

УДК 624.072.21.7

**ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ ПОДХОД  
В РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ОСНОВАНИЯ.  
ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА \***

*ЧАСТЬ 2*

*Докт. техн. наук, проф. БОСАКОВ С. В., КОЗУНОВА О. В.*

*Белорусский национально-технический университет,  
Белорусский государственный университет транспорта*

Вначале решается задача в линейной постановке. По вычисленным значениям перемещений  $i$ -й узловой точки  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$  с помощью геометрических уравнений (4) и конечно-разностных соотношений (11) определяются

интенсивность деформаций (3) и интенсивность напряжений в центрах ячеек (2).

Имея значения напряжений и перемещений, полученные в результате решения задачи в первом приближении, определяем касательный

---

\* О к о н ч а н и е. Начало см. «Вестник БНТУ» № 1 с. г.

модуль деформации (5) для каждой ячейки и решаем задачу во втором и последующих приближениях. Итерационный процесс заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближениями будет соответствовать требуемой точности решения задачи.

Критерием сходимости служит условие, чтобы максимальная поправка  $\delta_f$  по искомой функции  $f(x, y)$  за один обход сетки не превосходила малой величины  $\xi$ , зависящей от шага сетки и полной осадки штампа. Для нашей задачи критерий сходимости имеет следующий вид:

$$\delta_f = \frac{f_{\max}^{(n)} - f_{\max}^{(n-1)}}{f_{\max}^{(n)}} \cdot 100 \% \leq \xi = 1 \% \quad (34)$$

где  $f_{\max}^{(n)}$ ,  $f_{\max}^{(n-1)}$  – максимальные значения искомой функции ( $n$ ) и ( $n - 1$ ) итераций.

Для реализации указанного подхода составлена программа на языке Mathematica 6.0 и проведена ее числовая апробация для двухслойных оснований. В численный счет использовались следующие исходные параметры: 1-й слой основания (песок средней плотности) –  $\sigma_{y1} = 0,2$  МПа;  $\nu_1 = 0,3$ ;  $E_{01} = 25$  МПа; 2-й слой основания (суглинок) –  $\sigma_{y2} = 0,25$  МПа;  $\nu_2 = 0,33$ ;  $E_{02} = 30$  МПа; железобетонная плита (бетон марки В15) –  $P = 90000$  Н;  $l = 1,2$  м;  $h = 0,5$  м;  $E_6 = 2,35 \cdot 10^{10}$  Па.

На рис. 7–9 приведены результаты расчета осадок основания и плиты, распределение реактивных давлений в контактной зоне плиты и вертикальных напряжений в верхнем слое основания под плитой для первых трех итераций. Из графиков следует, что итерационный процесс сходится быстро, особенно при расчете напряжений: а) результаты 1-й и 2-й итераций расчета вертикальных напряжений практически совпали ( $\delta_\sigma = 0,58$  %); б) реактивные напряжения имеют самую малую поправку в критерии сходимости ( $\delta_p = 0,18$  %), практически полное совпадение результатов (линейный расчет) и последующих итераций, что отличается от сходимости осадок ( $\delta_v = 0,93$  %).

Отметим, что несложно по найденным значениям вертикальных перемещений узловых точек найти внутренние усилия в сечениях плиты.

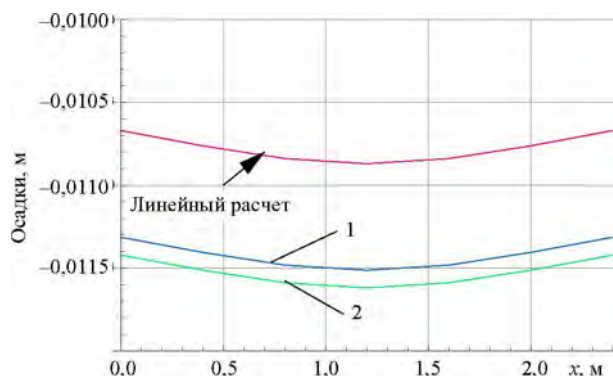


Рис. 7. Осадки основания и плиты в контактной зоне (линейный расчет): 1 – первая итерация; 2 – вторая итерация

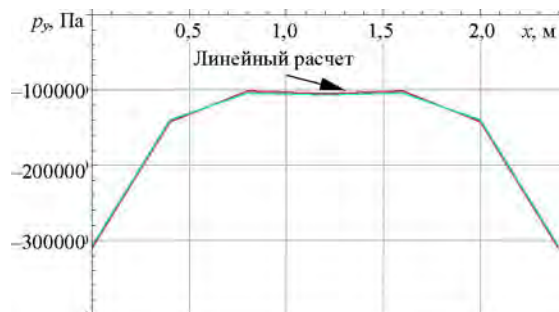


Рис. 8. Эпюра реактивных давлений в контактной зоне (линейный расчет)

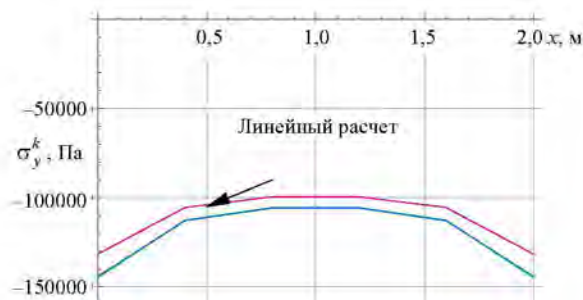


Рис. 9. Эпюра вертикальных напряжений в верхнем слое основания ( $h = \Delta y/2$ ) под подошвой плиты (линейный расчет)

Результаты вычислений внутренних усилий приведены на рис. 10. Эпюра  $Q_y$  кососимметрична и достигает максимума под крайними внешними силами, действующими на плиту. Эпюра  $M_x$  симметрична и максимальна под средней внешней силой. Вид и характер эпюр полностью соответствуют результатам теоретических расчетов [1, 2].

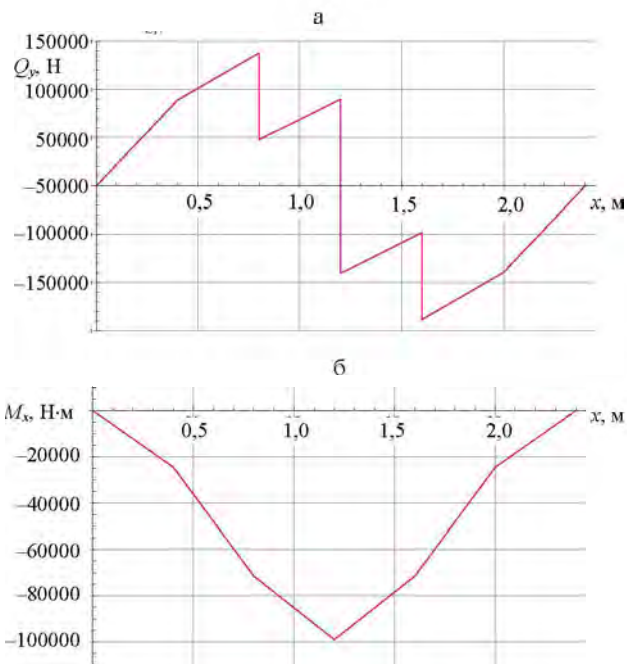


Рис. 10. Эпюры внутренних усилий в сечениях плиты: а – поперечная сила; б – изгибающий момент

На рис. 11 и 12 в сравнении показано распределение вертикальных напряжений (вторая итерация) в верхнем слое основания под плитой по ее ширине на разной глубине основания. С ростом глубины основания максимальные напряжения  $\sigma_y^k$  уменьшаются и опасные сечения в горизонтальном срезе под плитой перераспределяются.

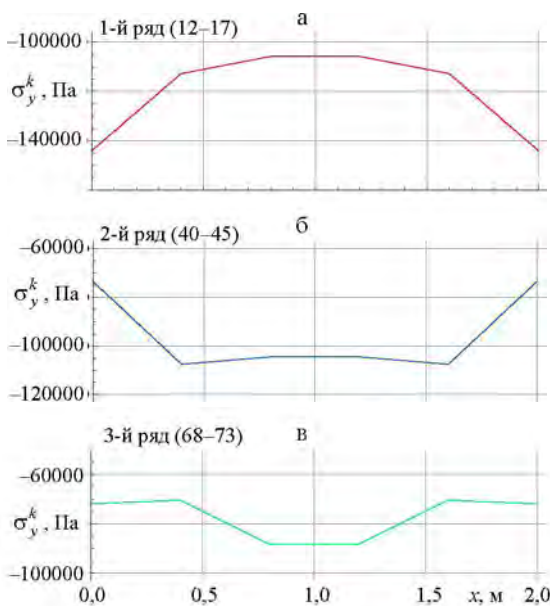


Рис. 11. Эпюры напряжений (вторая итерация) под подошвой плиты на глубине: а)  $h = \Delta y/2$ ; б)  $h = 3\Delta y/2$ ; в)  $h = 5\Delta y/2$

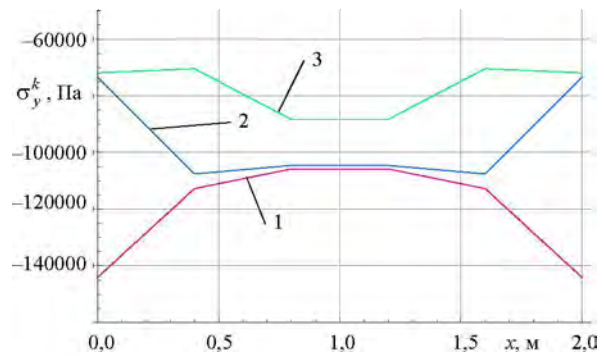


Рис. 12. Объединенная эпюра напряжений под подошвой плиты на глубине: 1 –  $h = \Delta y/2$ ; 2 –  $h = 3\Delta y/2$ ; 3 –  $h = 5\Delta y/2$

Распределение вертикальных напряжений (рис. 13) по глубине расчетной области подтверждает то, что с ростом глубины основания значения напряжений уменьшаются. На рис. 13 наблюдается резкое изменение значений напряжений на границе слоев: а)  $\sigma_y^{71} = 88339$  Па,  $\sigma_y^{99} = 59562$  Па (на 48,8 % по сравнению с аналогичным в упругих слоях); б) 1-й слой  $\sigma_y^{43} = 104525$  Па,  $\sigma_y^{71} = 88339$  Па (на 18,3 %); в) 2-й слой  $\sigma_y^{99} = 59362$  Па,  $\sigma_y^{127} = 53144$  Па (на 11,7 %).

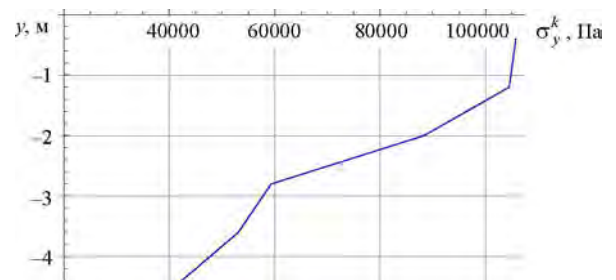


Рис. 13. Эпюра напряжений по глубине расчетной области (вторая итерация): вертикальный срез,  $k = 15, 43, 71, 99, 127, 155$

На рис. 14 и 15 в сравнении показано распределение вертикальных напряжений в упругих слоях основания по ширине расчетной области (вторая итерация). С ростом глубины основания происходит трансформация эпюры вертикальных напряжений от выпуклой вверх (седлообразной) до выпуклой вниз (параболической), что подтверждается экспериментами [2, 3].

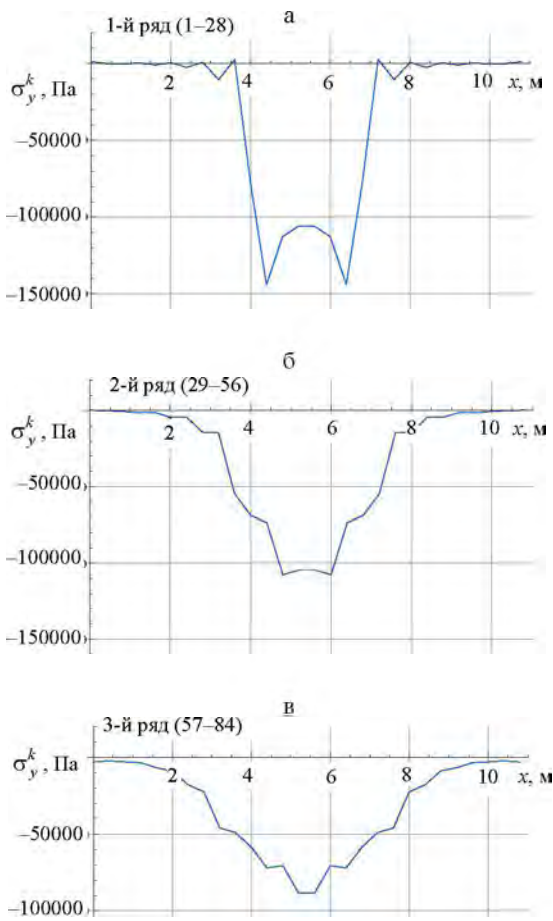


Рис. 14. Эпюры напряжений в верхнем слое основания по ширине расчетной области (вторая итерация) на глубине: а)  $h = \Delta y / 2$ ; б)  $h = 3\Delta y / 2$ ; в)  $h = 5\Delta y / 2$

Графики на рис. 12, 13 демонстрируют наличие распределительной способности грунта, т. е. деформации и напряжения возникают не только под нагруженными участками, но и в соседствующих с ними. Эта способность полностью соответствует гипотезе упругого полупространства, подтверждается экспериментами и строительным опытом.

Касательный модуль деформации (рис. 16) по глубине расчетной области уменьшает свои значения в верхнем упругом слое основания и незначительно, но увеличивает в нижнем слое. На границе слоев наблюдается скачок в сторону увеличения в связи исходными значениями начальных модулей деформаций. В верхнем слое основания итерационный процесс сходится медленнее ( $\delta_E = 0,41 \%$ ), чем в нижнем ( $\delta_E = 0,02 \%$ ).

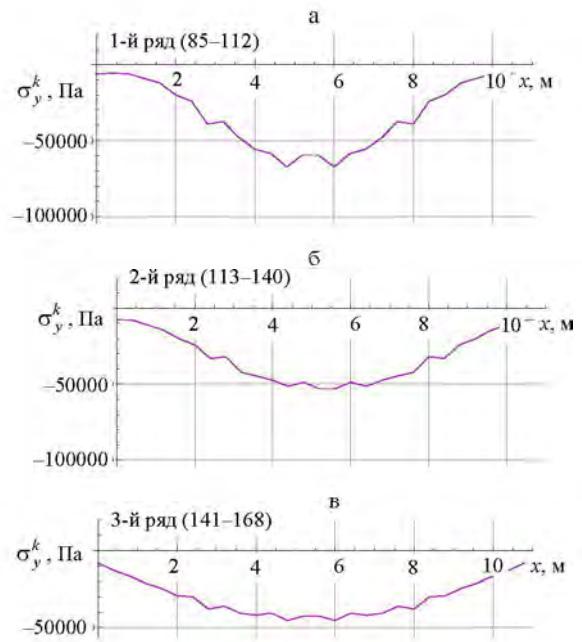


Рис. 15. Эпюры напряжений в нижнем слое основания по ширине расчетной области (вторая итерация) на глубине: а)  $h = 7\Delta y / 2$ ; б)  $h = 9\Delta y / 2$ ; в)  $h = 11\Delta y / 2$

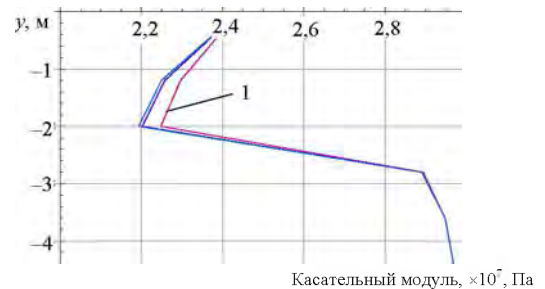


Рис. 16. Касательный модуль деформации (вертикальный срез): 1 – линейный расчет

На рис. 17 построена обратная зависимость между осадками плиты и реактивными давлениями основания, которая объясняется наличием нереально больших крайевых давлений и указывает на недостатки модели упругого полупространства.

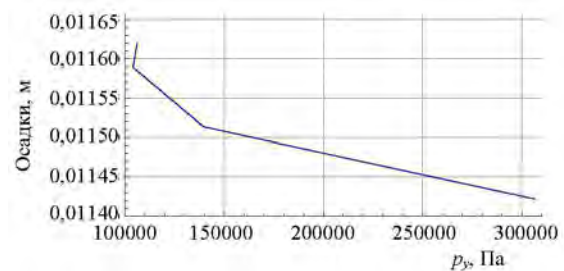


Рис. 17. Зависимость между осадками и реактивными давлениями в контактной зоне основания (вторая итерация)

## ВЫВОДЫ

Вычисления показали, что:

- применение вариационного подхода в решении контактной задачи вместе с физическими итерациями по А. А. Ильюшину приводит к быстрой сходимости расчета (максимум – три итерации), особенно в напряжениях;
- на скорость сходимости итерационного процесса влияет правильный выбор модели основания и вида функциональной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций;
- с увеличением глубины упругого слоя основания происходят видоизменение эпюры напряжений и перераспределение опасных сечений в горизонтальных срезах;
- наличие распределительной способности грунта очевидно и неоспоримо, поэтому в инженерных расчетах необходим учет этой способности, особенно в условиях плотной застройки города;
- характер и вид эпюр внутренних усилий в сечениях линейно-упругой плиты полностью

соответствуют гипотезам и допущениям теории упругости. Наряду с этим в силу нелинейности упругого основания нарушается прямая пропорциональность между напряжениями и деформациями, и возникает не прямая, а обратная нелинейная зависимость. Это объясняется тем, что на краю плиты наблюдается так называемый «краевой эффект»: при меньших осадках – нереально большие напряжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Симвулиди, И. А.** Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. – М.: Высш. шк., 1973. – 480 с.
2. **Горбунов-Посадов, М. И.** Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
3. **Федоровский, В. Г.** Жесткий штамп на нелинейно-деформируемом связном основании (плоская задача) / В. Г. Федоровский, С. Е. Кагановская // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1975. – № 1. – С. 41–44.

Поступила 09.09.2008