

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТИМПАНАЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ С УЧЕТОМ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ УСИЛИЙ

Ермоченко С. А.

*The goal of this study is to clear up the influence of the tangential strains at the strain-stress state of the rehabilitated tympanic membrane. The tangential displacement and rotation about longitudinal axis of the prosthesis base has been taken into account under simulation. The reconstructed tympanic membrane has being modeled as isotropic elastic annular plat. As a method for solving equations of isotropic plate, the analytic method has been chosen.*

### Введение.

Реконструкция колебательной системы среднего уха человека применяется в хирургической практике в случае повреждения некоторых компонентов среднего уха [1]. В оториноларингологии известны несколько техник реконструкции среднего уха, применяемых в зависимости от вида и степени патологии [2]. В некоторых случаях при повреждении тимпанальной мембраны используются следующие способы реконструкции [3]:

1. полная замена поврежденной тимпанальной мембраны на хрящевой имплантат;
2. наложение на поврежденную тимпанальную мембрану хрящевого имплантата.

Простейший случай полной замены тимпанальной мембраны хрящевым имплантатом ранее рассмотрен в работе [4]. Различные случаи наложения хрящевого имплантата на остатки поврежденной мембраны описаны в работах [5, 6]. Однако, в указанных работах применялась упрощенная модель, в которой не принимались во внимание тангенциальные силы, возникающие в деформированной пластине.

### Механико-математическая модель тимпанальной мембраны

Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как тонкая (толщиной  $h$ ) изотропная круглая пластина (с модулем упругости Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ ). Радиус пластины  $a$ .

На пластину устанавливается круглое основание протеза  $b$ , которое прогибает пластину. Таким образом, пластина находится в напряженно-деформированном состоянии, а возникающие усилия позволяют удерживать введенный в полость среднего уха протез до его естественного срачивания с тканями имплантата. На контуре сопряжения пластины с основанием протеза примем условия жесткой заделки. На внешнем контуре соединения протеза с тимпанальным кольцом примем условия упругой заделки [7], при этом тимпанальное кольцо моделируется распределенными по всему контуру линейными и торсионными пружинами с модулями упругости  $k_l$  и  $k_t$  соответственно.

Для определения деформаций пластины введем систему координат  $Oxuz$  так, чтобы ось  $Oz$  была перпендикулярна плоскости пластины, т.  $O$  – центр пластины. Основание протеза, установленное в центр пластины, прогибает пластину, при этом центр основания протеза смещается в точку с координатами  $(x_p; y_p; w_p)$ . Кроме того, основание протеза совершает повороты относительно осей координат на углы  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  соответственно. Цель исследования – определить силы и моменты, действующие со стороны деформированной пластины на основание протеза при известных деформациях (т.е. при заданном смещении и поворотах основания протеза).

Рассмотрим цилиндрическую систему  $Or\varphi z$  координат, связанную с введенной декартовой системой координат. Обозначим вектор смещения точки пластины в системе координат  $Or\varphi z$  через  $u_1, u_2, w$ . Соотношения упругости рассмотрим в виде, приведенном в [8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_1}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + P_s = 0, \\ r \frac{\partial H}{\partial r} + 2H + r Q_2 + \frac{M_2}{\partial \varphi} = 0, \\ r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \\ r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где:

$P_s$  – давление, возникающее в полости среднего уха в послеоперационный период [1];

$$M_1 = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M_2 = D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$H = D \left( \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1-\nu}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \text{моменты относительно осей координат};$$

$$T_1 = K \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u_1 + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right), \quad T_2 = K \left( \nu \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right),$$

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{r} u_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) - \text{мембранные усилия};$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{E h}{1-\nu^2} - \text{жесткость пластины}; \quad Q_1, Q_2 - \text{перерезывающие силы}.$$

Из первых двух уравнений системы можно выразить перерезывающие усилия следующим образом:

$$Q_1 = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad (2)$$

$$Q_2 = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right). \quad (3)$$

Тогда первое уравнение системы сводится к уравнению относительно нормального прогиба пластины  $w$ :

$$D \Delta^2 w = P_s, \quad (4)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  – оператор Лапласа в полярной системе координат.

Используя выражения мембранных усилий через тангенциальные смещения  $u_1$  и  $u_2$ , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} r \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{1}{r} u_1 + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{3-\nu}{2r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{1-\nu}{2} r \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1-\nu}{2r} u_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3-\nu}{2r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Граничные условия на внутреннем контуре сопряжения пластины с основанием протеза в случае жесткой заделки запишутся в виде:

$$w|_{r=b} = w_p + b \sin \theta_x \sin \varphi + b \sin \theta_y \cos \varphi; \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=b} = \sin \theta_x \sin \varphi + \sin \theta_y \cos \varphi; \quad (7)$$

$$u_1|_{r=b} = \frac{b}{2} (\cos \theta_x + \cos \theta_y + 2 \cos \theta_z - 4) + u_p \cos \varphi_p \cos \varphi + u_p \sin \varphi_p \sin \varphi + \frac{b}{2} (\cos \theta_y - \cos \theta_x) \cos 2\varphi; \quad (8)$$

$$u_2|_{r=b} = b \sin \theta_z + u_p \sin \varphi_p \cos \varphi - u_p \cos \varphi_p \sin \varphi + \frac{b}{2} (\cos \theta_x - \cos \theta_y) \sin 2\varphi; \quad (9)$$

где  $u_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$ ,  $\cos \varphi_p = x_p/u_p$ ,  $\sin \varphi_p = y_p/u_p$ .

На внешнем контуре в случае упругой заделки граничные условия запишутся в виде:

$$\left( k_l w + Q_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right)_{r=a} = 0, \quad (10)$$

$$\left( k_t \frac{\partial w}{\partial r} + M_1 \right)_{r=a} = 0, \quad (11)$$

$$u_1|_{r=a} = 0, \quad (12)$$

$$u_2|_{r=a} = 0, \quad (13)$$

Решение уравнений (4), (5) будем искать в виде разложений по тригонометрическим функциям на основании вида граничных условий (6)–(13):

$$w = w_0 + w_1^c \cos \varphi + w_1^s \sin \varphi, \quad (14)$$

$$u_1 = u_{1,0} + u_{1,1}^c \cos \varphi + u_{1,1}^s \sin \varphi + u_{1,2}^c \cos 2\varphi \quad (15)$$

$$u_2 = u_{2,0} + u_{2,1}^c \cos \varphi + u_{2,1}^s \sin \varphi + u_{2,2}^s \sin 2\varphi \quad (16)$$

Частные решения полученных уравнений имеют вид:

$$w_0 = A_{0,1} r^2 + A_{0,2} r^2 \ln r + A_{0,3} \ln r + A_{0,4} + \frac{P_s}{64D} r^4, \quad (17)$$

$$w_1^c = A_{1,1} r + A_{1,2} r \ln r + A_{1,3} r^3 + A_{1,4} \frac{1}{r}, \quad (18)$$

$$w_1^s = A_{1,5} r + A_{1,6} r \ln r + A_{1,7} r^3 + A_{1,8} \frac{1}{r}, \quad (19)$$

$$u_{1,0} = B_{0,1} r + B_{0,2} \frac{1}{r}, \quad u_{2,0} = B_{0,3} r + B_{0,4} \frac{1}{r}, \quad (20)$$

$$u_{1,1}^c = (1-3\nu)B_{1,1} r^2 + B_{1,2} \frac{1}{r^2} + B_{1,3} (3-\nu)^2 \ln r - B_{1,3} (1-\nu^2) - B_{1,4}, \quad (21)$$

$$u_{2,1}^s = (5+\nu)B_{1,1} r^2 + B_{1,2} \frac{1}{r^2} - B_{1,3} (3-\nu)^2 \ln r - 2B_{1,3} (1+\nu) + B_{1,4}, \quad (22)$$

$$u_{1,1}^s = (1-3\nu)B_{1,5} r^2 + B_{1,6} \frac{1}{r^2} + B_{1,7} (3-\nu)^2 \ln r - B_{1,7} (1-\nu^2) - B_{1,8}, \quad (23)$$

$$u_{2,1}^c = -(5+\nu)B_{1,5} r^2 - B_{1,6} \frac{1}{r^2} + B_{1,7} (3-\nu)^2 \ln r + 2B_{1,7} (1+\nu) - B_{1,8}, \quad (24)$$

$$u_{1,2}^c = -B_{2,1} r + B_{2,2} \frac{1}{r^3} - 2\nu B_{2,3} r^3 + 2B_{2,4} \frac{1}{r}, \quad (25)$$

$$u_{2,2}^s = B_{2,1} r + B_{2,2} \frac{1}{r^3} + (3 + \nu) B_{2,3} r^3 - (1 - \nu) B_{2,4} \frac{1}{r}, \quad (26)$$

где константы  $A_{i,j}$  и  $B_{i,j}$  определяются из граничных условий (6)–(13).

Полученные решения описывают деформацию реконструированной тимпанальной мембраны. На основании построенных решений выразим теперь силу  $\mathbf{F}_{im}(F_{im}^x; F_{im}^y; F_{im}^z)$  и момент  $\mathbf{M}_{im}(M_{im}^x; M_{im}^y; M_{im}^z)$ , действующие со стороны пластины на основание протеза, которые характеризуют напряженно-деформированное состояние реконструированной тимпанальной мембраны, вызванное перемещением и поворотом основания протеза:

$$F_{im}^x = \left( \int_0^{2\pi} r(T_1 \cos \varphi - S \sin \varphi) d\varphi \right)_{r=b}, \quad (27)$$

$$F_{im}^y = \left( \int_0^{2\pi} r(T_1 \sin \varphi + S \cos \varphi) d\varphi \right)_{r=b}, \quad (28)$$

$$F_{im}^z = \left( \int_0^{2\pi} rQ_1 d\varphi \right)_{r=b}, \quad (29)$$

$$M_{im}^x = \left( \int_0^{2\pi} r(rQ_1 \sin \varphi + M_1 \cos \varphi) d\varphi \right)_{r=b}, \quad (30)$$

$$M_{im}^y = \left( \int_0^{2\pi} r(rQ_1 \cos \varphi - M_1 \sin \varphi) d\varphi \right)_{r=b}, \quad (31)$$

$$M_{im}^z = \left( \int_0^{2\pi} r(rS + H) d\varphi \right)_{r=b}. \quad (32)$$

### Результаты и численные расчеты.

Для дальнейшего исследования напряженно-деформированного состояния рассмотрим следующие параметры:

$F_n = |F_{im}^z|$  – нормальная составляющая силы, действующей со стороны пластины на основание протеза;

$F_t = \sqrt{(F_{im}^x)^2 + (F_{im}^y)^2}$  – тангенциальная составляющая силы, действующей со стороны пластины на основание протеза;

$M_n = |M_{im}^z|$  – момент, закручивающий основание протеза вокруг оси, перпендикулярной плоскости пластины;

$M_t = \sqrt{(M_{im}^x)^2 + (M_{im}^y)^2}$  – момент, закручивающий основание протеза вокруг оси, лежащей в плоскости пластины. Положение данной оси определяется углами  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , и описывается уравнением:  $x \cos \theta_x \sin \theta_y - y \sin \theta_x = 0$ .

Исследуем зависимость рассмотренных параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние реконструированной тимпанальной мембраны, от вида деформации внутреннего контура. Из симметричности пластины следует, что только при нормальном прогибе пластины суммарный момент  $M_t$  равен нулю, также только при повороте основания протеза на некоторый угол силы равны нулю.

Таким образом, можно рассматривать введенные параметры как функции:  $F_n(w_p)$ ,  $F_t(u_p, \varphi_p)$ ,  $M_n(\theta_z)$ ,  $M_t(\theta_x, \theta_y)$ . Кроме этого, так как  $F_t$  и  $M_t$  являются величинами соответствующих векторов, и направление действия этих векторов в данном случае является несущественным, можно рассматривать, например,  $\varphi_p = 0$ ,  $\theta_x = 0$ ,  $\theta_y = \theta$ . Таким образом, рассмотрим функции  $F_n(w_p)$ ,  $F_t(u_p)$ ,  $M_n(\theta_z)$ ,  $M_t(\theta)$ .

Все вычисления производились при помощи пакета прикладных программ Maple при следующих числовых значениях параметров:  $h = 0,3$  мм;  $v = 0,4$ ;  $E = 3,4$  Н / мм<sup>2</sup>;  $a = 5$  мм;  $k_l = 0,075$  Н / мм<sup>2</sup>;  $k_t = 6,5 \times 10^{-5}$  Н;  $b = 1$  мм.

Приведем графики зависимостей сил (рис. 1) и моментов (рис. 2) от перемещений и поворотов основания протеза при различных значениях толщины хрящевого имплантата:

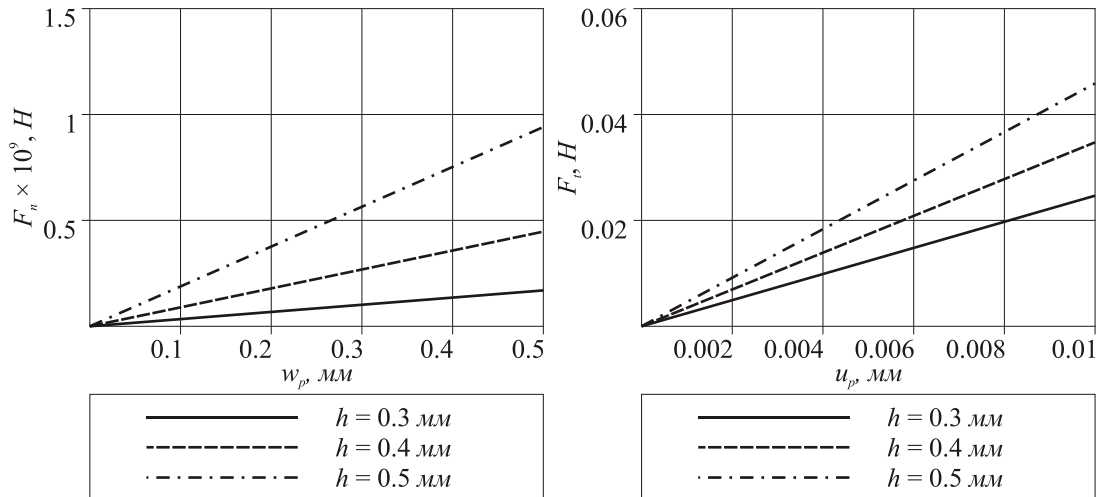


Рис. 1. Зависимость сил от смещения центра основания протеза.

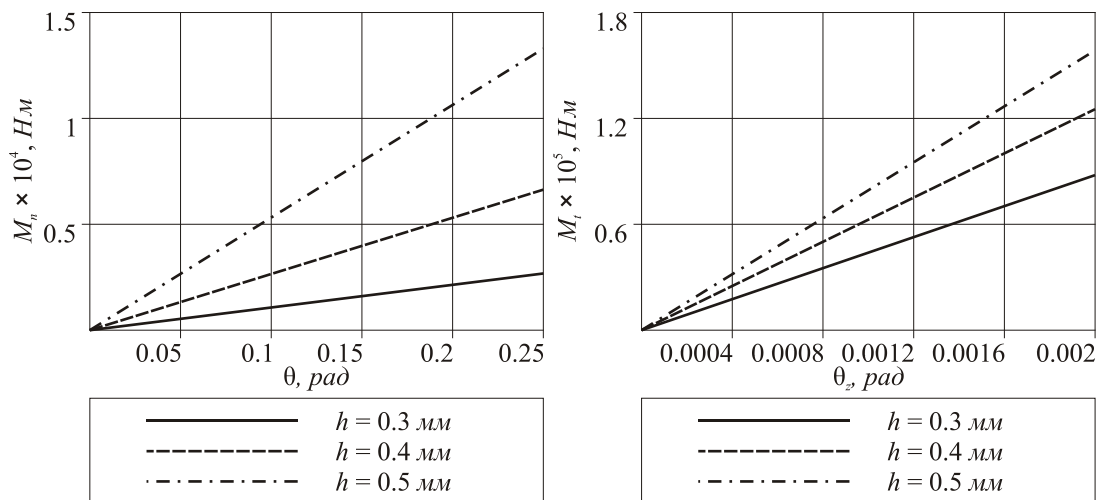


Рис. 2. Зависимость моментов от поворотов основания протеза.

Приведенные графики показывают степень зависимости напряженно-деформированного состояния реконструированной тимпанальной мембраны от толщины хрящевого имплантата. Анализируя полученные результаты можно сделать следующий вывод: тангенциальное перемещение и поворот на несколько порядков меньше нормальных перемещения и поворота при одинаковых усилиях и моментах, действующих в соответствующих направлениях. Однако, для использования упрощенной модели без учета тангенциальных перемещений и поворотов необходимо

дополнительное исследование силы трения, возникающей между хрящевым имплантатом и основанием протеза.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях характеристик реконструированного среднего уха.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Hüttenbrink, K.-B.* Mechanical aspects of middle ear reconstruction // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. *Eiber, A.* On the coupling of prosthesis to the middle ear structure and its influence on sound transfer / A. Eiber, H.-G. Freitag, G. Schimanski, H. P. Zenner // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publication, 2000. – P. 297-308.
3. *Murbe, D.* Assessment of vibration characteristics of different cartilage reconstruction techniques for the tympanic membrane using scanning laser vibrometry / D. Murbe, Th. Zahnert, M. Bornitz, K.-B. Hüttenbrink // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 321-329.
4. *Mikhasev, G.* Calculation of the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis /G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Journal of Biomechanics: Abstracts of the 5th World Congress of Biomechanics, Munich, Germany, 29 July–4 August 2006. 2006, Vol. 39, Supplement 1. – P. S389.
5. *Ermochenko, S.* Finite Difference Method in Research of the Strain-Stress State of the Reconstructed Middle Ear / S. Ermochenko, G. Mikhasev // Proceedings of the Int. Conf. on Computational Biomechanics and Biology, Sept. 10–13, 2007, Plzen, Czech Republic, University of West Bohemia.– P. 101-103.
6. *Ермоченко, С.А.* Расчет напряженно-деформированного состояния тимпанальной мембраны в случае ее реконструкции по технологии “large island” / Международный научно-технический журнал Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Выпуск 24. – С. 93-100
7. *Koike, T.* Analysis of the finite-element method of transfer function of reconstructed middle ear and their postoperative changes / T. Koike, H. Wada, T. Kobayashi // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 309-320.
8. *Товстик, П. Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.