УДК 517.44

ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ГИЛЬБЕРТА В БАЗИСЕ КОЙФЛЕТОВ

Дейцева А.Г.
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь,
a.deytseva@gmail.com

На основании исследований И. Добеши [1, 2] в работах [3, 4] Д. Бейлкин, Р. Койфман и В. Рохлин получили вейвлет-представления некоторых операторов (дифференциальных операторов, оператора Гильберта, оператора сдвига и др.) и установили их свойства в базисе вейвлетов Добеши. В дальнейшем, полученные результаты были использованы для разработки алгоритмов нахождения численного решения некоторых дифференциальных и интегральных уравнений [5, 6].

В работах [7, 8] было показано, что вейвлет-представление оператора дифференцирования в базисе койфлетов обладает рядом преимуществ, что позволило получить формулы численного дифференцирования и оценить их погрешность. Настоящая работа посвящена аппроксимации оператора Гильберта в базисе койфлетов.

Пусть $\{V_j, j\in \mathrm{Z}\}$ – КМА пространства $L_2(\mathrm{R})$ порожденный масштабирующей функцией Койфмана [1, 2] $\varphi\in L_2(\mathrm{R})$ порядка $L=2K$, $K\in\mathbf{N}$, $\psi\in L_2(\mathrm{R})$ – соответствующий койфлет. При этом функции φ и ψ непрерывны и обладают следующими свойствами (см. [2]):

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{k=-L}^{2L-1} h_k\varphi(2x-k)\,, \tag{1}$$

$$\int_{\mathrm{R}}\varphi(x)\,dx=1\,,\ \int_{\mathrm{R}}x^l\varphi(x)\,dx=0\,,\ l=\overline{1,L-1},\ \operatorname{supp}\varphi\subseteq[-L,2L-1]\,, \tag{2}$$

$$\int_{\mathrm{R}}x^l\psi(x)\,dx=0\,,\ l=\overline{0,L-1},\ \operatorname{supp}\psi\subseteq[-2L+1,L]\,. \tag{3}$$

Равенство (1) называют уточняющим равенством для масштабирующей функции φ. Функции φ и ψ, обладающие свойствами (2) и (3), являются наиболее известными и используемыми в различных математических пакетах (Wavelet Explorer системы Mathematica, Wavelet Toolbox системы Matlab и др. [9, 10]).

Согласно концепции КМА произвольная функция $f\in L_2(\mathrm{R})$ может быть представлена как предел последовательных приближений (проекций) $P_j f\in V_j$, $j\in\mathrm{Z}$, определенных следующим образом:

$$P_j f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_{jk}\,\varphi_{jk}(x)\,,\ x\in\mathrm{R}\,,\ j\in\mathrm{Z}\,,$$

$$\alpha_{jk}=\int_{\mathrm{R}} f(x)\varphi_{jk}(x)\,dx\,,\ j,k\in\mathrm{Z}\,,$$

где система функций

$$\varphi_{jk}(x)=2^{j/2}\varphi(2^j x-k)\,,\ x\in\mathrm{R}\,,\ j,k\in\mathrm{Z}\,,$$

образует ортонормированный базис масштабирующего пространства V_j.

Пусть $f\in L_2(\mathrm{R})$, ее преобразование Гильберта определяется соотношением

$$(H\ f)(x)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{\mathbf{R}}\frac{f(s)}{s-x}ds\,.$$

Тогда в силу линейности оператора H имеем

$$(H\,P_j f)(x)=2^{j/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_{jk}(H\varphi)(2^j x-k)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_{jk}(H\varphi)_{jk}(x)\,.$$

Определим оператор $H_j : L_2(\mathrm{R}) \to V_j$, $j \in \mathrm{Z}$:

$$H_j f = P_j H P_j f .$$

Имеем

$$\left(H_j f\right)(x) = \sum_{k' \in \mathbf{Z}} \alpha_{jk'}^H \varphi_{jk'}(x),$$

где

$$\alpha_{jk'}^H = \left\langle HP_j f, \varphi_{jk'} \right\rangle = \int_{\mathbf{R}} \sum_{k' \in \mathbf{Z}} \alpha_{jk} \left(H\varphi\right)_{jk}(x) \varphi_{jk'}(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} \sum_{k' \in \mathbf{Z}} \alpha_{jk}\ 2^{j/2} H\varphi(2^j x - k)\ 2^{j/2} \varphi(2^j x - k')\, dx .$$

Полагая $2^j x - k = y$, получим

$$\alpha_{jk'}^H = \int_{\mathbf{R}} \sum_{k' \in \mathbf{Z}} \alpha_{jk}\ H\varphi(y)\ \varphi(y + k - k')\, dy = \sum_{k' \in \mathbf{Z}} \alpha_{jk} \int_{\mathbf{R}} H\varphi(y)\ \varphi(y + k - k')\, dy = \sum_{k' \in \mathbf{Z}} \alpha_{jk}\ r_{k'-k}^H ,$$

где

$$r_m^H = \int_{\mathbf{R}} H\varphi(y)\ \varphi(y - m)\, dy,\ \ m \in \mathrm{Z} . \qquad (4)$$

Следовательно, кратно-масштабный оператор H_j можно задать соотношением

$$\left(H_j f\right)(x) = \sum_{k' \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_{jk} r_{k'-k}^H \varphi_{jk'}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \alpha_{j,k-m} r_m^H \varphi_{jk}(x) .$$

Можно показано, что для достаточно гладкой функции $f \in L_2(\mathrm{R})$ последовательность $\left\{H_j f\right\}_{j \in \mathbf{Z}}$ сходится при $j \to +\infty$ к преобразованию Гильберта функции f. Числа (4) будем называть *коэффициентами оператора Гильберта в базисе койфлетов*.

Поскольку масштабирующая функция Койфмана не имеет аналитического задания, непосредственное вычисление коэффициентов оператора Гильберта по формулам (4) невозможно. В следующей теореме установлены свойства этих коэффициентов, позволяющие рекуррентным образом найти коэффициенты r_l^H не используя соотношения (4).

Теорема. *Пусть φ – масштабирующая функция Койфмана порядка $L = 2K$, $K \in \mathbf{N}$, и интеграл (4) существует. Тогда коэффициенты r_m^H, определяемые соотношениями (4), удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений*

$$r_m^H = r_{2m}^H + \sum_{l=1}^{3K} a_{2l-1}\left(r_{2m+2l-1}^H + r_{2m+2l-1}^H\right),\ \ m \in \mathbf{Z}, \qquad (5)$$

где коэффициенты a_l вычисляются по формуле

$$a_l = \sum_{k=-L}^{2L-1-l} h_k h_{k+l}\ ,\ \ l = \overline{1, 3L-1},$$

коэффициенты h_k, $k = \overline{-L, 2L-1}$, удовлетворяют уточняющему равенству (1).

Используя формулу Планшереля, получим

$$r_m^H = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 \sin \xi m\, d\xi .$$

Из последнего равенства следует, что

$$r_m^H = -r_{-m}^H,\ \ m \in \mathbf{N} . \qquad (6)$$

Из свойства преобразования Гильберта

$$\int_{\mathrm{R}} f(x) Hf(x) dx = 0$$

заключаем

$$r_0^H = 0 . \tag{7}$$

Также, учитывая (3), можно показать, что для достаточно больших $m \in \mathbf{N}$

$$r_m^H \approx -\frac{1}{\pi m} . \tag{8}$$

Решая систему (5), при асимптотических условиях (7), (8) коэффициенты оператора Гильберта могут быть получены с любой требуемой точностью.

Пример. В таблице приведены значения для коэффициентов r_m^H для масштабирующей функции Койфмана второго порядка, вычисленные с использованием стандартных возможностей пакета Wavelet Toolbox системы Matlab [10]. При $m > 18$ коэффициенты r_m^H вычисляются по формуле (8).

Таблица – Коэффициенты преобразования Гильберта r_m^H, $m = \overline{1{,}18}$ для масштабирующей функции Койфмана второго порядка

m	r_m^H	m	r_m^H
1	-0.5222774	10	-0.0318301
2	-0.1372950	11	-0.0289368
3	-0.1059688	12	-0.0265255
4	-0.0794859	13	-0.0244852
5	-0.0636326	14	-0.0227363
6	-0.0530401	15	-0.0212206
7	-0.0454676	16	-0.0198943
8	-0.0397860	17	-0.0187241
9	-0.0353663	18	-0.0176838

1. Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets / I. Daubechies // Comm. Pure Appl. Math. – 1988. – Vol. 46. – P. 909–996.
2. Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets II. Variation on a them / I. Daubechies // SIAM J. Math. Anal. – 1993. – Vol. 24, № 2. – P. 499–519.
3. Beylkin, G. Fast wavelet transforms and numerical algorithms / G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin // Comm. Pure. Appl. Math. – 1991. – Vol. 44. – P. 141–183.
4. Beylkin, G. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets / G. Beylkin. – SIAM J. Numer. Anal. – 1992. – Vol. 6, № 6. – P. 1716–1740.
5. Beylkin, G. On multiresolution methods in numerical analysis / G. Beylkin // Documenta Mathematica. – 1998. – Vol. III. – P. 481–490.
6. Fann, G. Singular operators in multiwavelet bases / G. Fann [et al.] // IBM J. Res. and Dev. – 2004. – Vol. 48, № 2. – P. 161–171.
7. Deytseva, A. On the representation of the differential operators in bases of coiflets / A. Deytseva // 4th International Workshop Computer Algebra Systems in Teaching and Research, Siedlce, Poland, January 31 – February 3, 2007, Proceedings. / Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, ed.: L. Gadomski [et al.]. – Siedlce, 2007. – P. 52–58.
8. Deytseva, A. On the representation of the differential operator in bases of periodic coiflets and it’s application / A. Deytseva // 10th International Workshop Computer Algebra in Scientific Computing 2007, Bonn, Germany, September 16 – 20, 2007, Proceedings. / Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ed.: Victor G. Ganzha [et al.]. – Bonn, 2007. – Vol. 4770. – P. 448–457.
9. Дьяконов, В.П. Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов. – М.: Солон–Р, 2002. – 448 с.
10. Смоленцев, Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н.К. Смоленцев. – М.: ДМК Пресс, 2006. – 304 с.