

АНАЛИЗ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОШАРНИРНОЙ И ДВУХШАРНИРНОЙ КАРДАНЫХ ПЕРЕДАЧ

Гурвич Ю. А., Вареник А.А.

This article contains a description of a new method of unevenness definition in dependence of obliquity angle and its influence on output cinematic characteristics of one-joint and two-joint cardan shafts

Карданная передача состоит из карданного шарнира, вала и промежуточных опор и применяется для передачи крутящего момента между валами механизмов трансмиссии, расположенными под постоянными или переменными углами. Она служит также для компенсации несоосности валов между закрепленными на раме агрегатами.

Карданная передача обладает существенным недостатком, заключающемся в неравномерности вращения выходного вала, возникающей из-за угла излома. Эта неравномерность оказывает негативное влияние на выходные характеристики карданных передач и механизмов трансмиссии. Тем не менее, исследований, посвященных изучению этого важного вопроса, в литературе приведено недостаточно [1-6].

В данной работе сделана попытка провести более полное исследование кинематических характеристик одношарнирной (по сравнению с [6]) и, по всей видимости, впервые для двухшарнирной карданных передач с переменным углом излома, что позволит, в дальнейшем, на стадии проектирования машины обосновать выбор схемы карданной передачи с приемлемой для практики величиной неравномерности вращения выходного вала.

Рассмотрим трансмиссию транспортного средства, где мощность от коробки передач к ведущему мосту передается посредством одношарнирной карданной передачи, которая в процессе движения машины может изменять свое первоначальное положение.

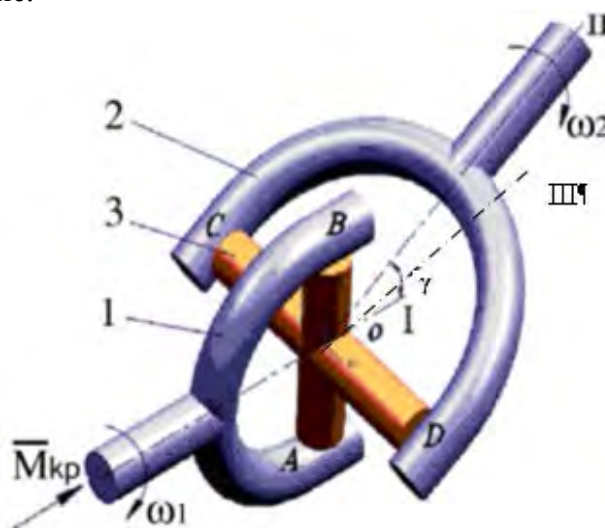


Рис. 1. Кинематическая схема карданного шарнира: 1, 2 – вилки; 3 – крестовина; I – ось вращения вилки I; II – ось вращения вилки 2; γ – угол между осями I и II; III – новое положение оси вращения вилки 2 при переменном угле γ ; ω_1 и ω_2 – угловые скорости ведущего и ведомого валов

Для одношарнирной карданной передачи, например в [2], получена зависимость для угла поворота ведомого вала β в функции двух углов: угла поворота ведущего вала α и угла излома γ (рис. 1):

$$\beta = \arctg\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma}\right), \quad (1)$$

При заданном положении ведущего звена, определяемом углом α , положение ведомого звена полностью определяется формулой (1).

Дифференцируя соотношение (1) по времени, имеем:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt},$$

где $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_1$, $\frac{d\beta}{dt} = \omega_2$ и $\frac{d\gamma}{dt} = \omega_\gamma$ - угловые скорости, соответственно, ведущего,

ведомого валов и ведомого вала при переменном угле γ ; $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}$,

$$\frac{\partial\beta}{\partial\gamma} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}.$$

Тогда соотношение для скорости вращения ведомого вала примет вид:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha} + \omega_\gamma \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}. \quad (2)$$

В выражении (2) введем замену:

$$K1(\alpha, \gamma) = \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}, \quad K2(\alpha, \gamma) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma \cos^2\alpha}. \quad (3)$$

$$\text{Иначе } \omega_2 = \omega_1 \cdot K1(\alpha, \gamma) + \omega_\gamma \cdot K2(\alpha, \gamma). \quad (4)$$

Определим угловое ускорение ведомого вала ε_2 , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (4):

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_1 \cdot K1(\alpha, \gamma) + \omega_1 \cdot \left(\frac{\partial K1(\alpha, \gamma)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial K1(\alpha, \gamma)}{\partial\gamma} \cdot \omega_\gamma \right) + \varepsilon_\gamma \cdot K2(\alpha, \gamma) + \\ + \omega_\gamma \cdot \left(\frac{\partial K2(\alpha, \gamma)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial K2(\alpha, \gamma)}{\partial\gamma} \cdot \omega_\gamma \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$ - угловая скорость ведущего вала; ε_1 - угловое ускорение ведущего

вала; $\omega_\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$ - угловая скорость ведомого вала 2 при повороте на угол γ ; ε_γ -

угловое ускорение ведомого вала 2 при повороте на угол γ (см. рис. 1).

Для анализа выражения (5) необходимо рассмотреть кинематические зависимости в шести случаях подобно тому, как это было сделано в [6].

Теперь рассмотрим карданную передачу с двумя шарнирами, представленную на рисунках 2-3.

В [2] приведено соотношение для определения угла поворота ведомого вала в двухшарнирной карданной передаче:

$$\beta' = \operatorname{arctag} \left(\frac{\cos\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\psi)}{\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)} \right), \quad (6)$$

где α – угол поворота вала I; β' – угол поворота вала III; γ_1 – угол излома вала I; γ_2 – угол излома вала III; ψ – угол между вилками 2 и 1', расположенными на валу II (см. рис. 3).

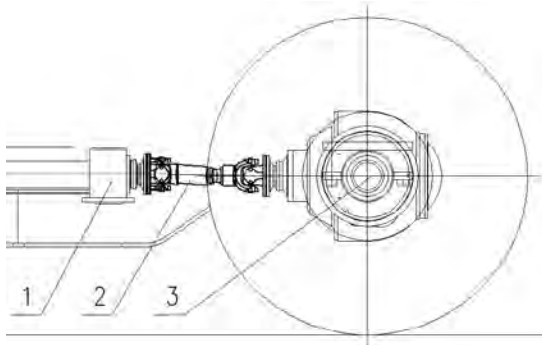


Рис. 2. Схема установки двухшарнирной карданной передачи на машине: 1 – опора; 2 – карданный вал; 3 – задний мост с колесами

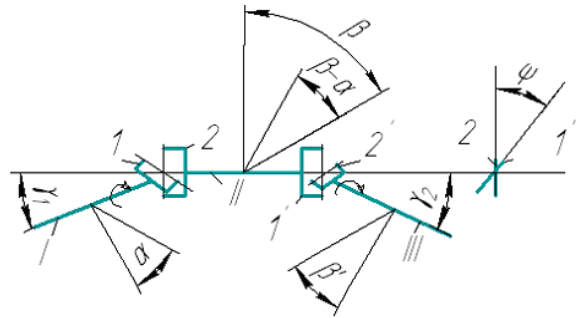


Рис. 3.- Схема карданной передачи с двумя шарнирами и обозначением углов

Угол β' является функцией двух переменных α , γ_2 . Поэтому, полная производная по времени от (6) представляет собой сумму двух слагаемых

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt}. \quad (7)$$

Найдем частные производные $\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} &= \frac{\cos\gamma_2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)}}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}} + \\ &+ \frac{-\cos\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2} \cdot [-(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)]}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}}; \\ \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} &= \frac{-\sin\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)}}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}} + \\ &+ \frac{2 \cdot \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2} \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1) \cdot \sin\gamma_2}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}}; \end{aligned}$$

Введем замены:

$L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha}$, $L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial \beta'}{\partial \gamma_2}$, $\omega_3 = \frac{d\beta'}{dt}$ – угловая скорость вращения вала III; $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$ – угловая скорость вала I; $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt}$ – угловая скорость оси III при переменном угле γ_2 .

Выражение (7) перепишем в виде:

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi). \quad (8)$$

Определим угловое ускорение ведомого вала ε_3 , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (8):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left(\frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) + \\ + \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left(\frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

где ε_1 – угловое ускорение вала I; ε_{γ_2} – угловое ускорение оси III.

Для анализа выражения (9) необходимо рассмотреть четыре случая.

1. Первый – $\varepsilon_1 = 0$, $\omega_{\gamma_2} = 0$.
2. Второй – $\varepsilon_1 = 0$, $\omega_{\gamma_2} \neq 0$.
 - 2.1 Случай равномерного вращения $\varepsilon_{\gamma_2} = 0$;
 - 2.2 Случай неравномерного вращения $\varepsilon_{\gamma_2} \neq 0$.
3. Третий – $\varepsilon_1 \neq 0$, $\omega_{\gamma_2} = 0$.
4. Четвертый – $\varepsilon_1 \neq 0$, $\omega_{\gamma_2} \neq 0$.
 - 4.1 $\varepsilon_{\gamma_2} = 0$;
 - 4.2 $\varepsilon_{\gamma_2} \neq 0$.

В качестве примера рассмотрим подробно четвертый случай.

Четвертый случай. Угловое ускорение входного вала $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \neq 0$ (входной вал вращается неравномерно), угловая скорость оси III $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt} \neq 0$ (при переменном угле γ_2 ось III подвижна).

В этом случае выражение (9) примет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left(\frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) + \\ + \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left(\frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

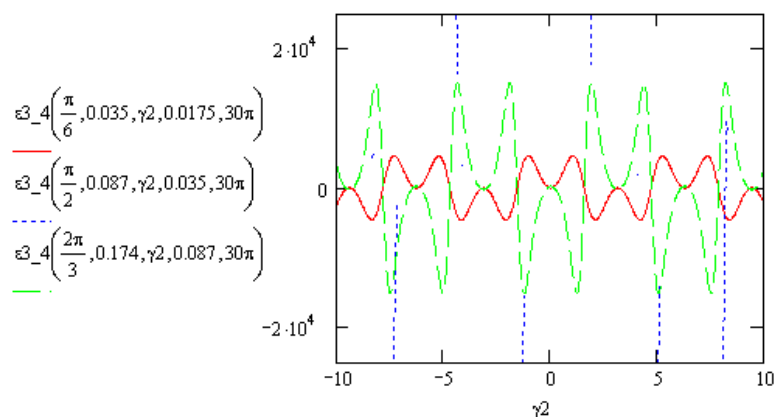


Рис. 4. График зависимости углового ускорения ε_{3_4} в функции угла излома γ_2 при различных значениях угла α : $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}$; угла γ_1 : $\gamma_1 = 0,035; 0,087; 0,174$ рад ($2^\circ; 5^\circ; 10^\circ$) и угла ψ : $\psi = 0,0175; 0,035; 0,087$ рад ($1^\circ; 2^\circ; 5^\circ$)

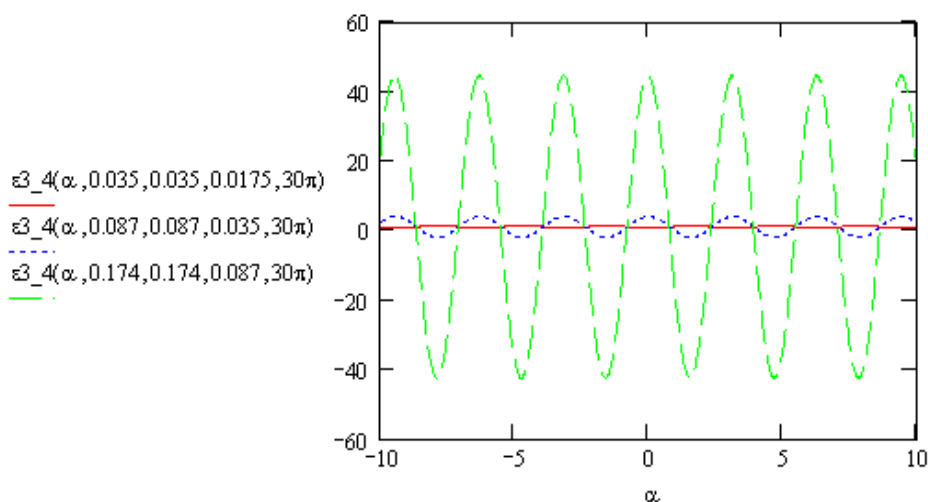


Рис. 5. График зависимости углового ускорения ε_{3_4} в функции угла α при различных значениях угла γ_1 : $\gamma_1 = 0,035; 0,087; 0,174$ рад ($2^\circ; 5^\circ; 10^\circ$); угла γ_2 : $\gamma_2 = 0,035; 0,087; 0,174$ рад ($2^\circ; 5^\circ; 10^\circ$) и угла ψ : $\psi = 0,0175; 0,035; 0,087$ рад ($1^\circ; 2^\circ; 5^\circ$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. Курс теоретической механики. – М.: 1954г. - 379с.
2. Я. Э. Малаховский, А. А. Лапин. Карданные передачи. – М.: Машгиз. - 1962г. - 153с.;
3. Н. Л. Островерхов, И. К. Русецкий, Л. И. Бойко. Динамическая нагруженность трансмиссий колесных машин. – Мн.: Наука и техника. – 1977г. – 191с.;
4. Проектирование универсальных шарниров и ведущих мостов. Пер. с англ. Ю.В. Попова. – Л.: Машиностроение. – 1984. – 463 с.;
5. Л. И. Бойко. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин. – Мн.: ООО «Мэджик Бук». – 2003г. – 239с.;
6. Ю. А. Гурвич, К. И. Сафронов, А. В. Пащенко. Анализ кинематических характеристик карданных передач. – Мн.: БНТУ.