

УДК 681.511

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КОРНЕВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Канд. техн. наук, доц. НЕСЕНЧУК А. А.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

Одной из важнейших задач, решаемых в процессе анализа и синтеза систем автоматического управления (САУ), является установление характера влияния изменения параметров системы на статические и динамические свой-

ства процесса управления (точность, временные и частотные характеристики), которое определяется чувствительностью системы. Поскольку в реальных задачах параметры объекта управления, как правило, точно не известны,

большое значение приобретает свойство робастности [1] и, в частности, робастной устойчивости, т. е. устойчивости системы в условиях параметрической неопределенности. В качестве меры робастности может быть использована чувствительность.

Впервые понятие чувствительности было введено в фундаментальной работе Г. Боде [2], который определил меру чувствительности и вывел формулу чувствительности для усилителей с обратной связью. С конца 1950-х гг. число публикаций, затрагивающих вопросы чувствительности, стало резко возрастать благодаря появлению самонастраивающихся систем, поскольку для них характерно изменение параметров во времени и наиболее важным при их изучении является вопрос влияния этого изменения на динамические характеристики системы, т. е. чувствительность системы к изменению параметров. Известно, что одним из средств уменьшения чувствительности системы к вариациям параметров является обеспечение бесконечно большого коэффициента усиления. Этот вопрос был затронут в [3], где рассматривались вопросы замены релейного элемента линейным усилителем, коэффициент усиления которого неограниченно возрастает. В конце 1950-х гг. появились первые работы [4], в которых затрагивались корневые оценки чувствительности. В качестве таких оценок устанавливались коэффициенты чувствительности полюсов p_i и нулей z_i передаточной функции системы управления. Вопросы корневой чувствительности с позиций общей теории корневых траекторий рассмотрены в [5]. Широкий спектр вопросов по чувствительности динамических систем, в частности, связи чувствительности с робастностью, освещается в [6].

В данной статье рассмотрен способ определения корневой чувствительности, основанный на использовании аналитических уравнений корневых годографов [5, 7]. На его основе разработаны алгоритм и компьютерные программы вычисления корневой чувствительности системы к изменению ее параметра.

Функции корневой чувствительности. Рассмотрим замкнутую систему автоматического управления, параметры которой подвержены изменениям, и определим ее передаточную функцию следующим образом:

$$W(s) = \frac{\theta(s; \alpha_1, \dots, \alpha_k)}{D(s; \alpha_1, \dots, \alpha_k)}, \quad (1)$$

где $\theta(s, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $D(s, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – полиномы числителя и знаменателя передаточной функции $W(s)$ замкнутой системы; $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – изменяющиеся параметры системы.

Тогда характеристическое уравнение системы с передаточной функцией (1) можно представить выражением

$$D(s, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{j=0}^n C_j(\alpha_1, \dots, \alpha_k) s^{n-j} = 0,$$

где C_j – коэффициенты характеристического уравнения степени n .

Придав параметрам малые приращения, получим новое уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s, \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots, \alpha_k + \Delta\alpha_k) = \\ = \sum_{j=0}^n \tilde{C}_j(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots, \alpha_k + \Delta\alpha_k) s^{n-j} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Допустим, что при определенных α_i ($i = 1, \dots, k$) уравнение (2) имеет n различных корней s_1, \dots, s_n . Тогда для малых изменений параметров α_i можно записать

$$\Delta s_j = \frac{\partial s_j}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial s_j}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial s_j}{\partial \alpha_k} \Delta \alpha_k. \quad (3)$$

Функции корневой чувствительности χ_{ji} j -го корня к изменению i -го параметра определяются следующими частными производными:

$$\chi_{ji}(\sigma, \omega) = \frac{\partial s_j}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, n,$$

входящими в (3). Они являются важнейшими косвенными характеристиками чувствительности систем автоматического управления.

В процессе синтеза систем управления стремятся к минимизации чувствительности. Однако при этом следует иметь в виду, что для обеспечения требуемого качества системы запас ее устойчивости не должен быть слишком малым.

Определение функции корневой чувствительности на основе аналитических уравнений корневых годографов. Рассмотрим случай, когда в процессе функционирования системы изменяется ее общий коэффициент усиления

ния K , т. е. K является свободным параметром. Для этого, выделив параметр K и сделав в характеристическом уравнении системы

$$\Phi(s) + K\psi(s) = 0, \quad (4)$$

где $\Phi(s)$ и $\psi(s)$ – полиномы комплексного переменного s , замену переменного $s = \sigma + i\omega$, запишем комплексную функцию отображения

$$K = f(s) = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega), \quad (5)$$

где $u(\sigma, \omega)$, $v(\sigma, \omega)$ – гармонические функции двух независимых действительных переменных σ и ω :

$$u(\sigma, \omega) = -\frac{E(\sigma, \omega)P(\sigma, \omega) + F(\sigma, \omega)R(\sigma, \omega)}{P^2(\sigma, \omega) + R^2(\sigma, \omega)}; \quad (6)$$

$$v(\sigma, \omega) = -\frac{F(\sigma, \omega)P(\sigma, \omega) - E(\sigma, \omega)R(\sigma, \omega)}{P^2(\sigma, \omega) + R^2(\sigma, \omega)}, \quad (7)$$

где $E(\sigma, \omega)$, $F(\sigma, \omega)$, $P(\sigma, \omega)$, $R(\sigma, \omega)$ – полиномы от σ и ω , называемые базовыми [5]:

$$E(\sigma, \omega) = \operatorname{Re}\Phi(s), \quad F(\sigma, \omega) = \operatorname{Im}\Phi(s);$$

$$P(\sigma, \omega) = \operatorname{Re}\psi(s), \quad R(\sigma, \omega) = \operatorname{Im}\psi(s).$$

Вариация общего коэффициента усиления K вызывает миграцию корней характеристического уравнения (4) в плоскости комплексного переменного s (плоскости корней), порождая тем самым корневые годографы достаточно сложной конфигурации, которые описывают изменение динамических свойств исследуемой системы управления в зависимости от переменного параметра K . Корневые годографы полностью описываются выражением (5), которое представляет собой уравнение корневого годографа в общем виде. Корневая чувствительность системы к изменению ее параметра определяется реакцией корней системы в ответ на это изменение, т. е. скоростью вызванного параметрической вариацией изменения положения описывающей состояние системы точки корневого годографа. Поэтому, зная корневую чувствительность системы, можно определить ее реакцию (изменение значений корней) на параметрические вариации в данной точке.

На основании (5) можно заключить, что функция $\bar{\chi}$ корневого чувствительности систе-

мы к изменению общего коэффициента усиления K выражается следующей производной комплексной функции (5):

$$\bar{\chi} = \frac{ds}{dK} = \frac{1}{f'(s)}. \quad (8)$$

Согласно определению производной функции комплексного переменного и условиям Коши – Римана [8], а также с учетом (8) можно записать

$$f'(s) = \frac{\partial u}{\partial \sigma} + i \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial u}{\partial \sigma} - i \frac{\partial u}{\partial \omega}.$$

Откуда определим модуль λ и аргумент γ функции корневого чувствительности соответственно по формулам:

$$\lambda = \left| \frac{ds}{dK} \right| = \frac{1}{\sqrt{(u'_\sigma)^2 + (u'_\omega)^2}}; \quad (9)$$

$$\gamma = \arg \left(\frac{ds}{dK} \right) = \operatorname{arctg} \frac{u'_\omega}{u'_\sigma}, \quad (10)$$

где

$$u'_\sigma = \frac{\partial u(\sigma, \omega)}{\partial \sigma}; \quad u'_\omega = \frac{\partial u(\sigma, \omega)}{\partial \omega}.$$

С целью определения функции корневого чувствительности в любой точке корневого годографа системы управления организуем вычислительную процедуру по формулам (9) и (10). При этом необходимо вычислить частные производные u'_σ и u'_ω . Для их определения воспользуемся формулами (4)–(7) и запишем выражение для свободного параметра

$$K = -\frac{\Phi(s)}{\psi(s)} = -\frac{E(\sigma, \omega)P(\sigma, \omega) + F(\sigma, \omega)R(\sigma, \omega)}{P^2(\sigma, \omega) + R^2(\sigma, \omega)} - i \frac{F(\sigma, \omega)P(\sigma, \omega) - E(\sigma, \omega)R(\sigma, \omega)}{P^2(\sigma, \omega) + R^2(\sigma, \omega)}. \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$A(\sigma, \omega) = -(E(\sigma, \omega)P(\sigma, \omega) + F(\sigma, \omega)R(\sigma, \omega))$$

и

$$B(\sigma, \omega) = P^2(\sigma, \omega) + R^2(\sigma, \omega).$$

Тогда на основании (6) имеем

$$u(\sigma, \omega) = \frac{A(\sigma, \omega)}{B(\sigma, \omega)}, \quad (12)$$

где $A(\sigma, \omega)$, $B(\sigma, \omega)$ – полиномы от двух независимых переменных σ и ω .

Очевидно, что функция (12) представляет собой алгебраическую дробно-рациональную функцию. Поэтому частные производные $u'_\sigma(\sigma, \omega)$ и $u'_\omega(\sigma, \omega)$ определим соответственно по формулам:

$$\frac{\partial u(\sigma, \omega)}{\partial \sigma} = \frac{A'_\sigma(\sigma, \omega)B(\sigma, \omega) - B'_\sigma(\sigma, \omega)A(\sigma, \omega)}{B^2(\sigma, \omega)}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial u(\sigma, \omega)}{\partial \omega} = \frac{A'_\omega(\sigma, \omega)B(\sigma, \omega) - B'_\omega(\sigma, \omega)A(\sigma, \omega)}{B^2(\sigma, \omega)}. \quad (14)$$

Вычислив по (13) и (14) соответствующие производные и подставив их в (9) и (10), получим выражения для определения модуля λ и аргумента γ функции корневой чувствительности $\bar{\chi}$ в любой точке корневого годографа системы, характеризующих динамику изменения корней системы в зависимости от изменения коэффициента усиления K . Для определения λ и γ в упомянутые выражения необходимо подставить координаты σ и ω исследуемой точки годографа.

Алгоритм вычисления функции корневой чувствительности. Учитывая сложность вычисления функций корневой чувствительности и необходимость их многократного использования в задачах анализа и синтеза САУ, разработан алгоритм построения функций $\bar{\chi}$ (λ и γ) с помощью ЭВМ, блок-схема которого приведена на рис. 1 и который применен для расчета следящей системы. В качестве исходных данных вводится передаточная функция разомкнутой системы

$$G(s) = -\frac{1}{K} = \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)},$$

которая задается следующими величинами: n – число полюсов разомкнутой системы; m – то же нулей разомкнутой системы; $N = \{N_j : j = 1, 2, \dots, n\}$ – массив (вектор) числовых значений полюсов разомкнутой системы, т. е. корней полинома $\Phi(s)$, стоящего в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы; $Z =$

$= \{Z_l : l = 1, 2, \dots, m\}$ – то же нулей разомкнутой системы, т. е. корней полинома $\Psi(s)$, стоящего в числителе передаточной функции разомкнутой системы.

Исходные данные вводятся в блоке 1 алгоритма. Затем (блок 2) на основании введенных исходных данных определяются коэффициенты полиномов $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ (блок 3). По формулам [5] в блоке 4 вычисляются базовые полиномы E , F , P и R , которые используются для определения полинома $A(\sigma, \omega)$ числителя (блок 5) и полинома $B(\sigma, \omega)$ знаменателя (блок 6) функции (12). В блоках 7 и 8 определяются соответственно частные производные $A'_\sigma(\sigma, \omega)$, $A'_\omega(\sigma, \omega)$ и $B'_\sigma(\sigma, \omega)$, $B'_\omega(\sigma, \omega)$ полиномов $A(\sigma, \omega)$ и $B(\sigma, \omega)$. Произведения $A'_\sigma(\sigma, \omega)B(\sigma, \omega)$ и $B'_\sigma(\sigma, \omega)A(\sigma, \omega)$, входящие в (13), вычисляются соответственно в блоках 9 и 10, а в блоках 11 и 12 определяются произведения $A'_\omega(\sigma, \omega)B(\sigma, \omega)$ и $B'_\omega(\sigma, \omega)A(\sigma, \omega)$, входящие в (14). В блоке 13 вычисляется значение полинома $B^2(\sigma, \omega)$, стоящего в знаменателе (13) и (14). Блоки 14 и 16 предназначены для умножения на -1 полиномов, определенных в блоках 10 и 12 соответственно. Сложение полиномов, полученных в блоках 9, 14 и 11, 16 согласно формулам (13) и (14) осуществляется в блоках 15 и 17 соответственно. В блоке 18 производится вычисление модуля λ и аргумента γ функции корневой чувствительности в заданных точках корневого годографа системы. Вычисление значений λ и γ осуществляется путем подстановки в формулы (13), (14), (9) и (10) заданных значений координат σ и ω исследуемых точек. В результате работы алгоритма выдаются (блок 19) числовые значения модуля и аргумента векторной функции $\bar{\chi}$ корневой чувствительности в исследуемых точках.

Пример. Рассмотрим следящую систему (рис. 2), состоящую из корректирующего, усиленного, двух апериодических и одного интегрирующего звеньев [9].

Передаточная функция рассматриваемой системы в разомкнутом состоянии определяется выражением

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{s(\tau_2 s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (15)$$

где $K = K_0 K_1 K_2 K_3$.

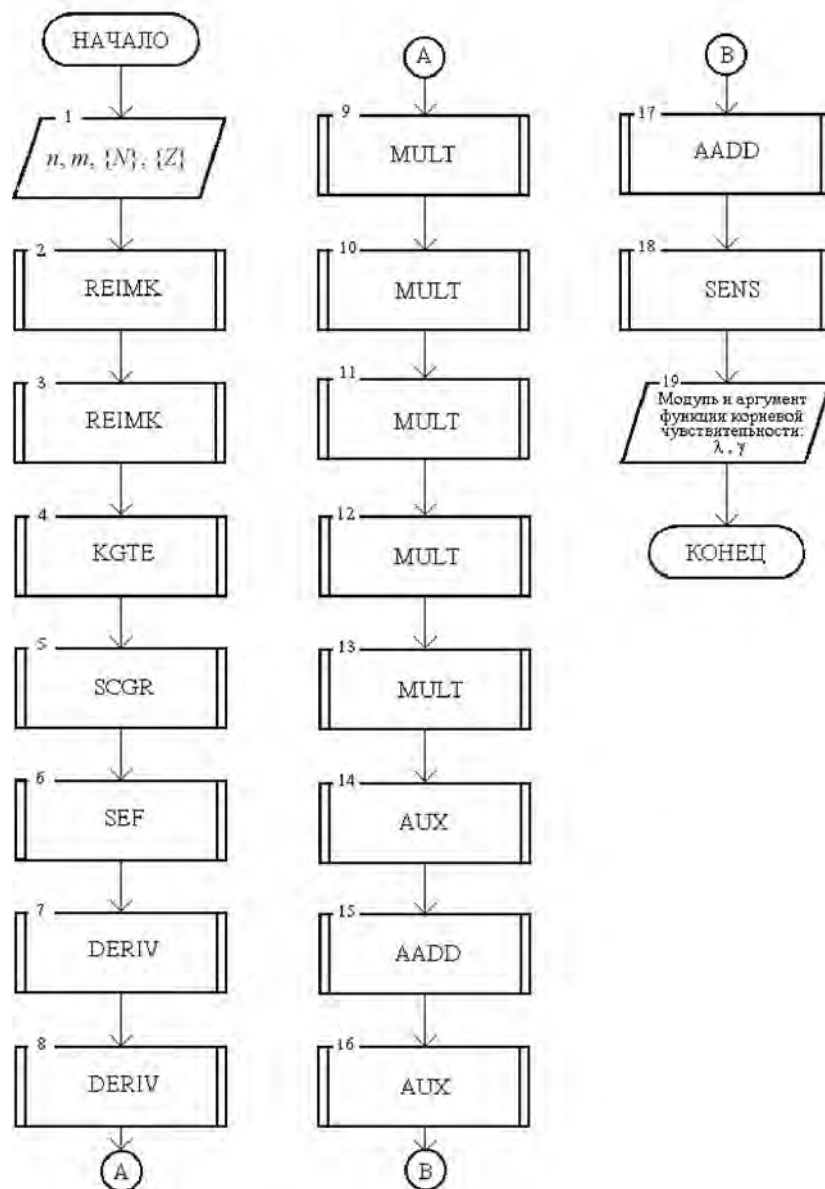


Рис. 1. Алгоритм определения функции корневой чувствительности

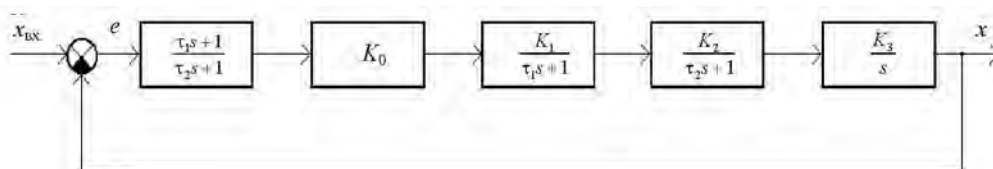


Рис. 2. Структурная схема следящей системы

Значения параметров системы: $T_1 = 0,1$ с;
 $T_2 = 0,05$; $\tau_1 = 0,21$; $\tau_2 = 0,015$ с.
 Выражение (15) перепишем в виде

$$G(s) = \frac{\tau_1}{\tau_2 T_1 T_2} \frac{K(s - Z_1)}{(s - N_1)(s - N_2)(s - N_3)(s - N_4)}$$

где $\frac{\tau_1}{\tau_2 T_1 T_2} = 2800$.

Передаточная функция замкнутой системы

$$W(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{s(\tau_2 s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K(\tau_1 s + 1)}. \quad (16)$$

Согласно (16) характеристическое уравнение САУ имеет вид

$$s(\tau_2 s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K(\tau_1 s + 1) = 0.$$

Построим корневой годограф системы управления в комплексной плоскости корней s при изменении общего коэффициента усиления системы K от 0 до ∞ и вычислим функцию корневой чувствительности в заданных точках корневого годографа.

Исходные данные для расчета:

$$m = 1; n = 4;$$

нули функции $G(s)$: $Z_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -4,77$;

полюсы функции $G(s)$: $N_1 = 0$; $N_2 = -\frac{1}{T_1} = -10$;

$N_3 = -\frac{1}{T_2} = -20$; $N_4 = -\frac{1}{\tau_2} = -66,7$.

Функция корневой чувствительности рассчитывается в семи точках, отмеченных на корневом годографе системы, приведенном на рис. 3 (точки на рисунке обозначены цифрами). Вектор корневой чувствительности в приведенных точках показан стрелками. Отклонения корней Δs_j (изменение хода процесса управления), вызванные изменением общего коэффициента усиления на некоторую величину $\Delta K = \Delta \alpha_i$, могут быть вычислены в данных точках на основании (3). Для рассматриваемой САУ наибольшую чувствительность имеют корни в начальных точках корневого годографа и в дальнейшем по мере приближения доминирующих корней к мнимой оси их чувствительность падает, т.е. система оказывается не слишком чувствительной к изменению параметров.

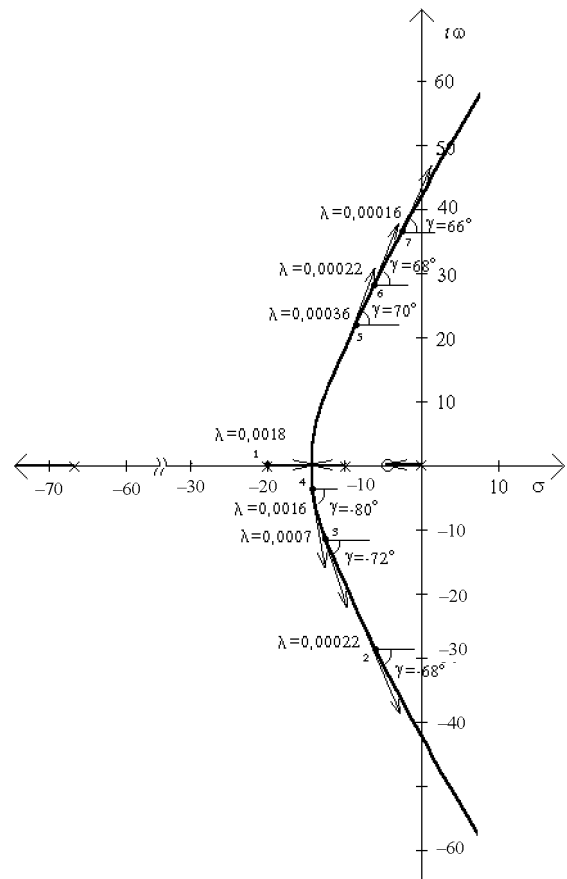


Рис. 3. Положительный корневой годограф следящей системы управления с отмеченными на нем значениями модуля λ и аргумента γ функции корневой чувствительности

ВЫВОД

Рассмотрен алгоритм определения функции корневой чувствительности системы автоматического управления к изменению ее параметра, основанный на использовании аналитических уравнений корневых годографов. Алгоритм позволяет вычислить значения модуля λ и аргумента γ векторной функции корневой чувствительности в любой точке корневого годографа системы. Формулы корневой чувствительности получены с применением условий Коши – Римана. Для определения корневой чувствительности строится корневой годограф системы, в заданных точках которого в соответствии с алгоритмом вычисляются значения λ и γ . На основе указанного алгоритма разработана компьютерная программа (язык программирования C++) вычисления функции корневой чувствительности. Приведен пример автоматизированного вычисления корневой чувствительности

для следящей системы. Разработанный алгоритм определения функции корневой чувствительности отличается тем, что в его основу положены аналитические уравнения корневых годографов, обеспечивающие простоту реализации алгоритма и наглядность. Алгоритм может быть практически использован в системах автоматизированного проектирования САУ (САПР САУ) при решении задач анализа и синтеза систем для оценки отклонений корней системы (изменения хода процесса управления), вызванных параметрическими вариациями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк, Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
2. Боде, Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью / Г. Боде. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – 642 с.

3. Цыпкин, Я. З. Теория релейных систем автоматического регулирования / Я. З. Цыпкин. – М.: Гостехиздат, 1955. – 456 с.
4. Huang, J. G. The sensitivity of the poles of linear closed-loop systems / J. G. Huang // Trans AIEE. – 1958. – Vol. 77. – P. 150–156.
5. Римский, Г. В. Автоматизация исследований динамических систем / Г. В. Римский, В. В. Таборовец. – Минск: Наука и техника, 1978. – 336 с.
6. Eslami, M. Theory of Sensitivity in Dynamic Systems / M. Eslami. – N.Y.: Springer-Verlag, 1994. – 600 p.
7. Несенчук, А. А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А. А. Несенчук. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.
8. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
9. Удерман, Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления / Э. Г. Удерман. – М.: Наука, 1972. – 448 с.

Поступила 30.05.2008

УДК 629.067

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С АНТИБЛОКИРОВОЧНЫМИ И ПРОТИБУКСОВОЧНЫМИ СИСТЕМАМИ

*Канд. техн. наук, доц. ГУРСКИЙ Н. Н., СЛАБКО Ю. И.,
докт. техн. наук, проф. ФУРУНЖИЕВ Р. И., канд. техн. наук, доц. ХОМИЧ А. Л.*

Белорусский национальный технический университет

Для обеспечения устойчивости и управляемости движения транспортных средств (автомобилей, самолетов, многоопорных колесных шасси и др.) в любых дорожных и погодных условиях независимо от квалификации и состояния водителя (пилота, механика-водителя), машины и внешней среды предназначены системы активной безопасности (САБ). Подсистемами САБ являются системы антиблокировочные (АБС) и протибуксовочные системы (ПБС). Совершенствование качества работы и снижение стоимости САБ является актуальной проблемой.

Эффективность САБ определяется алгоритмами управления и свойствами используемых

силовых исполнительных приводов. В [1] приведен обзор конструкций антиблокировочных и протибуксовочных систем различных фирм, даны характеристики элементов, а также описаны алгоритмы их работы. В [2] приведены теория и результаты исследования эффективности антиблокировочной системы грузовых автотранспортных средств.

В [3] рассмотрен комплекс вопросов по автоматизации процесса торможения автомобиля. В [4] приведен обзор конструкций антиблокировочных и протибуксовочных систем легковых автомобилей. В [5] рассмотрена специфика использования микрокомпьютеров для управления АБС и ПБС.