ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Пронкевич С.А., Орловская А.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Plane deformation of a plate under contour distributed load is examined in many applied problems of the theory of elasticity. In the present paper uniformly distributed contour loads are considered. The results received by the instrumentality of formulas are compared with finite-element calculation conducted in ANSYS.

Плоские задачи теории упругости занимают важное место в механике деформируемого твердого тела. Многие весьма важные технические задачи с большей или меньшей точностью могут быть приведены к случаю плоской деформации. Всякий раз, когда мы имеем дело с длинным цилиндрическим или призматическим телом, подвергающимся действию сил, не меняющихся в направлении длины тела и нормальных к этому направлению, можно считать, что в местах, удаленных от концов цилиндра, все элементы, на которые мы можем подразделить тело системой поперечных сечений, перпендикулярных к длине цилиндра, испытывают одну и ту же деформацию. Перемещение какой либо точки определяется ее координатами в плоскости соответствующего поперечного сечения и не зависит от положения этого сечения по длине цилиндра. [1]

Как известно […] определение напряжений в случае плоской задачи сводится к нахождению решений уравнения

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0$$

удовлетворяющих заданным условиям на поверхности.

Решение подобной задачи довольно затруднительно и громоздко, поэтому при их решении целесообразно использовать современные системы компьютерной математики, например *Mathematica*, либо программное обеспечение, основанное на использовании метода конечных элементов, в данном случае *ANSYS.*

Если контур пластинки представляет собой прямоугольник и нагрузки, прикладываемые к сторонам прямоугольника, являются функциями координат, то решение уравнения (1) может быть представлено в виде целых полиномов.

Рассмотрим решение изгиба пластины изображенной на рисунке 1.

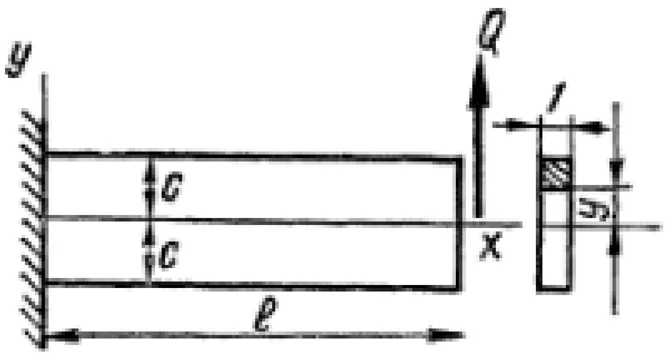

Рис. 1.

Если для определения функции напряжения взять полином четвертой степени

$$\varphi = \frac{a_2}{12}x^4 + \frac{b_2}{6}x^3 y + \frac{c_2}{2}x^2 y^2 + \frac{d_2}{6}xy^3 + \frac{c_2}{12}y^4$$

то составляющие напряжения в данном случае будут:

$$X_x = d_2 xy; \quad Y_y = 0; \quad X_y = -\frac{d_2}{2} y^2$$

Предположим, что изгиб балки производится касательной силой Q. Тогда распределение напряжений с учетом граничных условий примет вид [1]:

$$X_x = -\frac{Q(l-x)y}{J}; \; Y_y = 0; \quad X_x = \frac{Q(c^2 - y^2)}{2J}$$

где $J = \frac{2c^3}{3}$ - момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной линии.

Для перемещений *u* и *v* получаем следующие формулы:

$$u = -\frac{Q}{EJ} y\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{\sigma Q}{6EJ} y^3 - \frac{Q}{6\mu J} y^3 + \left(\frac{Qc^2}{2\mu J} - \frac{3}{2}\frac{Q}{2\mu c}\right) y$$

$$v = \frac{\sigma Q}{2EJ} y^2 (l - x) + \frac{Q}{EJ}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{3}{2}\frac{Q}{2\mu c}$$

Рассмотрим численное решение данной задачи проведенной в системе *Mathematica*.

Примем следующие геометрические размеры пластины и характеристику материала, из которой она сделана:

c =0,1 м; l = 1 м; E = 2·10^{11}*; σ = 0,23; μ = 6·10*^{10}*; Q=10000 Н*

Ниже приведены расчеты, выполненные в системе *Mathematica* для точки A(0.75; 0.033)

$$\mathbf{Q = 10000;\ EU = 2*10^{11};\ \sigma = 0.23;\ \mu = 6*10^{10};\ l = 1;\ c = 0.1;\ J = \frac{2*c^3}{3};}$$

$$\mathbf{X_x[x\_,\ y\_] := -\frac{Q*(l-x)*y}{J};\ X_Y[x\_,\ y\_] := \frac{Q}{J}\ \frac{(c^2-y^2)}{2};}$$

$$\mathbf{du[x\_,\ y\_] := -\frac{Q}{EU*J}*y*\left(l*x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{\sigma*Q}{6*EU*J}*y^3-\frac{Q}{6*\mu*J}*y^3+\left(\frac{Q*c^2}{2*\mu*J}-\frac{3}{2}\ \frac{Q}{2*\mu*c}\right)*y}$$

$$\mathbf{dv[x\_,\ y\_] := \frac{\sigma*Q}{2*EU*J}*y^2*(l-x)+\frac{Q}{EU*J}\left(\frac{l*x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{3}{2}\ \frac{Q}{2*\mu*c}*x}$$

```
x := 0.75; y := 0.033;

Print["Xx=", Xx[x, y], " Па"]
Print["XY=", XY[x, y], " Па"]
Print["u = ", du[x, y], " м"]
Print["v = ", dv[x, y], " м"]
```

X_x=-123750. Па

X_y=66832.5 Па

u = -1.16155×10^{-6} м

v = 0.0000167602 м

Напряжения и перемещения в точке А равны:

$$X_x = -123750 \text{ Па}; X_y = 66832.5 \text{ Па}; \; u = -1.16155\cdot10^{-6}\text{ м}; v = 1.67602\cdot10^{-5}\text{ м}$$

Рассмотрим решение этой же задачи с использованием конечно-элементного пакета ANSYS.

Модель пластины состоит из 12 плоских конечных элементов Plane42 и 20 узлов (Рис 1).

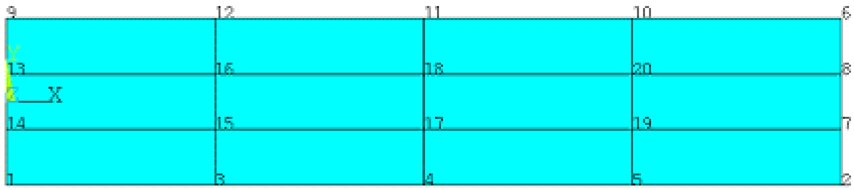

Рис 1. Конечно-элементная модель пластины, выполненная в ANSYS

Узлы 1, 9,13 и 14, как и требуется по условию задачи, закреплены по всем степеням свободы. К узлам 2, 6, 7 и 8 прикладывается нагрузка. Материал пластины – изотропный.

Ниже можно видеть деформированное состояние пластины в результате расчета. На рис 2. также отображается недеформированное состояние конечно-элементной модели.

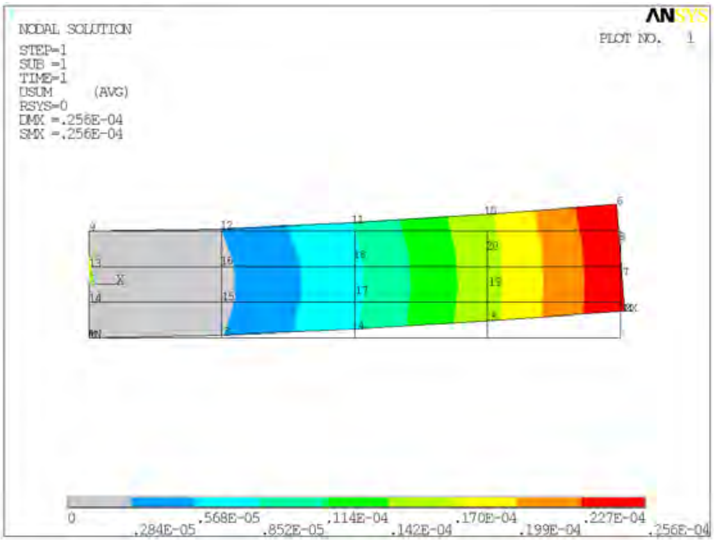

Рис 2. Деформированное состояние пластины

Напряжения и перемещения, полученные с пакете ANSYS, в точке А равны:

$X_x = -123630$ Па; $X_y = 55338$ Па; $u = -1.1495 \cdot 10^{-6}$ м; $v = 1.6029 \cdot 10^{-5}$ м

Результаты можно считать приемлемыми. При использовании данной простой задачи выигрыш от использования конечных элементов на первый взгляд кажется не существенным, однако он становится очевидным уже при незначительном усложнении модели.

Литература

1. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. — Киев: Наукова думка, 1972. — 508 с.
2. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. — М.: Высшая школа, 1977. — 216 с.
3. Дьяконов В. Mathematica 4. Учебный курс. — Санкт-Петербург: Питер, 2001. — 656 с.