

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА,  
УДАЛЯЕМОГО ИЗ ЗАГОТОВКИ  
ПРИ ФОРМООБРАЗОВАНИИ ВПАДИНЫ  
МЕЖДУ ДВУМЯ ЗУБЬЯМИ САТЕЛЛИТА  
ПЛАНЕТАРНО-ЦЕВОЧНОГО РЕДУКТОРА**

*Канд. техн. наук ЯНКЕВИЧ Н. Г., асп. ЯНКЕВИЧ Е. Н.*

*Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси*

Повышение конкурентоспособности выпускаемой продукции – одна из приоритетных задач современного машиностроения. В связи с этим все более очевидны тенденция повышения технологического уровня производства, рост его насыщенности новыми наукоемкими прогрессивными технологиями. При этом важным инструментом в практических исследованиях и разработках становятся методы фундаментальных исследований.

Все эти тенденции четко прослеживаются при производстве высокоточных передаточных механизмов, таких как планетарно-цевочные редукторы.

Качество и точность изготовления сателлитов в значительной степени определяют как работоспособность, эксплуатационные характеристики самих редукторов, так и конкурентоспособность изделий, в которых они используются.

Традиционная технология изготовления сателлитов включает в себя следующие операции: предварительную лезвийную обработку (зубодолблением или зубофрезерованием), термическую обработку и чистовое шлифование. При этом в ходе предварительного формообразования сателлита зачастую используются устройства со сложной кинематической цепью, погрешность исполнения элементов которых приводит к снижению точности изготовления самого сателлита. Это и обуславливает необходимость усовершенствования технологии производства.

В последнее время широкое применение нашла технология формообразования сателлита глубинным шлифованием. Данный метод характеризуется простой кинематикой рабочих движений (рис. 1), реализуемой в повышенной жесткости конструкций в станках, что позволяет значительно увеличить точность профилирования сателлитов. Однако на данный момент недостаточно разработаны теоретические основы данного метода применительно к производству деталей с трохойдным профилем (в частности, сателлитов планетарно-цевочных редукторов).

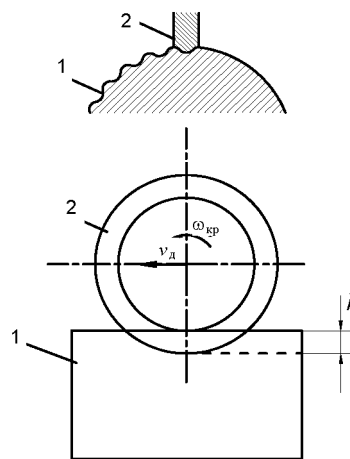


Рис. 1. Формообразование сателлита методом глубинного шлифования: 1 – сателлит; 2 – шлифовальный круг;  $\omega_{кр}$  – угловая скорость вращения шлифовального круга;  $v_{д}$  – скорость продольного перемещения суппорта;  $h$  – глубина шлифования

Формообразование сателлита методом профильного глубинного шлифования характеризуется интенсивным теплообразованием в зоне

обработки с нагревом до температур плавления обрабатываемого материала. Сочетание высоких температур и скоростей нагрева с последующим быстрым охлаждением создает предпосылки для структурно-фазовых превращений в поверхностном слое обрабатываемого материала и, как следствие, обуславливает возможное появление дефектов шлифовочного характера – прижогов, микротрещин, сколов и др.

Одной из наиболее важных величин при формообразовании зубчатых колес является площадь сечения материала  $S_c$ , удаляемого инструментом при формообразовании впадины между двумя зубьями за один проход. От  $S_c$  зависит сопротивление резанью, которое пропорционально площади сечения срезаемого слоя, и соответственно интенсивность термодинамической напряженности в зоне шлифования.

В данной статье предложены соотношения для расчета площади сечения материала  $S_c$ , удаляемого из заготовки при формообразовании впадины между двумя зубьями сателлита планетарно-цевочного редуктора.

Будем считать, что изначальный диаметр заготовки совпадает с диаметром вершин зубьев сателлита. Тогда (рис. 2) площадь сечения впадины, удаляемой при формообразовании сателлита за один проход  $S^*$ , представляет собой удвоенную разность между площадью  $S_c$  сектора СВМ и площадью соответствующего криволинейного сектора  $S_{кр.с}$ .

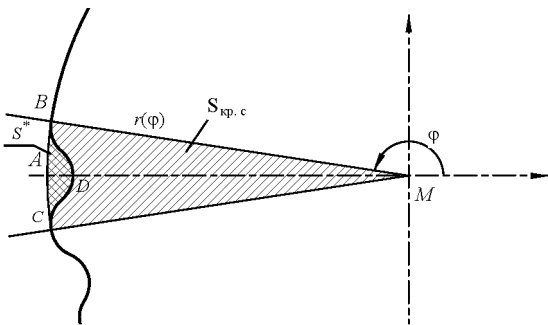


Рис. 2. Определение площади сечения впадины, удаляемой при формообразовании сателлита за один проход

Площадь сектора определяется по формуле

$$S_c = \frac{\pi}{2z} (r + e - r_{ц})^2, \quad (1)$$

где  $z$  – количество зубьев сателлита;  $r$  – радиус цевочного колеса;  $e$  – эксцентриситет;  $r_{ц}$  – радиус цевки.

Согласно [1], если известны полярные уравнения кривой, то площадь соответствующего криволинейного сектора определяется по формуле

$$S_{кр.с} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Если в (2) перейти от полярных к декартовым координатам, которые в свою очередь зависят от некоторого параметра  $\alpha$ , получим соотношение

$$S_{кр.с} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x(\alpha)y'(\alpha) - y(\alpha)x'(\alpha)) d\alpha. \quad (3)$$

Теоретический профиль сателлита задается уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha + e \cos(z+1)\alpha - r_{ц} \cos(\gamma + \alpha); \\ y &= r \sin \alpha + e \sin(z+1)\alpha - r_{ц} \sin(\gamma + \alpha), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\alpha$  – параметр;  $\gamma$  – угол зацепления, который определяется следующим образом:

$$\gamma = \arctg \frac{\sin(z\alpha)}{\frac{1}{m} + \cos(z\alpha)}, \quad (5)$$

где  $m$  – коэффициент укорочения эпитрохоиды, который вычисляется по формуле

$$m = \frac{e(z+1)r}{r}. \quad (6)$$

Для участка профиля (рис. 2), соответствующего половине впадины между вершинами зубьев, параметр  $\alpha$  будет изменяться в пределах  $[\pi - \pi/z, \pi]$ . Подставив уравнения (4) в (3) и проинтегрировав в указанных пределах, с учетом указанных выше замечаний получаем, что площадь сечения материала, удаляемого при формообразовании впадины сателлита, определяется по формуле

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{2\pi}{z} \left( re - rr_4 - r_4 e - \frac{e^2 z}{2} \right) + \\ &+ 2rr_4 \left( \int_{\pi - \frac{\pi}{z}}^{\pi} \cos \gamma d\alpha + m \int_{\pi - \frac{\pi}{z}}^{\pi} \cos(z\alpha - \gamma) d\alpha \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В результате тригонометрических преобразований с учетом (5) можно получить:

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{1+m \cos(z\alpha)}{\sqrt{1+m^2+2m \cos(z\alpha)}}; \\ \sin \gamma &= \frac{m \sin(z\alpha)}{\sqrt{1+m^2+2m \cos(z\alpha)}}.\end{aligned}\quad (8)$$

Тогда выражение (7) примет вид

$$\begin{aligned}S^* &= \frac{2\pi}{z} \left( re - rr_4 - r_4 e - \frac{e^2 z}{2} \right) + \\ &+ 2rr_4 \int_{\frac{\pi}{z}}^{\pi} \sqrt{1+m^2+2m \cos(z\alpha)} d\alpha.\end{aligned}\quad (9)$$

Посредством тригонометрических преобразований интеграл в правой части соотношения (9) может быть приведен к разности

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{z}}^{\pi} \sqrt{1+m^2+2m \cos(z\alpha)} d\alpha = \\ &= \frac{2(m+1)}{z} \left( E_2 \left( \frac{\pi z}{2}, \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \right) - E_2 \left( \frac{\pi(z-1)}{2}, \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \right) \right),\end{aligned}\quad (10)$$

где  $E_2(\varphi, k)$  – неполный эллиптический интеграл 2-го рода в форме Лежандра [2],

$$E_2(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Согласно [3] для неполных эллиптических интегралов выполняется соотношение

$$E(\pi n \pm \varphi, k) = 2nE(k) \pm E(\varphi, k), \quad (11)$$

где  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$  – полный эллиптический интеграл.

Рассмотрим разность неполных эллиптических интегралов в (10). Пусть у сателлита – четное число зубьев, т. е.  $z = 2n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), тогда с учетом (11) получаем

$$\begin{aligned}E_2 \left( \frac{\pi z}{2}, k \right) - E_2 \left( \frac{\pi(z-1)}{2}, k \right) &= \\ = E_2(\pi n, k) - E_2 \left( \pi n - \frac{\pi}{2}, k \right) &= E(k).\end{aligned}\quad (12)$$

Пусть у сателлита – нечетное число зубьев, т. е.  $z = 2n + 1$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Тогда

$$\begin{aligned}E_2 \left( \frac{\pi z}{2}, k \right) - E_2 \left( \frac{\pi(z-1)}{2}, k \right) &= \\ = E_2 \left( \pi n + \frac{\pi}{2}, k \right) - E_2(\pi n, k) &= E(k).\end{aligned}\quad (13)$$

Преобразовав соотношение (10) с учетом (12), (13) и подставив результат в (9), получаем, что площадь сечения материала, удаляемого при профилировании впадины между двумя зубьями за один проход, определяется по формуле

$$\begin{aligned}S^* &= \frac{2\pi}{z} \left( re - rr_4 - r_4 e - \frac{e^2 z}{2} \right) + \\ &+ \frac{4rr_4(m+1)}{z} E \left( \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \right).\end{aligned}\quad (14)$$

Для вычисления значения эллиптического интеграла в соотношении (14) могут быть использованы стандартные пакеты прикладных программ, такие как Mathematica, MathLab и др. В частности, в базовом модуле пакета Mathematica для вычисления эллиптических интегралов предусмотрена функция EllipticE, параметры которой для рассматриваемой задачи примут вид

$$\text{EllipticE} \left[ \frac{4 * m}{(m+1)^2} \right].$$

Также можно разложить эллиптический интеграл в ряд по ортогональным многочленам (например, Чебышева – Лягерра согласно соотношениям, приведенным в [4]) или воспользоваться уже существующими разложениями [3]. На практике достаточно удобно представление эллиптического интеграла из соотношения (14) в виде

$$\begin{aligned}E \left( \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \right) &= \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \left( \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \right)^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} \left( \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \right)^4 - \dots \right. \\ &\dots - \left. \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{1}{2n-1} \left( \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \right)^{2n} - \dots \right).\end{aligned}\quad (15)$$

Следует отметить, что для выравнивания контактных напряжений и обеспечения необходимых для сборки зазоров часто производится корректировка исходного теоретического профиля зуба [5]. Так, в [6] предложена методика замены участков трохойдного профиля прямыми линиями и дугами окружности, наиболее близко совпадающими с теоретическим профилем сателлита.

С учетом данного замечания были выполнены исследования для планетарно-цевочного редуктора МПЦЦ 82-G25, который применяется в качестве привода машины, предназначенной для заглаживания бетонных поверхностей в промышленном и гражданском строительстве. Теоретический профиль его сателлита представляет собой эпитрохоиду с параметрами:

- количество зубьев сателлита  $z = 25$ ;
- радиус цевочного колеса  $r = 53,5$  мм;
- эксцентриситет  $e = 1,5$  мм;
- радиус цевки  $r_4 = 4$  мм;
- коэффициент укорочения эпитрохоиды  $m = 0,729$ .

Согласно методике [6] в пакете AutoCAD был построен скорректированный профиль сателлита редуктора МПЦЦ 82-G25. Проведенное измерение средствами пакета AutoCAD показало, что площадь, ограниченная окружностью, проведенной по вершинам зубьев сателлита, и частью профиля, соответствующей впадине между двумя зубьями, составляет  $19,0385$  мм<sup>2</sup> (в рассматриваемой постановке задачи она соответствует площади сечения материала, удаляемого инструментом при формообразовании впадины между двумя зубьями сателлита), в то время как согласно (14) площадь сечения  $S^* = 19,055$  мм<sup>2</sup>. То есть с учетом корректировки профиля погрешность вычисления по соотношению (14) пренебрежимо мала и составляет  $0,08$  %.

Таким образом, полученное соотношение (14) может использоваться для расчета площади сечения материала, удаляемого инструментом при формообразовании впадины между двумя зубьями сателлита планетарно-цевочного редуктора. При этом, если профиль подвергся корректировке, погрешность расчета по соотношению (14) будет пренебрежимо мала.

На основании значения площади сечения материала, удаляемого при формообразовании впадины, задаются параметры режима глубинного шлифования, а также определяется произ-

водительность процесса шлифования как произведение площади сечения материала, удаляемого при формообразовании впадины, на скорость перемещения суппорта (рис. 1).

## ВЫВОД

Эффективная реализация процесса профильного глубинного шлифования возможна при обеспечении высокой производительности с минимально возможной сопутствующей температурой нагрева. При этом одной из наиболее важных величин является площадь сечения материала, удаляемого инструментом при формообразовании впадины между двумя зубьями. От данного параметра зависят сопротивление резанью и соответственно интенсивность термодинамической напряженности в зоне шлифования.

Посредством аналитических преобразований, базирующихся на методах математического анализа, получено соотношение для расчета площади сечения материала, удаляемого инструментом при формообразовании впадины между двумя зубьями сателлита планетарно-цевочного редуктора.

Показано, что корректировка теоретического профиля сателлита, осуществляемая для выравнивания контактных напряжений и обеспечения необходимых для сборки зазоров, не оказывает существенного влияния на точность расчета площади сечения удаляемого материала по полученному соотношению.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин, В. А. Основы математического анализа: в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 600 с.
2. Никольский, С. М. Курс математического анализа: в 2 т. / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 432 с.
3. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
4. Крылов, И. В. Приближенное вычисление интегралов / И. В. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
5. Янкевич, Н. Г. Формообразование зубьев сателлита циклоидного цевочного зацепления / Н. Г. Янкевич, В. Г. Дяткович // Современные методы проектирования машин. – Минск: БНТУ, 2004. – Вып. 2, т. 5. – С. 96–98.
6. Берестнев, О. В. Исследование цевочного зацепления трохойдной передачи / О. В. Берестнев, Н. Г. Янкевич // Развитие конструкции и производства зубчатых передач: тез. докл. – Свердловск, 1989. – С. 3–4.

Поступила 06.06.2008