{2}\sigma_{11} h a \cdot \Delta W_1, \\ \frac{1}{2}\gamma_1 P^2 &= \frac{1}{2}\sigma_{11} h a \cdot \Delta W_2 + \frac{1}{2}\sigma_{сж} h a \cdot \Delta W_1, \\ \Delta W_1 &= \frac{\gamma_{11}\gamma_{12}}{1-\gamma_{11}^2} P a, \quad \Delta W_2 = \frac{\sigma_p}{E_T} a, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Delta W_1$  — величина упругого сжатия нитей;  $\Delta W_2$  — величина упругого растяжения нитей;  $E_T$  — модуль упругости при растяжении ткани;  $h$  — толщина ткани.

Из системы (9) определим

$$\sigma_{сж} = P \frac{\sqrt{1-\gamma_{11}^2}}{h a^2 \gamma_{11} \gamma_{12}} \left( \gamma_1 - \frac{\gamma_1^2 (1-\gamma_{11}^2)}{h a^2 \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^2 E_T} \right). \quad (10)$$

Модуль упругости  $E_{сж}$  найдем из (8)

$$E_{сж} = \frac{(1-\gamma_{11}^2)^{3/2}}{h a^2 \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^2} \left( \gamma_1 - \frac{\gamma_1^2 (1-\gamma_{11}^2)}{h a^2 \gamma_{11}^2 \gamma_{12}^2 E_T} \right). \quad (11)$$

Для ткани Т-13 толщина составляет  $h = 0,26$  мм. Модуль упругости при растяжении ткани в направлении основы равен  $3 \cdot 10^4$  Н/мм<sup>2</sup>, а в направлении утка —  $2,5 \cdot 10^4$  Н/мм<sup>2</sup>. Расчет, проведенный по формулам (11), с учетом этих данных и результатов испытаний, установил, что  $E_{сж} = 17,6$  Н/мм<sup>2</sup> и

$E_{сж} = 15,2$  Н/мм<sup>2</sup> для семейств нитей основы и утка соответственно. Относительное сжатие семейств нитей при этом составило:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 0,17 \text{ — для нитей основы;} \\ \varepsilon_0 &= 0,23 \text{ — для нитей утка.} \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что понятие упругого сжатия для препрегов несколько отличается от понятия упругого сжатия твердого тела. Как в первом, так и во втором случаях, деформации тел являются достаточно малыми, а феноменологические соотношения, связывающие деформированное и напряженное состояния, линейны. Однако, если во втором случае тело полностью восстанавливает свою первоначальную форму после снятия нагрузки, то, как показали экспериментальные исследования, в первом случае первоначальная форма не восстанавливается полностью. Такова особенность деформирования препрегов.

**Вывод.** При испытаниях образцов ткани с использованием приспособления в виде четырехзвенника упругая стадия сжатия первоначально наступает у семейства нитей, концы которых зашпелены. Такое обстоятельство позволило создать методику для нахождения характеристик препрега при сжатии. Они представляют собой неупругую составляющую сжатия и модуль упругости при сжатии. В качестве примера для стеклоткани Т-13 были проведены испытания согласно разработанной методике, и найдены значения данных характеристик. Показанную методику можно применять при нахождении характеристик препрегов при сжатии для последующего использования в численных расчетах в рамках рассматриваемой математической модели препрегов.

#### Список литературы

1. Тканые конструкционные композиты / Ф. Скардино [и др.]; пер. с англ.; под ред. Т. В. Чу и Ф. Ко. — М.: Мир, 1991. — 432 с.
2. Хилиджинов, К. В. Мультиаксиальные ткани «Армент» компании «Стеклолит» / К. В. Хилиджинов // Композитный мир. — 2008 (18). — № 5. — С. 10–13.
3. Liu, C.J. Residual stresses in filament wound laminates and optimum programmed winding tension / C.J. Liu, C.C. Chamis // Proc. SPIE, 20 — the Annual Conference, sect. 5-D. — 1965.
4. Качурин, В. К. Гибкие нити с малыми стрелками / В. К. Качурин. — Москва: ГИТТЛ, 1956. — 137 с.
5. Теоретические и экспериментальные исследования по определению неупругой составляющей сжатия ткани Т-13 / Ю. В. Василевич [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов. — 2011. — № 4 (17). — С. 63–65.

Vasilevich Y.V., Sakhonenko V.M., Sakhonenko S.V., Gorely K.A., Malyutin E.V.  
**The prepreg's characteristics under compression determination**

The deformation model of the prepregs made of plain and multi-axial textiles is presented. The function dependences for the strain determination during transversal compression of each thread family are found. The characteristics in form of inelastic constant of the compression and modulus of elasticity during compression are determined. The methods of these characteristics acquisition are developed. The correspondent experiments conducted for Т-13 textile and the mentioned characteristics were found.

Поступила в редакцию 17.04.2012.