УДК 539.3

О КОНТРОЛЕ n-ОЙ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ПРИСОЕДИНЕННЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ.

Михасев Г.И., Ботогова М.Г.

Белорусский государственный университет, Минск,
Белорусский национальный технический университет, Минск

Рассматриваются колебания балки с присоединенным к ним гасителем колебаний; при помощи метода многих масштабов строится приближенное решение системы уравнений, описывающих колебания балки и демпфера; исследовано влияние амплитуды колебаний балки в зависимости от коэффициента демпфирования.

Рассмотрим колебания балки с присоединенным динамическим гасителем колебаний. Пусть m_b – масса балки, m_v – масса гасителя колебаний, c_v – жесткость пружины гасителя колебаний, l – длина балки, b, h – размеры поперечного сечения балки, S – площадь поперечного сечения балки, ρ – плотность балки, J – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси x ($J = \dfrac{bh^3}{12}$), ξ – коэффициент демпфирования гасителя.

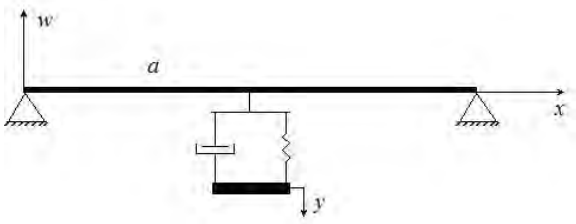

Рис. 1. Система балка-поглотитель

Запишем уравнения колебаний балки и гасителя в виде [2] :

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\frac{\rho S}{EJ}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{A}{EJ}\left[2\xi\sqrt{c_v m_v}\frac{\partial y}{\partial t}+c_v y\right]H_0(a-x)H_0(x-a)=0,\\ m_v\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\left.\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right|_{x=a}\right]+c_v y+2\xi\sqrt{c_v m_v}\frac{\partial y}{\partial t}=0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $H_0(x)$ – функция Хевисайда.

Пусть $W = lw,\quad x = ls,\quad t = t_c\hat{t},\quad y = lz$, $t_c = l^2\left(\dfrac{\rho S}{EJ}\right)^{1/2}$. Тогда систему (1) можно переписать в безразмерном виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial \hat{t}^2}-\left[c_s z+c_d\xi(t)\frac{\partial z}{\partial \hat{t}}\right]H_0(a-x)H_0(x-a)=0,\\ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial \hat{t}^2}+\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \hat{t}^2}\right|_{s=a/l=s_0}\right]+k_s z+2k_s^{1/2}\xi(t)\frac{\partial z}{\partial \hat{t}}=0.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\dfrac{Al^4 c_v}{EJ}=c_s$, $\dfrac{2Al^4\sqrt{c_v m_v}}{EJt_c}=c_d$, $k_s=\dfrac{c_v t_c^2}{m_v}=\dfrac{c_v \rho S l^4}{m_v EJ}$, $k_d=\dfrac{2c_v^{1/2} l^2 \left(\rho S\right)^{1/2}}{m_v^{1/2}\left(EJ\right)^{1/2}}=2k_s^{1/2}$.

Введем обозначения $A=\dfrac{1}{l}$, $\dfrac{m_v}{m_b}=\mu$, $\dfrac{c_v}{c_b}=c_s$, где $c_b=\dfrac{EJ}{l^3}$ - жесткость балки, $c_d=2\mu\hat{c}_s^{1/2}$, $k_s=\hat{c}_s$. С учетом введенных обозначений уравнения (2) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial \hat{t}^2}-\mu\left[\hat{c}_s z+2\hat{c}_s^{1/2}\xi(t)\frac{\partial z}{\partial \hat{t}}\right]H_0(a-x)H_0(x-a)=0,\\ \frac{\partial^2 z}{\partial \hat{t}^2}+\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \hat{t}^2}\right|_{s=a/l=s_0}+\hat{c}_s z+2\hat{c}_s^{1/2}\xi(t)\frac{\partial z}{\partial \hat{t}}=0.\end{gathered}\tag{3}$$

Будем считать, что масса гасителя является малой по сравнению с массой балки, т.е. μ – малый параметр.

Далее считаем, что $w\sim 1$, $\hat{c}_s\sim 1, z=\mu^{-1/2}u$, $u\sim 1$, $\xi=\mu^{1/2}\tilde{\xi}\left(t_c\hat{t}\right)=\mu^{1/2}\nu\left(\hat{t}\right)$. Следовательно (3) можно переписать в виде (4)

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial \hat{t}^2}-\left[\mu^{1/2}\hat{c}_s u+2\mu\hat{c}_s\nu(\hat{t})\frac{\partial u}{\partial \hat{t}}\right]Q(s)=0,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{t}^2}+\hat{c}_s u+2\mu^{1/2}\hat{c}_s^{1/2}\nu(\hat{t})\frac{\partial u}{\partial \hat{t}}+\mu^{1/2}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \hat{t}^2}\right|_{s=s_0}=0.\end{gathered}\tag{4}$$

В системе (4) $Q(s)=H_0\left[l(s_0-s)\right]H_0\left[l(s-s_0)\right]$.

Для решения системы (4) воспользуемся методом многих масштабов [1]. Решение системы будем искать в следующем виде:

$$\begin{gathered}w=w_0\left(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\mu\right)+\mu^{1/2}w_1\left(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\mu\right)+\mu w_2\left(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\mu\right)+\ldots;\\ u=u_0\left(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\mu\right)+\mu^{1/2}u_1\left(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\mu\right)+\mu u_2\left(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\mu\right)+\ldots;\end{gathered}\tag{5}$$

где $\tau_0=\hat{t}$, $\tau_1=\mu^{1/2}\hat{t}$, $\tau_2=\mu\hat{t}$, $\nu(\hat{t})=f(\tau_2)$.

Граничные условия – шарнирное опирание:

$$w_i=\frac{\partial^2 w_i}{\partial s^2}=0 \text{ при s=0, 1.}\tag{6}$$

Будем контролировать n-ую моду колебаний

$$w=\sin(\pi ns)W(\hat{t}),\ \ Q(s)=q_0\sin(\pi ns),\ \ q_0=2\sin(\pi na/l).\tag{7}$$

Пусть $\hat{c}_s=\omega_n^2+\mu^{1/2}\delta_1$, следовательно,

$$\hat{c}_s^{\,1/2}=\omega_n+\mu^{1/2}\varepsilon_n,\qquad \varepsilon_n=\frac{1}{2}\frac{\delta_1}{\omega_n}.\tag{8}$$

Подставим (5) в (4) с учетом (6) –(8) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$, получим последовательность уравнений для определения функций w_k и u_k (*k=0,1,2…*).

В нулевом приближение получим систему дифференциальных уравнений:

$$\mu^0:\ \frac{\partial^4 w_0}{\partial s^4}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau_0^2}=0,\ \ \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau_0^2}+\hat{c}_s u_0=0,\tag{9}$$

решение которой запишем в виде (10)

$$\begin{gathered}w_0=\sin\pi ns\left[A(\tau_1,\tau_2)\cos\omega\tau_0+B(\tau_1,\tau_2)\sin\omega\tau_0\right],\\ u_0=C(\tau_1,\tau_2)\cos\omega\tau_0+D(\tau_1,\tau_2)\sin\omega\tau_0.\end{gathered}\tag{10}$$

Здесь $\omega = \pi^2 n^2$. В первом приближение получим следующую систему уравнений:

$$\mu^{1/2}: \ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2{}_0} + \omega_n^2 w_1 - \Pi_1 = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2{}_0} + \omega_n^2 u_1 - \Pi_2 = 0, \text{ где}$$

$$\Pi_1 = q_0 \omega^2 u_0 - 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} = \left(q_0 \omega^2 C - 2\omega \frac{\partial B}{\partial \tau_1} \right) \cos \omega \tau_0 + \left(q_0 \omega^2 D + 2\omega \frac{\partial A}{\partial \tau_1} \right) \sin \omega \tau_0;$$

$$\Pi_2 = -2 f \omega \frac{\partial u_0}{\partial \tau_0} - \frac{1}{2} q_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau_0^2} - 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} - \delta_1 u_0 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} q_0 \omega^2 A - 2 f \omega^2 D - 2\omega \frac{\partial D}{\partial \tau_1} - C\delta_1 \right) \cos \omega \tau_0 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} q_0 \omega^2 B + 2 f \omega^2 C + 2\omega \frac{\partial C}{\partial \tau_1} - D\delta_1 \right) \sin \omega \tau_0 .$$

Для того, чтобы устранить вековые члены в решении системы (11) необходимо положить:

$$q_0 \omega C - 2\frac{\partial B}{\partial \tau_1} = 0, \qquad q_0 \omega D + 2\frac{\partial A}{\partial \tau_1} = 0, \tag{12}$$

$$q_0 \omega A - 4 f \omega D - 4\frac{\partial D}{\partial \tau_1} - \frac{2}{\omega} C\delta_1 = 0, \qquad q_0 \omega B + 4 f \omega C + 4\frac{\partial C}{\partial \tau_1} - \frac{2}{\omega} D\delta_1 = 0.$$

Из данной системы получим дифференциальное уравнение для определения функции A:

$$\frac{\partial^4 A}{\partial \tau_1^4} + 2 f \omega \frac{\partial^3 A}{\partial \tau_1^3} + \frac{\partial^2 A}{\partial \tau_1^2} \frac{q_0^2 \omega^2}{64} \left(16 + \frac{64 f^2}{q_0^2} + \frac{16\delta_1^2}{q_0^2 \omega^4} \right) + \frac{\partial A}{\partial \tau_1} \frac{f q_0^2 \omega^3}{4} + \frac{q_0^4 \omega^4}{64} A = 0 . \tag{13}$$

Составим характеристическое уравнение для уравнения (13):

$$\lambda^4 + 2 f \omega \lambda^3 + \lambda^2 \frac{q_0^2 \omega^2}{64} \left(16 + \frac{64 f^2}{q_0^2} + \frac{16\delta_1^2}{q_0^2 \omega^4} \right) + \lambda \frac{f q_0^2 \omega^3}{4} + \frac{q_0^4 \omega^4}{64} = 0.$$

Так как выполняются условия Гурвица положительности корней данного характеристического уравнения, их можно записать в виде

$$\lambda_{1,2} = -k_1^2 \pm i n_1^2, \qquad \lambda_{3,4} = -k_2^2 \pm i n_2^2 .$$

Следовательно,

$$A(\tau_1, \tau_2) = C_1(\tau_2) e^{-k_1^2 \tau_1} \cos\left(n_1^2 \tau_1\right) + C_2(\tau_2) e^{-k_1^2 \tau_1} \sin\left(n_1^2 \tau_1\right) + C_3(\tau_2) e^{-k_2^2 \tau_1} \cos\left(n_2^2 \tau_1\right) + C_4(\tau_2) e^{-k_2^2 \tau_1} \sin\left(n_2^2 \tau_1\right).$$

Функция B определяется из уравнения

$$B = \frac{-1}{q_0 \omega} \left(\frac{8 f}{q_0} \frac{\partial B}{\partial \tau_1} + \frac{8}{q_0 \omega} \frac{\partial^2 B}{\partial \tau_1^2} + \frac{4\delta_1}{q_0 \omega^2} \frac{\partial A}{\partial \tau_1} \right);$$

$$\frac{\partial B}{\partial \tau_1} = \frac{q_0 \omega^2}{4\delta_1} \left(q_0 \omega A + \frac{8 f}{q_0} \frac{\partial A}{\partial \tau_1} + \frac{8}{q_0 \omega} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau_1^2} \right).$$

Исследуем зависимость амплитуды колебаний балки от коэффициента демпфирования *f*. Начальные условия описываются выражениями $w_0 = 0, \quad w_0 \neq 0, \quad u_0 \neq 0$, $\dot{u}_0 = 0$. Следовательно, перемещение балки и демпфера можно записать следующим образом:

$$w_0 = B(\tau_1, \tau_2) \sin \omega \tau_0 , \tag{14}$$

$$u_0 = C(\tau_1, \tau_2)\cos\omega\tau_0 = \frac{2}{2q_0\omega}\frac{\partial B}{\partial\tau_1}\cos\omega\tau_0 . \qquad (15)$$

Чтобы изучить влияние коэффициента *f* на амплитуду колебаний балки, рассмотрим отношение амплитуды балки в начале и конце n- ого полупериода колебаний, т.е. в моменты времени $\frac{n\pi\mu^{1/2}}{\omega}$, $\frac{(n+1)\pi\mu^{1/2}}{\omega}$

$$R = \frac{B\left(\frac{(n+1)\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right)}{B\left(\frac{n\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right)} . \qquad (16)$$

Введем обозначения $\dot{w}_0 = \omega B\big|_{\tau_0 = \frac{\pi n}{\omega}} = \omega B\left(\frac{n\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right)$ – скорость балки,

$u_0 = \frac{2}{q_0\omega}\frac{\partial B}{\partial\tau_1}\left(\frac{\pi n\mu^{1/2}}{\omega}\right)$ – перемещение демпфера.

Раскладывая $B\left(\frac{(n+1)\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right)$ в ряд Тейлора, получим

$$R = \frac{B\left(\frac{(n+1)\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right)}{B\left(\frac{n\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right)} = \frac{B\left(\frac{n\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right) + \frac{\pi\mu^{1/2}}{\omega}\frac{\partial B}{\partial\tau_1}\left(\frac{n\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right) + o(\mu)}{B\left(\frac{n\pi\mu^{1/2}}{\omega}\right)} = 1 + \pi\mu^{1/2}\frac{\omega q_0 u_0}{2\dot{w}_0} + o(\mu). \qquad (17)$$

Вообще, желательно сделать R как можно меньше, так как это подразумевает затухание колебаний балки.

Из (17) следует, чтобы $R < 1$, необходимо, чтобы $\frac{\omega u_0 q_0}{2\dot{w}_0} < 0$ $(\omega = \pi^2 n^2)$. Следовательно, $q_0 u_0$ и $\dot{w}_0$ должны иметь разные знаки, q_0 должно быть равно ± 2 (тогда величина $\frac{\omega u_0 q_0}{2\dot{w}_0}$ максимальна по модулю). Учитывая, что $q_0 = 2\sin(\pi n a / l)$, при *n* = 1, *a* = *l/2*; при *n* = 2, *a* должно быть *a* = *l/4* или *a* = 3*l/4* и т.д.

Литература

1. Найфэ А.Х. Методы возмущений.- М.: Мир,1972.- 446 с.
2. Semi-active dynamic vibration absorbers for controlling transient response / M. Abe and T. Igusa // Journal sound and vibration.- 1996.- №