

**ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ ПОДХОД  
В РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ОСНОВАНИЯ.  
ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ. ТЕОРИЯ РАСЧЕТА**

*ЧАСТЬ 1*

*Докт. техн. наук, проф. БОСАКОВ С. В., КОЗУНОВА О. В.*

*Белорусский национальный технический университет,  
Белорусский государственный университет транспорта*

**Состояние проблемы.** Из практики строительства зданий и сооружений известно, что нулевой цикл составляет около 30 % от объемов капитального строительства (на всех стадиях его реализации: от проекта до монтажа надземной части). Фундамент – это связующая часть между сооружением и грунтом, и поэтому он должен без перенапряжения воспринимать все нагрузки, действующие на сооружение, и передавать их на грунт таким образом, чтобы обеспечить сооружению требуемые прочность, жесткость и устойчивость.

Фундаменты большинства инженерных сооружений, опирающиеся на грунт, в последнее время стали рассчитывать как балки, плиты или рамы, лежащие на упругом основании [1], и их работа существенным образом влияет на напряженно-деформированное состояние (НДС) инженерной системы «балка (плита, рама) – основание». Таким образом, рассматривая здание или сооружение как конструкцию, лежащую на упругом основании, можно приблизить его расчет к действительной работе здания или сооружения, т. е. учесть совместную работу надземной и подземной частей рассматриваемых инженерных систем и сделать их надежными, долговечными, экономически выгодными и технически приемлемыми.

Многие методы расчета конструкций, лежащих на упругом основании, имея теоретическую ценность, иногда не вполне пригодны для практики. Поэтому велико значение усовершенствования методов расчета конструкций на

упругом основании, и новый подход к расчету системы «плита – основание», приближенный к реальным условиям, который предлагается в данной работе, имеет важность практического применения.

Обычно рассматривают четыре контактные задачи о расчете конструкции на упругом основании [2]:

- линейно-упругая конструкция на линейно-упругом основании;
- нелинейно-упругая конструкция на линейно-упругом основании;
- линейно-упругая конструкция на нелинейно-упругом основании;
- нелинейно-упругая конструкция на нелинейно-упругом основании.

Наиболее полно разработана первая задача для различных моделей упругого основания. Здесь эффективно работают методы степенных рядов [1, 2], Б. Н. Жемочкина [3, 4], ортогональных многочленов [5]. Значительно хуже в научных исследованиях освещен вопрос о решении второй, третьей и четвертой задач [2, 6].

Подобное состояние объясняется тем, что при учете нелинейности принцип независимости действия сил несправедлив, и приходится либо решать численно совокупность нелинейных дифференциальных уравнений [2], либо пользоваться итерационными подходами [7, 8].

Сложность решения поставленных задач предполагает использование возможностей вычислительной техники. Подробная библио-

графия по исследуемой проблеме имеется в [2, 5]. К сожалению, за прошедшее время сколько-либо значимых научных исследований по этой тематике в отечественной литературе не имеется.

**Выбор модели основания.** В настоящее время в инженерной практике используются механические модели грунтового основания: модель Фусса – Винклера, модели упругого полупространства (УПП) (Г. Вихгард, Г. Э. Проктор), модель упругого слоя (УС) конечной толщины, комбинированные модели и др. [2, 9]. Каждая модель имеет свои преимущества и недостатки. Например, широко распространенная модель Винклера не всегда дает правильные результаты расчета, так как она не учитывает распределительную способность грунтового основания и значение коэффициента постели зависит от размера испытываемого штампа. Модель УПП, наоборот, преувеличивает распределительную способность и приводит к появлению под краями балки физически нереальных бесконечных давлений [2, 9, 10].

Чтобы приблизить результаты расчета к реальности, велось совершенствование моделей УПП по направлению:

а) снижения их распределительной способности

- модель УС конечной толщины (К. Е. Егоров и др.);

- двухпараметрическая модель, описывающая основание с помощью двух коэффициентов постели, зависящих от сжатия и сдвига (М. М. Филоненко-Бородич, П. Л. Пастернак, В. З. Власов);

- модель с увеличивающимся по глубине модулем деформации (Г. К. Клейн) [11];

б) снятия краевых бесконечностей – комбинированная модель (винклеровский слой на УПП) (И. Я. Штаерман) [10].

Выбор модели упругого основания зависит от интуиции инженера-проектировщика и представляет собой довольно сложную задачу. Модель упругого основания предлагается при постановке задачи и физически обосновывается в ходе расчета. СНБ 5.01.01–99 [12] рекомендует «отклонения расчетных моделей от реальных условий учитывать коэффициентами условий работы. Указанные коэффициенты устанавливаются на основании теоретических и экспери-

ментальных данных о действительной работе грунтов и материалов фундаментов в условиях воздействия и эксплуатации зданий и сооружений» (п. 4.19).

Поэтому в силу природных особенностей грунтов как сплошных неоднородных сред при расчете конструкций, размещенных на упругом основании, первостепенным вопросом является выбор такой модели основания, которая достаточно точно описывала НДС этого основания и приближала его к реальным условиям.

В настоящей работе предлагается модель нелинейно-упругого неоднородного основания. Модуль деформации основания  $E_0$  зависит от интенсивности деформаций, изменяется функционально в неявном виде. Коэффициент Пуассона  $\nu_0$  принимается постоянным, так как его влияние на характеристику деформационных свойств грунта менее значительно.

**Выбор методов расчета.** Как сказано выше, существующие методы расчета оснований и балочных плит базируются на использовании теории линейно деформируемых тел. В реальных условиях для неоднородных грунтов зависимость между нагрузкой и осадкой имеет явно нелинейный характер.

В работе авторы исследуют основания с ярко выраженными неоднородными свойствами, так называемые слоистые основания. Грунты рассматриваются послойно как нелинейно деформируемая однородная среда, подчиняющаяся при нагружении общим закономерностям теории малых упругопластических деформаций, разработанной А. А. Ильиным, В. В. Соколовским, Г. М. Смирновым-Аляевым и др. [13].

Класс решаемых нелинейных задач может быть значительно расширен, если воспользоваться предложенным Е. Ф. Винокуровым [7, 8] итерационным методом расчета оснований и фундаментов. В этом случае уравнения с частными производными заменяются системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые в дальнейшем решаются численно с помощью математических пакетов ЭВМ.

Авторы предлагают вариационно-разностный подход для решения контактной задачи теории упругости (ТУ) в нелинейной постановке (плоская деформация). С использованием вариационного подхода ранее было получено ре-

шение контактной задачи для круглой пластинки на УПП [14], затем решение контактной задачи для стержня на УПП [15]. В [16] также вариационным методом решены контактные задачи в традиционной постановке [2], т. е. в контактной зоне не учитываются касательные напряжения.

В силу нелинейности решаемой задачи теории упругости авторами используется метод упругих решений в области малых упругопластических деформаций, численная реализация которого осуществляется с помощью метода конечных разностей (МКР) и программного пакета МАТНЕМАТИСА 6.0.

**Постановка задачи.** Рассматривается линейно-упругая балочная плита на упругом физически нелинейном двухслойном основании (рис. 1) под действием произвольной нагрузки  $q(x)$ ,  $P$ . Параметры плиты: ширина  $2l$ , высота  $h$ , изгибная жесткость  $EJ$ .

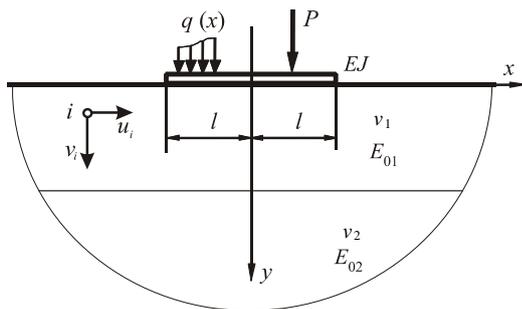


Рис. 1. Балочная плита на упругом слоистом основании

При расчете слоистая упругая среда заменяется прямоугольной расчетной областью (рис. 2), размеры которой: по оси  $X$  – ширина  $2R_0 = 10l$ ; по оси  $Y$  – глубина  $H_0 = 4l$ , где  $H_0 = H_{01} + H_{02}$ ;  $H_{01} = H_{02} = 2l$ . Будем считать, что на контакте плиты с упругим основанием возникают только нормальные реактивные давления, силами трения пренебрегаем. Для плиты справедливы гипотезы теории изгиба.

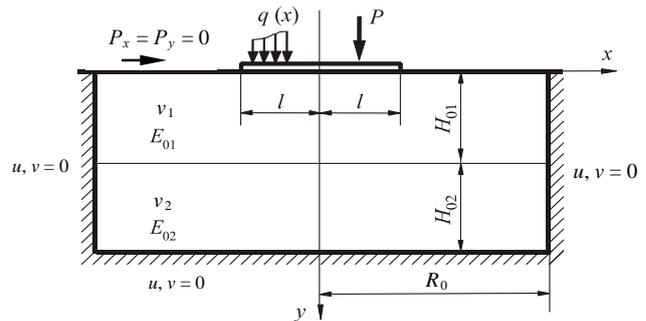


Рис. 2. Расчетная область. Граничные условия задачи

Основание аппроксимируется симметричной разбивочной сеткой (рис. 3) конечных размеров ( $29 \times 7$ ) с постоянным шагом по осям:  $X$  –  $\Delta x$ ;  $Y$  –  $\Delta y$ . В результате получено 203  $i$ -х узловых точек (135 – внутренних, 41 – контурная и 27 – поверхностных) и 168  $j$ -х сеточных ячеек. Первые 84 ячейки (1–84-я) принадлежат верхнему упругому слою, вторые 84 ячейки (85–168-я) – нижнему.

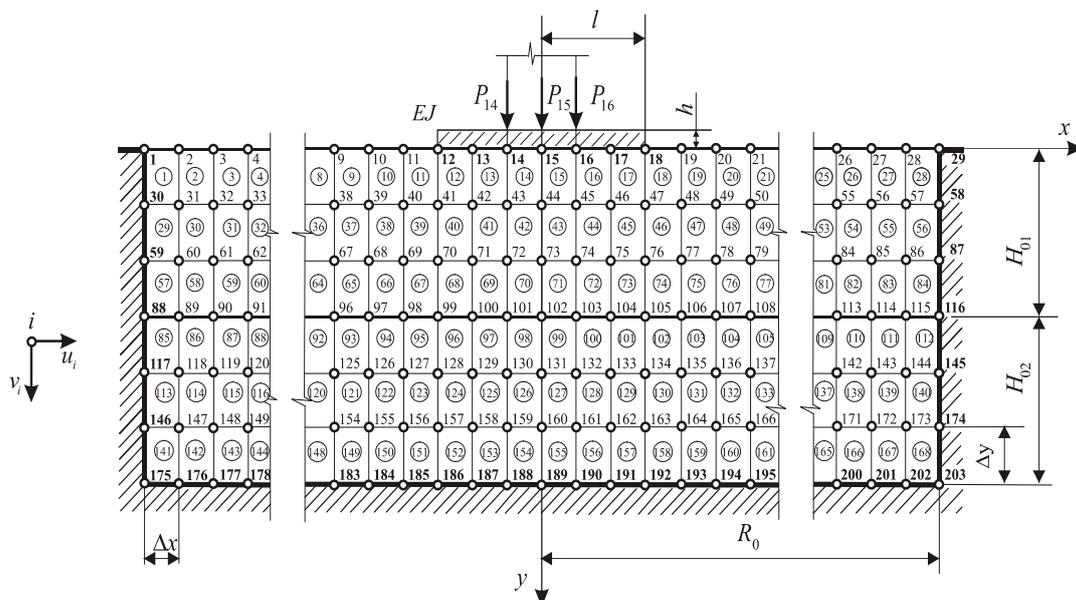


Рис. 3. Разбивочная сетка расчетной области

В свою очередь, 12–18-я точки являются контактными, т. е. одновременно точками основания и плиты. В 14-, 15-, 16-й точках внешняя нагрузка на плиту  $q(x)$  заменяется сосредоточенными силами  $P_i(x) = P_{14}, P_{15}, P_{16}$ . С учетом симметрии расчетной модели «плита – основание» в дальнейший расчет вводим значения сил  $P_{14} = P_{16} = P; P_{15} = 2P$ .

За неизвестные принимаем:  $u_i(x), v_i(y)$  – компоненты вектора перемещения  $i$ -й узловой точки основания, направленные вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно;  $p_y^{(i)}(x, y)$  – реактивные давления в зоне контакта балочной плиты с основанием.

Граничные условия задачи: на границах принятой расчетной области перемещения в направлениях осей  $X$  и  $Y$  принимаются равными нулю  $u = 0, v = 0$  (рис. 2); в контактной зоне справедливо равенство осадок основания  $v_i$  прогибам плиты

$$v_i = y_k, \tag{1}$$

где  $y_k$  – прогиб плиты в  $k$ -м сечении.

Требуется определить перемещения, напряжения в упругом основании и его осадки, распределение реактивных давлений в контактной зоне балочной плиты с основанием, внутренние усилия в сечениях плиты.

**Алгоритм расчета в нелинейной постановке.** Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций (рис. 4) для нелинейного упругого неоднородного основания будем определять по формуле [17]

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{yk} \operatorname{th} \left( \frac{E_{0k}}{\sigma_{yk}} \varepsilon_i^{(k)} \right), \tag{2}$$

где  $\sigma_{yk}, E_{0k}$  – предел текучести и начальный модуль деформации  $k$ -го слоя основания;  $\varepsilon_i^{(k)}$  – интенсивность деформаций в точке  $K$  упругого основания; для плоской задачи имеется следующее выражение [13]:

$$\varepsilon_i^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{(\varepsilon_x^{(k)} - \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^{(k)})^2}, \tag{3}$$

в свою очередь деформации  $\varepsilon_x^{(k)}, \varepsilon_y^{(k)}, \gamma_{xy}^{(k)}$  определяются из соотношений Коши [13]:

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^{(k)} = \frac{\partial v_k}{\partial y}; \quad \gamma_{xy}^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x}. \tag{4}$$

Если основание неоднородно, то для каждого из упругих слоев зависимости (3), (4) сохраняются, но будут иметь соответствующие каждому слою значения  $\sigma_{yk}, E_{0k}$  в формуле (2). Аналогично модулю деформации  $E_{0k}$  коэффициент Пуассона  $\nu_k$  различен для упругих слоев, но в пределах одного слоя остается постоянным.

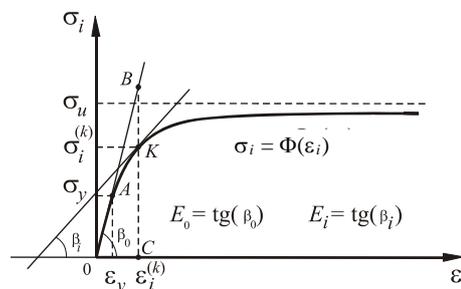


Рис. 4. Зависимость  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  для упругого слоя основания

В ходе решения краевых задач теория малых упругопластических деформаций [13] предполагает итерационный процесс. При каждой итерации модуль деформации в  $i$ -й точке основания изменяется, и при вычислениях авторы будут пользоваться касательным модулем деформации, который в соответствии с (2) составляет

$$E_i^{(n)} = \operatorname{tg} \beta_i = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{E_{0i}}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{E_{0i}}{\sigma_{yi}} \varepsilon_i^{(n-1)} \right)}, \tag{5}$$

где  $n$  – номер последующей итерации с учетом того, что в первом приближении  $n = 1$ . То есть авторы отождествляют, как это принято в теории малых упругопластических деформаций [13], зависимость  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  и  $(\varepsilon_i)$  при простом сжатии.

Согласно вариационному принципу Лагранжа [13] при нагружении плиты на упругом

основании статической нагрузкой ее полная потенциальная энергия в состоянии равновесия принимает минимальное значение. Величина функционала полной потенциальной энергии плиты на упругом основании [16] состоит из трех слагаемых: функционала энергии деформаций упругого основания, функционала энергии деформаций плиты и потенциала работы внешней нагрузки. Отметим, что энергию деформаций плиты обычно отождествляют с энергией изгиба плиты, пренебрегая деформациями сдвига.

Для решения сформулированной краевой задачи в нелинейной постановке авторы используют слагаемые функционала полной энергии в виде [13]:

а) функционала энергии деформаций упругого основания

$$U_f = \iint_S \left[ \frac{E_k v_k}{2(1+v_k)(1-2v_k)} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + \frac{E_k}{2(1+v_k)} ((\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2) + \frac{E_k}{4(1+v_k)} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \right] dS, \quad (6)$$

где  $E_k, v_k$  – упругие постоянные в точке  $k$  основания;

в) функционала энергии изгиба плиты

$$\Omega_b = \frac{1}{2} EJ \int_{-l}^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx; \quad (7)$$

г) потенциала работы внешней нагрузки

$$\Pi = - \int_{-l}^l q(x) y(x) dx. \quad (8)$$

Таким образом, величина функционала полной энергии расчетной модели «плита – основание» определяется по формуле

$$\mathcal{E} = U_f + \Omega_b + \Pi, \quad (9)$$

где каждое из слагаемых справа определяется соотношениями (6)–(8).

При составлении функционала энергии деформаций (6) авторы не учитывают работу сил собственного веса упругого основания. Дело в том, что силы собственного веса упругого

основания уравновешены начальным напряженным состоянием уже в упругом основании, а работа самоуравновешенной системы сил на малых возможных перемещениях равна нулю.

Это означает, что при поиске полного напряженного состояния рассматриваемой задачи необходимо на полученное авторами решение наложить напряженное состояние от сил собственного веса основания.

Так как в состоянии статического равновесия функционал полной энергии  $\mathcal{E}$  должен иметь минимум, то неизвестные перемещения  $u_i(x), v_i(y)$  найдем из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из перемещений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (10)$$

где  $N$  – число узловых точек основания.

В результате получаем систему дифференциальных уравнений, порядок которой равен  $2N$ , т. е. числу неизвестных перемещений.

**Алгоритм расчета с применением МКР.**

Решение краевой задачи строится в перемещениях и реализуется методом конечных разностей (МКР), т. е. заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными соотношениями.

При решении поставленной задачи энергия деформации подсчитывается для каждой ячейки МКР, а затем суммируется по объему упругого основания. Однако запись функционала полной энергии (9) отличается от традиционной и подобна принятой в [2].

Рассмотрим прямоугольную ячейку метода конечных разностей (рис. 5). Запишем выражения для деформаций  $\varepsilon_x^{(k)}, \varepsilon_y^{(k)}, \gamma_{xy}^{(k)}$  в точке  $k$  как среднее арифметическое деформаций в вершинах прямоугольника  $abcd$ , а именно:

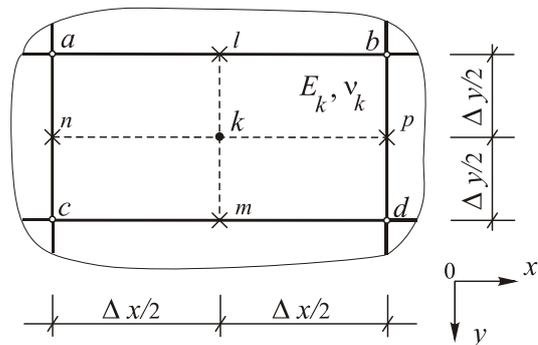


Рис. 5. Прямоугольная ячейка метода конечных разностей

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial x} = \left( \frac{u_b + u_d}{2} - \frac{u_a + u_c}{2} \right) \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta x}; \\ \varepsilon_y^{(k)} &= \frac{\partial v_k}{\partial y} = \left( \frac{v_c + v_d}{2} - \frac{v_a + v_b}{2} \right) \frac{1}{\Delta y} = \\ &= \frac{v_c + v_d - v_a - v_b}{2\Delta y}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \left( \frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_a + u_b}{2} \right) \frac{1}{\Delta y} + \\ &+ \left( \frac{v_b + v_d}{2} - \frac{v_a + v_c}{2} \right) \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_c + u_d - u_a - u_b}{2\Delta y} + \frac{v_b + v_d - v_a - v_c}{2\Delta x}. \end{aligned}$$

Энергия деформаций прямоугольной ячейки размерами  $(\Delta x \times \Delta y)$  с центром в точке  $k$  согласно формуле (6) усредненно составит

$$U_{i,j}^{(k)} = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \left[ \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \right] \Delta x \Delta y, \quad (12)$$

где  $E_k, \nu_k$  – упругие постоянные в центре ячейки основания;  $i, j$  – номер узловой точки вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

Энергия деформаций упругого основания получается суммированием по объему основания энергий деформаций прямоугольных участков, определяемых по (9), и с учетом (8) выражается в конечно-разностной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} U_f &= \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} U_{i,j}^{(k)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{MY-1} \times \\ &\times \left( \sum_{i=1}^{NX-1} \left[ \frac{E_k}{1 + \nu_k} \left[ \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \right. \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) \right)^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left. \left( \frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\Delta y} (u_c + u_d - u_a - u_b) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2\Delta x} (v_b + v_d - v_a - v_c) \right)^2 \right] \Delta x \Delta y \Bigg), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $NX$  – число узлов по оси  $X$  ( $NX = 29$ );  $MY$  – число узлов по оси  $Y$  ( $MY = 7$ ).

Энергию изгиба балочной плиты в контактной зоне с основанием также запишем в конечно-разностном виде

$$\Omega_b = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1+1}^{K1-1} EJ_{i=1+1} \left( \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} \right)^2, \quad (14)$$

где  $EJ_{i=1+1}$  – изгибная жесткость балочной плиты;  $1$  – номер узла начала плиты ( $1 = 12$ );  $K1$  – номер узла конца плиты ( $K1 = 18$ ).

Преобразуем потенциал работы внешних сил (7) в разностную сумму

$$\Pi = - \sum_{i=1+1}^{K1-1} q_i(x) v_i \Delta x, \quad (15)$$

где  $q_i(x)$  – внешняя нагрузка, действующая на плиту в области  $i$ -й контактной точки.

После подстановки (13)–(15) в (9) получаем полную энергию  $\mathcal{E}$  принятой расчетной модели «плита – основание». В силу минимума функционала полной энергии в состоянии статического равновесия согласно (10) получаем СЛАУ следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} = 0; \quad i = 1, NX \cdot MY. \end{cases} \quad (16)$$

После составления матрицы (16), исходя из кинематических граничных условий, делаем обнуление перемещений контурных узлов.

Решение системы уравнений (16) позволяет найти неизвестные компоненты вектора перемещений  $u_i(x), v_i(y)$ . Зная перемещения, со-

гласно условию (1) определяем прогибы балочной плиты  $y_k$ , соответствующие осадкам основания  $v_i$  под плитой, а также вертикальные напряжения упругого основания и реактивные давления в контактной зоне «плита – основание». По прогибам балочной плиты определяем внутренние усилия в ее сечениях.

**Вертикальные нормальные напряжения упругого основания.** Отметим, что многочисленные экспериментальные и теоретические исследования в области упругого основания [2, 9, 10, 18] показывают: под фундаментной плитой и в ее окрестностях напряженно-деформированное состояние грунта неравномерное и находится в зависимости от характера нагрузки и ее расположения, жесткости и длины плиты, а также от характеристик грунта.

Вертикальные напряжения упругого основания  $\sigma_y^{(k)}$  определяем из обобщенного закона Гука для каждой ячейки основания (рис. 5) в предположении однородности основания в области ячейки

$$\sigma_y^{(k)} = \frac{E_k v_k}{(1 - 2\nu_k)(1 + \nu_k)} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)}) + \frac{E_k}{1 + \nu_k} (\varepsilon_y^{(k)}). \quad (17)$$

Используя выражения (11), получаем уравнения (17) в конечно-разностном виде

$$\sigma_y^{(k)} = \frac{E_k}{1 + \nu_k} \left[ \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right) + \frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right]. \quad (18)$$

По найденным перемещениям  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$  с помощью (18) определяем вертикальное напряжение  $\sigma_y^{(k)}$ , возникающее в центре  $k$ -й ячейки основания.

**Реактивные давления в контактной зоне балочной плиты с основанием** (точки 12–18 основания) определяем по прогибам плиты  $y_k$  (рис. 6). При этом используем известную дифференциальную зависимость

$$p_y^{(i)} - q_k(x) = -EJ \frac{d^4 y_k}{dx^4}, \quad (19)$$

где  $p_y^{(i)}$  – реактивное давление в  $i$ -й контактной точке основания;  $q_k(x)$  – внешняя нагрузка, действующая на плиту в области  $k$ -го сечения плиты,  $q_k(x) = q_i(x)$ .

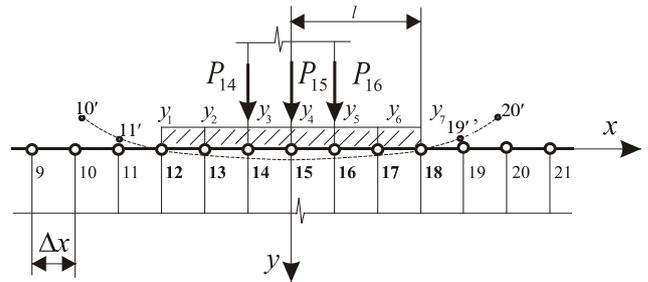


Рис. 6. К определению реактивных давлений в зоне контакта балочной плиты с основанием и внутренних усилий в плите

Для крайних точек  $k$  балочной плиты вводятся статические граничные условия:

$$\begin{aligned} Q^{(k)} \Big|_{x=\pm l} &= -EJ \frac{d^3 y_k}{dx^3} = 0; \\ M^{(k)} \Big|_{x=\pm l} &= -EJ \frac{d^2 y_k}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для каждой контактной точки запишем выражение (19) в конечно-разностном виде с учетом условия (1):

- точка 12 ( $q_1(x) = 0$ )

$$\begin{aligned} p_y^{(12)} &= -EJ \frac{d^4 y_1}{dx^4} = \\ &= -EJ \frac{v_{10'} - 4v_{11'} + 6v_{12} - 4v_{13} + v_{14}}{\Delta x^4}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $v_{10'}$ ,  $v_{11'}$  – перемещения законтурных точек 10' и 11', которые с учетом граничных условий (20) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} v_{11'} &= 2v_{12} - v_{13}; \\ v_{10'} &= 2v_{11'} - 2v_{13} + v_{14} = 4v_{12} - 4v_{13} + v_{14}. \end{aligned} \quad (22)$$

После подстановки (22) в (21) получаем:

$$p_y^{(12)} = -EJ \frac{2v_{12} - 4v_{13} + 2v_{14}}{\Delta x^4}; \quad (23)$$

- точка 13 ( $q_2(x) = 0$ )

$$p_y^{(13)} = -EJ \frac{-2v_{12} + 5v_{13} - 4v_{14} + v_{15}}{\Delta x^4}; \quad (24)$$

- точка 14  $\left( q_3(x) = \frac{P_{14}}{\Delta x} \right)$

$$p_y^{(14)} = q_3(x) - EJ \frac{v_{12} - 4v_{13} + 6v_{14} - 4v_{15} + v_{16}}{\Delta x^4}; \quad (25)$$

- точка 15  $\left( q_4(x) = \frac{P_{15}}{\Delta x} \right)$

$$p_y^{(15)} = q_4(x) - EJ \frac{v_{13} - 4v_{14} + 6v_{15} - 4v_{16} + v_{17}}{\Delta x^4}. \quad (26)$$

В силу симметрии принятой расчетной модели «плита – основание» напряжения в точках 16, 17, 18 определяются аналогично напряжениям в точках 14, 13, 12 в соответствии с формулами (25), (24) и (23). В результате получаем:

- точка 16  $\left( q_5(x) = \frac{P_{16}}{\Delta x} \right)$

$$p_y^{(16)} = q_5(x) - EJ \frac{v_{14} - 4v_{15} + 6v_{16} - 4v_{17} + v_{18}}{\Delta x^4};$$

- точка 17 ( $q_6(x) = 0$ )

$$p_y^{(17)} = -EJ \frac{v_{15} - 4v_{16} + 5v_{17} - 2v_{18}}{\Delta x^4}; \quad (27)$$

- точка 18 ( $q_7(x) = 0$ )

$$p_y^{(18)} = -EJ \frac{2v_{16} - 4v_{17} + 2v_{18}}{\Delta x^4}.$$

По формулам (23)–(27) получаем значения реактивных давлений  $p_y^{(i)}$ , по которым строим эпюру  $p_y^{(i)}$  в контактной зоне.

**Внутренние усилия в сечениях плиты.** По перемещениям  $v_i(y)$  с учетом условия (1) определяем поперечную силу  $Q^{(k)}$  и изгибающий момент  $M^{(k)}$  в  $k$ -м сечении плиты (точки 12–18 основания). При этом используем известные дифференциальные зависимости:

$$Q^{(k)} = -EJ \frac{d^3 y_k}{dx^3} \pm q_k(x) \Delta x_k; \quad M^{(k)} = -EJ \frac{d^2 y_k}{dx^2}, \quad (28)$$

где  $\Delta x_k$  – участок плиты под действием внешней нагрузки  $q_k(x)$ ; знак «+» – для левых сече-

ний плиты, знак «-» – для правых сечений плиты. В ненагруженных точках плиты  $q_k(x) = 0$ . В контактных точках основания нагрузка  $q_k(x)$  заменяется сосредоточенной силой  $P_i(x)$ .

В точках приложения силы  $P_i(x)$  поперечная сила  $Q^{(k)}$  имеет два значения  $Q_{left}^{(k)}$  (без учета силы) и  $Q_{right}^{(k)}$  (с учетом силы) и определяется следующим образом:

- для левых сечений плиты:

$$Q_{left}^{(k)} = Q^{(k)}; \quad Q_{right}^{(k)} = Q^{(k)} - P_i(x);$$

- для правых сечений плиты:

$$Q_{right}^{(k)} = Q^{(k)}; \quad Q_{left}^{(k)} = Q^{(k)} + P_i(x). \quad (29)$$

Для крайних контактных точек справедливы условия (20), поэтому в точке 12 ( $k = 1$ ) и точке 18 ( $k = 7$ ):

$$Q^{(1)} = Q^{(7)} = 0; \quad M^{(1)} = M^{(7)} = 0. \quad (30)$$

Для внутренних контактных точек ( $i = 13$ –17), соответствующих сечениям плиты ( $k = 2$ –6), запишем выражения (28) в конечно-разностном виде:

$$Q^{(k)} = -EJ_{i=I+1} \frac{-v_{i-2} + 2v_{i-1} - 2v_{i+1} + v_{i+2}}{2\Delta x^3} \pm q_k(x) \Delta x_k;$$

$$M^{(k)} = -EJ_{i=I+1} \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta x^2}, \quad (31)$$

где  $EJ_{i=I+1}$  – изгибная жесткость балочной плиты;  $I$  – номер узла начала плиты ( $I = 12$ ).

Используя (31) и с учетом (20) и (29) получаем следующие выражения:

- поперечных сил:

$$Q^{(2)} = -EJ \frac{v_{13} - 2v_{14} + v_{15}}{2\Delta x^3};$$

$$Q_{left}^{(3)} = -EJ \frac{-v_{12} + 2v_{13} - 2v_{15} + v_{16}}{2\Delta x^3} + q_3(x) \cdot 0,5\Delta x,$$

$$Q_{right}^{(3)} = Q_{left}^{(3)} - P_{14};$$

$$Q_{left}^{(4)} = -EJ \frac{-v_{13} + 2v_{14} - 2v_{16} + v_{17}}{2\Delta x^3} + q_4(x) \cdot 0,5\Delta x,$$

$$Q_{right}^{(4)} = Q_{left}^{(4)} - P_{15}; \quad (32)$$

$$Q_{right}^{(5)} = -EJ \frac{-v_{14} + 2v_{15} - 2v_{17} + v_{18}}{2\Delta x^3} - q_5(x) \cdot 0,5\Delta x,$$

$$Q_{left}^{(5)} = Q_{right}^{(5)} + P_{16};$$

$$Q^{(6)} = -EJ \frac{-v_{15} + 2v_{16} - v_{17}}{\Delta x^3};$$

• изгибающих моментов:

$$M^{(2)} = -EJ \frac{v_{12} - 2v_{13} + v_{14}}{\Delta x^2};$$

$$M^{(3)} = -EJ \frac{v_{13} - 2v_{14} + v_{15}}{\Delta x^2};$$

$$M^{(4)} = -EJ \frac{v_{14} - 2v_{15} + v_{16}}{\Delta x^2};$$

$$M^{(5)} = -EJ \frac{v_{15} - 2v_{16} + v_{17}}{\Delta x^2};$$

$$M^{(6)} = -EJ \frac{v_{16} - 2v_{17} + v_{18}}{\Delta x^2}. \quad (33)$$

По результатам расчетов (32), (33) с учетом (30) строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях плиты.

### ВЫВОДЫ

Предложен новый эффективный итерационный подход для расчета балок и плит на нелинейно-упругом неоднородном основании. Он основывается на свойстве минимума функционала полной энергии системы «плита – основание». Этот подход позволяет полностью найти НДС основания, внутренние усилия и осадки плиты.

В связи с применением математического программного пакета при решении контактной задачи установлено, что конечно-разностные аппроксимации предпочтительнее сочетать именно с вариационной постановкой задачи. Это позволяет удобно алгоритмизировать все этапы расчета, избежать вывода дифференциальных уравнений в сложных случаях, упрощает формулировку граничных условий.

Преимущество вариационно-разностного подхода состоит в том, что статические граничные условия выполняются автоматически при решении уравнений на границах области того же вида, что и внутри области. Различие разностных уравнений внутри области и на ее границе является одной из главных причин неустойчивости МКР. Кроме того, в получающемся решении компоненты перемещения изменяются от узла к узлу монотонно, без «гармошки», характерной для МКР.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Симвулиди, И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. – М.: Высш. шк., 1973. – 480 с.
2. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
3. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – М.: Стройиздат, 1962. – 262 с.
4. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 127 с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 492 с.
6. Сеницын, А. П. Расчет балок и плит на упругом основании за пределом упругости / А. П. Сеницын. – М.: Стройиздат, 1974. – 174 с.
7. Винокуров, Е. Ф. Итерационный метод расчета оснований и фундаментов / Е. Ф. Винокуров // Строительство и архитектура Белоруссии. – 1970. – № 1. – С. 31–34.
8. Винокуров, Е. Ф. Итерационный метод расчета балок и плит, лежащих на линейно- и нелинейно-деформируемом анизотропном основании / Е. Ф. Винокуров // Строительство и архитектура Белоруссии. – 1970. – № 3. – С. 26–28.
9. Тарасевич, А. Н. Изгиб самонапряженных плит на упругом основании: дис. ... канд. техн. наук / А. Н. Тарасевич. – Брест: БГТУ, 2001. – 125 с.
10. Федоровский, В. Г. Прогноз осадок фундаментов мелко заложения и выбор модели основания для расчета плит / В. Г. Федоровский, С. Г. Безволев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2000. – № 4. – С. 10–18.
11. Клейн, Г. К. Учет возрастания модуля деформации с увеличением глубины при расчете балок на сплошном основании / Г. К. Клейн, А. Е. Дураев // Гидротехническое строительство. – 1971. – № 7. – С. 19–21.
12. Основания и фундаменты зданий и сооружений: СНБ 5.01.01–99. – Минск: Мин-во арх. и стр-ва РБ, 1999. – 36 с.
13. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высш. шк., 1990. – 398 с.
14. Selvadurai, A. P. S. The interaction between a uniformly loaded circular plate and a isotropic elastic halfspace: a variational approach // A. P. S. Selvadurai, J. Struct – Mech. – 1979. – V. 7(3). – P. 231–246.
15. Босаков, С. В. Вариационный подход к решению контактной задачи для упругой полуплоскости / С. В. Босаков // Прикладная механика и техническая физика. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 70–73.
16. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест: БрГУ, 2006. – 107 с.
17. Босаков, С. В. Расчет балки на упругой физической нелинейной полуплоскости / С. В. Босаков, О. В. Машкова (Козунова) // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь. – Гомель: БелГУТ, 2005. – С. 40–43.
18. Федоровский, В. Г. Жесткий штамп на нелинейно-деформируемом связанном основании (плоская задача) / В. Г. Федоровский, С. Е. Кагановская // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1975. – № 1. – С. 41–44.

Поступила 09.09.2008