УДК 51. (07.07)

Исследование кубических уравнений

Сенькова Е.В.
Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим примеры решения кубических уравнений.

Задача1. Решить уравнение $8x^3-6x-1=0$.

Решение: воспользуемся тригонометрической подстановкой. Так как $x=0$ не является корнем исходного уравнения, то разделим его на $2x$:

$4x^2=\frac{1}{2x}+3$; Если $x<-1$ или $x>1$, то левая часть уравнения больше 4, а правая его часть - меньше 4, следовательно, корень уравнения $-1\le x\le 1$.

Пусть $x=\cos\omega$, где $0\le\omega\le\pi$, тогда получаем $8\cos^3\omega-6\cos\omega-1=0$;

$4\cos^3\omega-3\cos\omega=\frac{1}{2}$; $\cos 3\omega=\frac{1}{2}$; Решением последнего уравнения являются $\omega=\frac{\pi}{9}(6n\pm 1)$,где n - число корней. Но $0\le\omega\le\pi$, поэтому $\omega_1=\frac{\pi}{9}$; $\omega_2=\frac{5\pi}{9}$; $\omega_3=\frac{7\pi}{9}$.Получаем $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$; $x_2=\cos\frac{5\pi}{9}$; $x_3=\cos\frac{7\pi}{9}$.

Ответ: $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$; $x_2=\cos\frac{5\pi}{9}$; $x_3=\cos\frac{7\pi}{9}$.

Задача2. Решить уравнение $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$

Решение: рассмотрим уравнение $x^3-(a+1)x^2+a^2=0$, оно совпадает с исходным уравнением при $a=\sqrt{2}$. Получаем $a^2-ax^2+x^3-x^2=0$, решением которого являются $a_{1,2}=\frac{x^2\pm\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}}{2}=\frac{x^2\pm x(x-2)}{2}$, то есть $a_1=x^2-x$ и $a_2=x$. Поскольку $a=\sqrt{2}$, то, получаем $x^2-x-\sqrt{2}=0$ и $x=\sqrt{2}$.Отсюда три корня: $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$ и $x_3=\sqrt{2}$

Ответ: $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$; $x_3=\sqrt{2}$.

Предложенные исследования можно использовать при решении различных видов алгебраических и тригонометрических уравнений.