

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТИМПАНАЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ В СЛУЧАЕ ЕЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ПО ТЕХНОЛОГИИ “LARGE ISLAND”

Ермоченко С.А.

The goal of this study is to clear up the influence of the “island” geometrical size at the strain-stress state of the rehabilitated tympanic membrane. The presence of the tympanic membrane remnants has been taken into account under simulation, the reconstructed tympanic membrane has being modeled as two elastic annular plates attended by common outline. As a method for solving equations of anisotropic plates, the analytic method has been chosen.

Введение

Задача расчета напряженно-деформированного состояния реконструированной тимпанальной мембраны является частью более общей задачи исследования статических и динамических свойств восстановленного среднего уха [1]. В оториноларингологии известны несколько техник реконструкции среднего уха, применяемых в зависимости от вида и степени патологии [2].

При повреждении тимпанальной мембраны используются в основном следующие способы реконструкции [3]:

1. полная замена поврежденной тимпанальной мембраны на имплантат, выполненный из хрящевой ткани;

2. наложение на поврежденную тимпанальную мембрану хрящевого имплантата. При этом в зависимости от степени повреждения различают технологии “small island” (для небольших повреждений тимпанальной мембраны, чаще – незначительных проколах) и “large island” (для довольно больших повреждений).

Случай полной замены тимпанальной мембраны имплантатом, а также реконструкция по технологии “small island” рассмотрена ранее в работах [4, 5]. Рассмотрим случай реконструкции с использованием технологии “large island” (см. рис. 1).

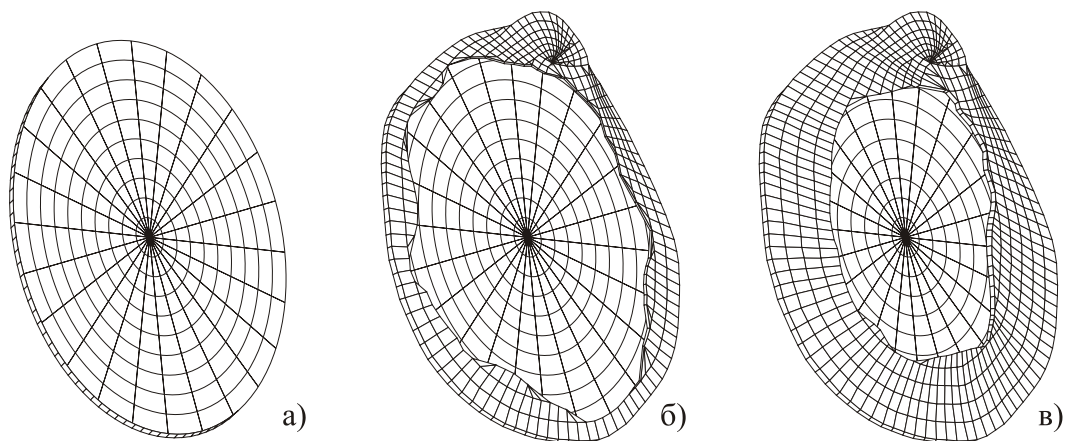


Рис. 1. Различные техники реконструкции барабанной перепонки:

а) полная замена тимпанальной мембраны хрящевым имплантатом; б) “large island”;
в) “small island”

На реконструированную тимпанальную мембрану устанавливается круглое основание протеза, которое прогибает пластину. Таким образом, пластина находится в напряженно-деформированном состоянии. В случае полной замены тимпанальной мембраны (рис. 1(а)) пластина может моделироваться как обычная однослойная изотропная пластина. В случае реконструкции по технологии “small

“island” основание протеза закрывает поврежденную часть тимпанальной мембраны. Тогда пластина может рассматриваться как изотропная двухслойная пластина. В случае реконструкции по технологии “large island” реконструированную тимпанальную мембрану можно рассматривать как две кольцевые изотропные пластины, сопряженные по общему контуру (см. рис. 2).

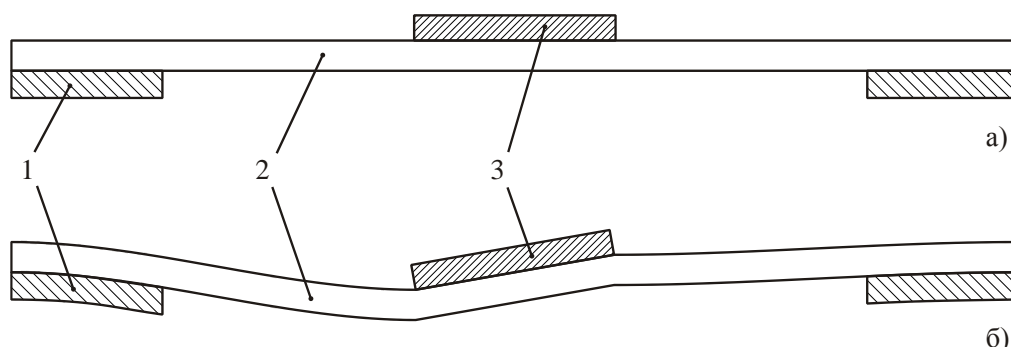


Рис. 2. Положение основание протеза на реконструированной тимпанальной мембране (осевой разрез): а) до деформации; б) после деформации. Здесь: 1 – остатки тимпанальной мембраны; 2 – хрящевой имплантат; 3 – основание протеза.

Будем моделировать реконструированную тимпанальную мембрану как пластину, состоящую из двух частей: внутренней, соответствующей хрящевому имплантату; и внешней, соответствующей остаткам тимпанальной мембраны с наложенным на них хрящевым имплантатом.

Математическая модель тимпанальной мембраны

Тимпанальная мембрана имеет форму, близкую к круговой. В рассматриваемой модели будем считать, что внешний край представляет собой круг радиуса a . Контур сопряжения также имеет неправильную форму, зависящую от степени и характера повреждений тимпанальной мембраны. Для определенности будем рассматривать его как круговой с радиусом c . Основание протеза имеет круглую форму с радиусом b . При введении протеза в область среднего уха используется несколько точек установки основания протеза на тимпанальную мембрану. Одним из способов установки является совмещение центров основания протеза и тимпанальной мембраны. Будем также считать, что центр тимпанальной мембраны совпадает с центром контура сопряжения.

Таким образом, имеем три концентрических круговых контура с радиусами $a > c > b$. Введем цилиндрическую систему координат $O r \varphi z$, помещенную в центр восстановленной тимпанальной мембраны, ось Oz – перпендикулярна плоскости пластины и направлена в сторону внешнего слухового прохода. Деформация реконструированной тимпанальной мембраны происходит за счет перемещения центра основания протеза вдоль оси Oz на величину w_p , а также за счет поворота основания протеза вокруг некоторой оси $O'O''$ на угол θ_p (см. рис. 3). Ось $O'O''$ проходит через центр основания протеза и лежит в плоскости тимпанальной мембраны. Ориентируем ось $O r$ введенной системы координат таким образом, чтобы ось поворота $O'O''$ характеризовалась в этой системе координат уравнением

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

В системе координат $O r \varphi z$ введем функции прогиба: $w_i(r, \varphi)$ – для внутренней части; $w_e(r, \varphi)$ – для внешней части реконструированной тимпанальной мембраны.

Внутренняя пластина сопряжена с круглым основанием протеза по контуру:

$$r = b. \quad (1)$$

Внешняя пластина сопряжена с тканями среднего уха по контуру:

$$r = a. \quad (2)$$

Сопряжение внутренней и внешней пластин происходит по контуру:

$$r = c. \quad (3)$$

Внешняя часть реконструированной пластины является двухслойной пластиной. Однако в данной работе будем рассматривать ее как однослойную пластину с приведенными модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Тогда функции прогиба удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} D_i \Delta^2 w_i + P_s &= 0, \\ D_e \Delta^2 w_e + P_s &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}, \quad D_e = \frac{E_e h_e^3}{12(1-\nu_e^2)}, \quad h_i = h_c, \quad h_e = h_c + h_{tm}, \\ \nu_i &= \nu_c, \quad \nu_e = \frac{\frac{E_c h_c \nu_c}{1-\nu_c^2} + \frac{E_{tm} h_{tm} \nu_{tm}}{1-\nu_{tm}^2}}{\frac{E_c h_c}{1-\nu_c^2} + \frac{E_{tm} h_{tm}}{1-\nu_{tm}^2}}, \quad E_i = E_c, \quad E_e = \frac{1-\nu_e}{h_e} \left(\frac{E_c h_c}{1-\nu_c^2} + \frac{E_{tm} h_{tm}}{1-\nu_{tm}^2} \right), \end{aligned}$$

h_c, ν_c, E_c – толщина, коэффициент Пуассона и модуль Юнга для хрящевого имплантата.

h_{tm}, ν_{tm}, E_{tm} – толщина, коэффициент Пуассона и модуль Юнга для остатков тимпанальной мембраны.

Запишем граничные условия для уравнений прогиба (4). На контуре (1) примем условия жесткой заделки:

$$w_i|_{r=b} = w_p + b \sin \theta_p \cos \varphi, \quad \left. \frac{\partial w_i}{\partial r} \right|_{r=b} = \sin \theta_p \cos \varphi, \quad (5)$$

где w_p – перемещение центра основания протеза вдоль оси Oz , а θ_p – угол поворота основания протеза вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

На контуре (2) примем условия упругой заделки:

$$(k_l w_e + Q_e)|_{r=a} = 0, \quad \left(k_t \frac{\partial w_e}{\partial r} + M_e \right)|_{r=a} = 0, \quad (6)$$

где:

$$Q_e = -D_e \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_e}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{D_e (1-\nu_e)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 w_e}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_e}{\partial \varphi} \right) - \text{главный вектор}$$

перерезывающих сил, возникающих со стороны пластины,

$$M_e = -D_e \left(\frac{\partial^2 w_e}{\partial r^2} + \frac{\nu_e}{r} \frac{\partial w_e}{\partial r} + \frac{\nu_e}{r^2} \frac{\partial^2 w_e}{\partial \varphi^2} \right) - \text{главный изгибающий момент относительно}$$

касательной к контуру. Коэффициенты k_l, k_t характеризуют степень упругости внешнего контура [6].

На контуре (3) примем условия жесткой заделки:

$$\begin{aligned} w_i|_{r=c} &= w_e|_{r=c}, \quad \left. \frac{\partial w_i}{\partial r} \right|_{r=c} = \left. \frac{\partial w_e}{\partial r} \right|_{r=c}, \\ Q_i|_{r=c} &= Q_e|_{r=c}, \quad M_i|_{r=c} = M_e|_{r=c}, \end{aligned} \quad (7)$$

где Q_i, M_i – перерезывающая сила и изгибающий момент для внутренней пластины (аналогично Q_e и M_e для внешней пластины).

Будем искать решение уравнений (4) в виде:

$$\begin{aligned} w_i(r, \varphi) &= w_i^0(r) + w_i^1(r) \cos \varphi, \\ w_e(r, \varphi) &= w_e^0(r) + w_e^1(r) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Для функций w_i^0, w_e^0 получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_i^0}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_i^0}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_i^0}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw_i^0}{dr} &= 0, \\ \frac{d^4 w_e^0}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_e^0}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_e^0}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw_e^0}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

С граничными условиями:

$$\begin{aligned} w_i^0|_{r=b} &= w_p, \quad \left. \frac{dw_i^0}{dr} \right|_{r=b} = 0, \quad w_i^0|_{r=c} = w_e^0|_{r=c}, \quad \left. \frac{dw_i^0}{dr} \right|_{r=c} = \left. \frac{dw_e^0}{dr} \right|_{r=c}, \\ \frac{D_i}{D_e} \left(\frac{d^3 w_i^0}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_i^0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw_i^0}{dr} \right) \Big|_{r=c} &= \left(\frac{d^3 w_e^0}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_e^0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw_e^0}{dr} \right) \Big|_{r=c}, \\ \frac{D_i}{D_e} \left(\frac{d^2 w_i^0}{dr^2} + \frac{v_i}{r} \frac{dw_i^0}{dr} \right) \Big|_{r=c} &= \left(\frac{d^2 w_e^0}{dr^2} + \frac{v_e}{r} \frac{dw_e^0}{dr} \right) \Big|_{r=c}, \\ \left(\frac{k_l}{D_e} w_e^0 - \frac{d^3 w_e^0}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w_e^0}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw_e^0}{dr} \right) \Big|_{r=a} &= 0, \quad \left(\frac{k_l}{D_e} \frac{dw_e^0}{dr} - \frac{d^2 w_e^0}{dr^2} - \frac{v_e}{r} \frac{dw_e^0}{dr} \right) \Big|_{r=c} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Общее решение уравнений (9):

$$\begin{aligned} w_i^0 &= A_{i1}^0 + A_{i2}^0 r^2 + A_{i3}^0 \ln r + A_{i4}^0 r^2 \ln r, \\ w_e^0 &= A_{e1}^0 + A_{e2}^0 r^2 + A_{e3}^0 \ln r + A_{e4}^0 r^2 \ln r. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) получим следующие частные решения:

$$\begin{aligned} w_i^0 &= w_p \left[C_1^0 + C_2^0 r^2 + C_3^0 \ln r + C_4^0 r^2 \ln r \right], \\ w_e^0 &= w_p \left[C_5^0 + C_6^0 r^2 + C_7^0 \ln r + C_8^0 r^2 \ln r \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где коэффициенты C_k^0 находятся из граничных условий (10).

Для функций w_i^1, w_e^1 получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_i^1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_i^1}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2 w_i^1}{dr^2} + \frac{3}{r^3} \frac{dw_i^1}{dr} - \frac{3}{r^4} w_i^1 &= 0, \\ \frac{d^4 w_e^1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_e^1}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2 w_e^1}{dr^2} + \frac{3}{r^3} \frac{dw_e^1}{dr} - \frac{3}{r^4} w_e^1 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

С граничными условиями:

$$\begin{aligned}
w_i^1|_{r=b} &= b \sin \theta_p, \quad \frac{dw_i^1}{dr}|_{r=b} = \sin \theta_p, \quad w_i^1|_{r=c} = w_e^1|_{r=c}, \quad \frac{dw_i^1}{dr}|_{r=c} = \frac{dw_e^1}{dr}|_{r=c}, \\
\frac{D_i}{D_e} \left(\frac{d^3 w_i^1}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_i^1}{dr^2} - \frac{3-\nu_i}{r^2} \frac{dw_i^1}{dr} + \frac{3-\nu_i}{r^3} w_i^1 \right) &= \left(\frac{d^3 w_e^1}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_e^1}{dr^2} - \frac{3-\nu_e}{r^2} \frac{dw_e^1}{dr} + \frac{3-\nu_e}{r^3} w_e^1 \right) \Big|_{r=c}, \\
\frac{D_i}{D_e} \left(\frac{d^2 w_i^1}{dr^2} + \frac{\nu_i}{r} \frac{dw_i^1}{dr} - \frac{\nu_i}{r^2} w_i^1 \right) &= \left(\frac{d^2 w_e^1}{dr^2} + \frac{\nu_e}{r} \frac{dw_e^1}{dr} - \frac{\nu_e}{r^2} w_e^1 \right) \Big|_{r=c}, \\
\left(\frac{k_l}{D_e} w_e^1 - \frac{d^3 w_e^1}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w_e^1}{dr^2} + \frac{3-\nu_e}{r^2} \frac{dw_e^1}{dr} - \frac{3-\nu_e}{r^3} w_e^1 \right) &= 0, \\
\left(\frac{k_l}{D_e} \frac{dw_e^1}{dr} - \frac{d^2 w_e^1}{dr^2} - \frac{\nu_e}{r} \frac{dw_e^1}{dr} + \frac{\nu_e}{r^2} w_e^1 \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Общее решение уравнений (13):

$$\begin{aligned}
w_i^1 &= A_{i1}^1 r + A_{i2}^1 r^3 + A_{i3}^1 \frac{1}{r} + A_{i4}^1 r \ln r, \\
w_e^1 &= A_{e1}^1 r + A_{e2}^1 r^3 + A_{e3}^1 \frac{1}{r} + A_{e4}^1 r \ln r.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14) получим следующие частные решения:

$$\begin{aligned}
w_i^1 &= \sin \theta_p \left[C_1^1 r + C_2^1 r^3 + C_3^1 \frac{1}{r} + C_4^1 r \ln r \right], \\
w_e^1 &= \sin \theta_p \left[C_5^1 r + C_6^1 r^3 + C_7^1 \frac{1}{r} + C_8^1 r \ln r \right],
\end{aligned} \tag{16}$$

где коэффициенты C_k^1 находятся из граничных условий (14).

Подставим теперь (12) и (16) в (8), получим:

$$\begin{aligned}
w_i &= w_p \left[C_1^0 + C_2^0 r^2 + C_3^0 \ln r + C_4^0 r^2 \ln r \right] + \sin \theta_p \left[C_1^1 r + C_2^1 r^3 + C_3^1 \frac{1}{r} + C_4^1 r \ln r \right] \cos \varphi, \\
w_e &= w_p \left[C_5^0 + C_6^0 r^2 + C_7^0 \ln r + C_8^0 r^2 \ln r \right] + \sin \theta_p \left[C_5^1 r + C_6^1 r^3 + C_7^1 \frac{1}{r} + C_8^1 r \ln r \right] \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{17}$$

Формула (17) описывает прогиб реконструированной тимпанальной мембраны. Рассмотрим теперь перерезывающие силы и изгибающие моменты, действующие со стороны пластины на основание протеза, которые характеризуют напряженно-деформированное состояние реконструированной тимпанальной мембраны, вызванное перемещением и поворотом основания протеза:

$$\begin{aligned}
Q_i|_{r=b} &= -D_i \left(4w_p C_4^0 \frac{1}{b} + \sin \theta_p \left[2(\nu_i + 3)C_2^1 + 2(1-\nu_i)C_3^1 \frac{1}{b^4} + (\nu_i - 3)C_4^1 \frac{1}{b^2} \right] \cos \varphi \right), \\
M_i|_{r=b} &= -D_i \left(w_p \left[2(\nu_i + 1)C_2^0 + (\nu_i - 1)C_3^0 \frac{1}{b^2} + ((\nu_i + 1)(2 \ln b + 1) + 2)C_4^0 \right] + \right. \\
&\quad \left. \sin \theta_p \left[2(\nu_i + 3)C_2^1 + 2(1-\nu_i)C_3^1 \frac{1}{b^3} + (\nu_i + 1)C_4^1 \frac{1}{b} \right] \cos \varphi \right).
\end{aligned} \tag{18}$$

Равнодействующую перерезывающих сил, действующую по всему внутреннему контуру, находим интегрированием:

$$Q_p = \int_0^{2\pi} r Q_i d\varphi \Big|_{r=b} = -8\pi D_i C_4^0 w_p. \quad (19)$$

Общий изгибающий момент, действующий относительно оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$, находим интегрированием проекции изгибающего момента на ось $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$M_p = \int_0^{2\pi} r M_i \cos \varphi d\varphi \Big|_{r=b} = -\pi D_i \left[2(v_i + 3)C_2^1 b^2 + 2(1 - v_i)C_3^1 \frac{1}{b^2} + (v_i + 1)C_4^1 \right] \sin \theta_p. \quad (20)$$

Момент перерезывающих сил относительно оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$ также находим интегрированием:

$$M_Q = \int_0^{2\pi} -r^2 Q_i \cos \varphi d\varphi \Big|_{r=b} = \pi D_i \left[2(v_i + 3)C_2^1 b^2 + 2(1 - v_i)C_3^1 \frac{1}{b^2} + (v_i - 3)C_4^1 \right] \sin \theta_p. \quad (21)$$

Суммарный момент будет равен:

$$M_p + M_Q = -4\pi D_i C_4^1 \sin \theta_p. \quad (22)$$

Таким образом, формулы (19) и (22) характеризуют напряженно-деформированное состояние реконструированной тимпанальной мембраны.

Результаты и численные расчеты

Исследуем зависимость напряженно-деформированного состояния реконструированной тимпанальной мембраны от степени повреждений тимпанальной мембраны, характеризуемой величиной c .

Все вычисления производились при помощи пакета прикладных программ MathCAD 2001i Professional при следующих числовых значениях параметров:

Физические и геометрические характеристики хрящевого имплантата: $h_c = 0,3$ мм; $\nu_c = 0,4$; $E_c = 3,4$ Н / мм².

Физические и геометрические характеристики остатков тимпанальной мембраны: $h_{tm} = 0,27$ мм; $\nu_{tm} = 0,4$; $E_{tm} = 2,8$ Н / мм², $a = 5$ мм, $k_l = 0,075$ Н / мм², $k_t = 6,5 \times 10^{-5}$ Н.

Построим найденные функции прогиба (17) для $w_p = 0,3$ мм; $\theta_p = 6^\circ$; $b = 1$ мм; $c = 3,5$ мм:

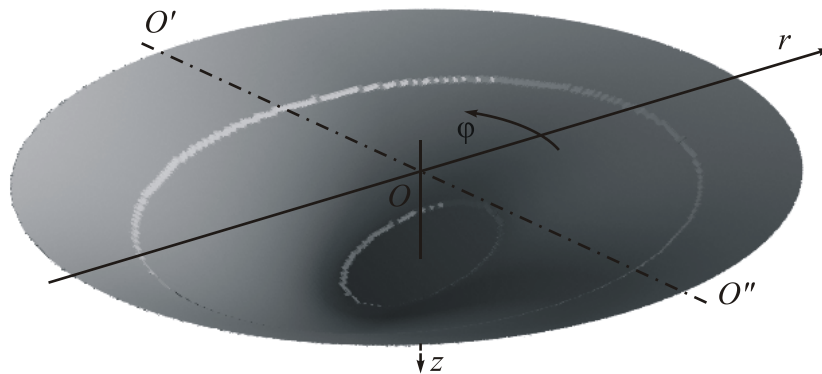


Рис. 3. Прогиб реконструированной тимпанальной мембраны

Приведем также графики зависимостей перерезывающих сил (19) и изгибающих моментов (22) от различных параметров:

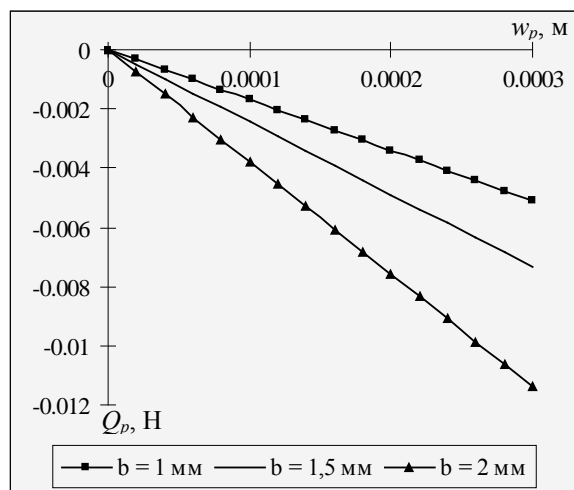
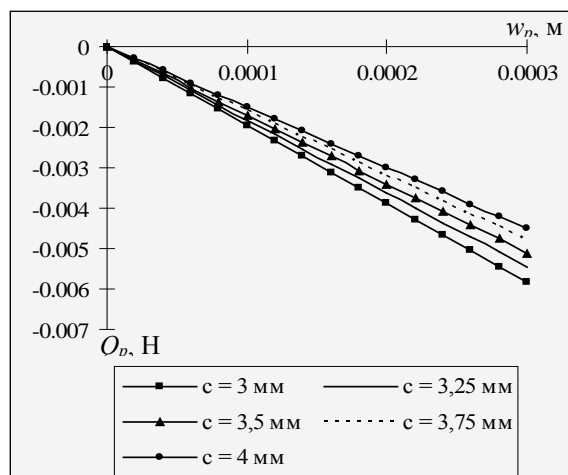
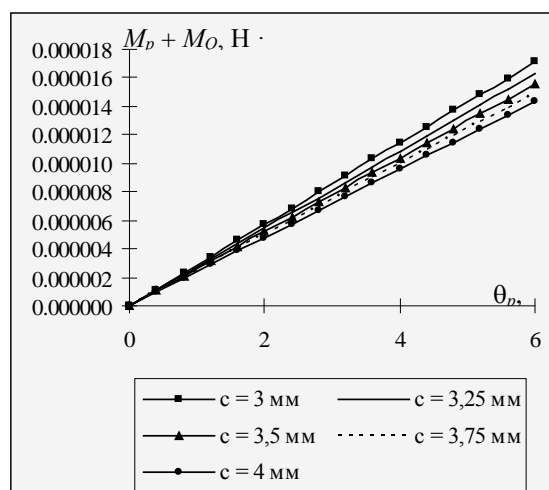


Рис. 4. Зависимость перерезывающих сил от прогиба и радиусов контуров



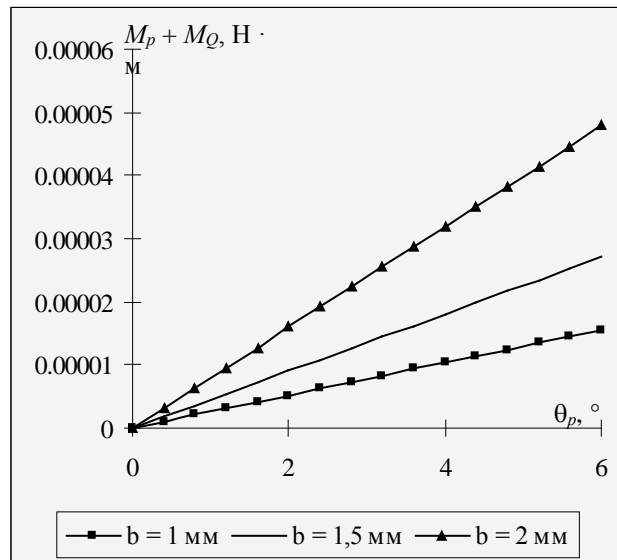


Рис. 5. Зависимость изгибающего момента от поворота и радиусов контуров

Приведенные графики показывают характер зависимости напряженно-деформированного состояния реконструированной тимпанальной мембраны от размеров основания протеза и размера остатков тимпанальной мембраны. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях характеристик реконструированного среднего уха.

Литература

1. *Hüttenbrink, K.-B.* Mechanical aspects of middle ear reconstruction // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. *Eiber, A.* On the coupling of prosthesis to the middle ear structure and its influence on sound transfer / A. Eiber, H.-G. Freitag, G. Schimanski, H. P. Zenner // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publication, 2000. – P. 297-308.
3. *Murbe, D.* Assessment of vibration characteristics of different cartilage reconstruction techniques for the tympanic membrane using scanning laser vibrometry / D. Murbe, Th. Zahnert, M. Bornitz, K.-B. Hüttenbrink // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 321-329.
4. *Mikhasev, G.* Calculation of the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Journal of Biomechanics: Abstracts of the 5th World Congress of Biomechanics, Munich, Germany, 29 July–4 August 2006. 2006, Vol. 39, Supplement 1. – P. S389.
5. *Ermochenko, S.* Finite Difference Method in Research of the Strain-Stress State of the Reconstructed Middle Ear / S. Ermochenko, G. Mikhasev // Proceedings of the Int. Conf. on Computational Biomechanics and Biology, Sept. 10–13, 2007, Plzen, Czech Republic, University of West Bohemia. – P. 101-103.
6. *Koike, T.* Analysis of the finite-element method of transfer function of reconstructed middle ear and their postoperative changes / T. Koike, H. Wada, T. Kobayashi // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 309-320.