

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

к.ф.-м.н. ¹Конон П.Н., д.т.н. ²Кулаго А.Е., к.ф.-м.н. ¹Сицко Г.Н., студ. ¹Конон Н.П.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Российская экономическая Академия, Москва

Введение. В различных технологических процессах используются течения слоя жидкости на вращающемся диске. Например, производство минеральных и металлических волокон из высокотемпературных расплавов при центробежном способе состоит в переработке расплава в волокно вращающимися дисками. В данном случае при быстром вращении дисков имеет место неустойчивость слоя под действием центробежных сил. По касательной к поверхности струйки жидкости сбрасываются в окружающее пространство, дробятся на капли, которые в свою очередь могут делиться дальше и, вытягиваясь и застывая, образуют металлическую нить или минеральное волокно. Важно знать значения угловых скоростей вращения диска, при которых наблюдается движение слоя и последующий его распад. Актуальным является также определение режимов вращения, при которых слой неподвижен по отношению к вращающейся поверхности диска. С целью изучения поведения слоя на вращающейся горизонтальной подложке проведены экспериментальные исследования, результаты которых изложены в данной работе.

В [3] рассмотрено относительное равновесие осесимметричных слоев жидкости на вращающемся диске, другие задачи определения равновесных форм исследованы в книге [1] и статье [2].

Экспериментальные исследования движения слоя жидкости на вращающемся диске. С целью изучения поведения слоя вязкой жидкости на вращающейся цилиндрической подложке были проведены экспериментальные исследования движения слоя вязкой жидкости на вращающейся цилиндрической подложке.

Для проведения эксперимента была разработана и создана экспериментальная установка блок-схема, которой представлена на рисунке 1.



Рис. 1. Схема экспериментальной установки

На вращающемся диске крепится стеклянная подложка, на которой находится исследуемая жидкость в виде капли. Диск вращается на оси, укрепленной на двух шариковых подшипниках. Вращение на диск передается посредством ременной передачи от двигателя постоянного тока. С помощью блока управления изменяется скорость вра-

щения двигателя и угловая скорость вращения диска. На рисунке 2 представлена фотография установки (вид сверху).

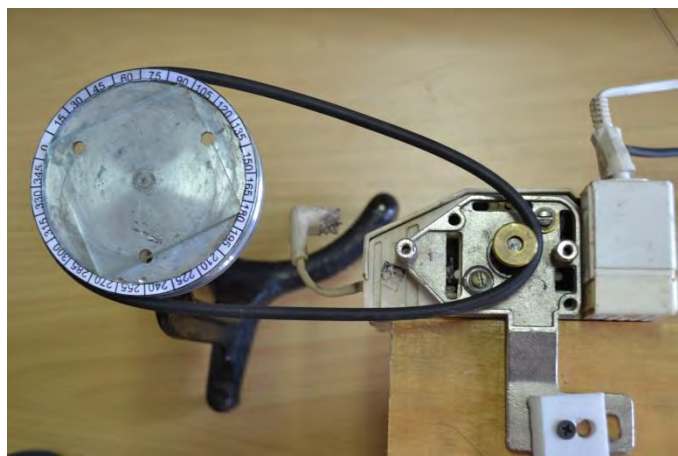


Рис. 2. Диск, двигатель постоянного тока и блок управления

Видеокамера фиксирует объект с частотой 500 кадров/сек. Для уменьшения размытости кадра, объект исследования дополнительно освещается, чтобы уменьшить выдержку до $1/10000$. На ниже приведенных рисунках представлены кадры регистрации эксперимента. Невзирая на малую выдержку съемки, шкала на ободу диска получается размытой, поэтому оценка угловой скорости осуществляется посредством определения угла поворота стороны подложки за время, определяемое количеством кадров необходимых для получения данного угла поворота. Так как стеклянная подложка размером 56 мм квадратная, а горизонтальная и вертикальная стороны отчетливо видны на фотографиях, то изменение диаметра капли легко определить, считая сторону подложки опорной. Плавное изменение скорости позволяет построить зависимость диаметра капли от угловой скорости вращения, а также определить толщину капли, так как объем жидкости задавался изначально.

Оценим влияние различных сил, действующих на жидкость, находящуюся на вращающейся подложке. Так как рассматриваем неинерциальную вращающуюся систему координат, то в соответствии с законами Ньютона, необходимо ввести фиктивную Даламберовскую центробежную силу F_{ω} , которая направлена от центра по радиусу. Для малой частицы жидкости массой dm , находящейся на расстоянии r от оси вращения, она определяется формулой $F_{\omega} = \omega^2 r dm$, где ω — угловая скорость вращения диска. Кроме центробежной силы на жидкость действует сила тяжести gdm , направленная вниз и сила поверхностного натяжения, направленная к центру капли. В начальном положении, когда угловая скорость равна нулю, действуют только силы тяжести и поверхностного натяжения, которые определяют форму капли. Рассмотрим случай несмачивания жидкостью поверхности. Силы поверхностного натяжения пропорциональны радиусу кривизны капли, а сила тяжести пропорциональна R^3 . Отсюда следует, что с увеличением массы увеличивается действие силы тяжести, и капля становится более приплюснутой, а с уменьшением массы капли она становится более шарообразной. Центробежная сила способствует растяжению капли в радиальном направлении. Необходимо принимать во внимание так же силу вязкого трения, пропорциональную коэффициенту вязкости. Если сила вязкого трения велика, то при разрыве капли траектория на стекле будет оставаться радиальной. Если же сила вязкого трения маленькая, то вследствие силы Кориолиса траектория частицы жидкости будет принимать изогнутую форму.

Эксперименты проводились для жидкостей, имеющих существенно различные значения коэффициентов вязкости, поверхностного натяжения и плотности, а также крае-

вого угла смачивания. Это глицерин, масло ПФМС-4 и вода. К примеру, кинематическая вязкость глицерина при комнатных условиях в 680 раз выше вязкости воды. Краевой угол смачивания глицерина на чистой поверхности равен 60° , а масла – 15° .

При исследовании вращающейся капли воды, уже при достаточно небольших угловых скоростях капля теряла свою форму и распадалась в виде тонкой струи изогнутой в сторону противоположную вращению диска вследствие значительного влияния силы Кориолиса. Капли глицерина оказывались более устойчивыми и сохраняли свою форму относительного равновесия при достаточно больших до 20 оборотов в секунду частотах вращения диска. На рисунках 3 представлены фотографии слоя глицерина на вращающемся диске при увеличении угловой скорости вращения. Капля первоначально помещалась в центре диска. Угловая скорость изменялась плавно до достижения определенного стационарного вращения. При этом капля принимала определенную форму. Если скорость вращения невелика до 3-ех оборотов в секунду, то наблюдалось жесткое вращение капли и диска как единого целого, что показано на рисунке 3а. При медленном увеличении угловой скорости вращения до определенного значения вследствие действия центробежной силы радиус смачиваемой поверхности увеличился, а высота капли уменьшилась (рисунок 3б). При дальнейшем медленном увеличении скорости вращения до 20 оборотов в секунду вследствие случайных возмущений капля теряет устойчивое равновесное положение (рисунок 3в). При этом жидкость начинает движение по горизонтальной подложке практически по радиусу диска вследствие преобладания вязких сил трения над силами Кориолиса. На рисунке 3г показана форма жидкого слоя после окончания эксперимента.

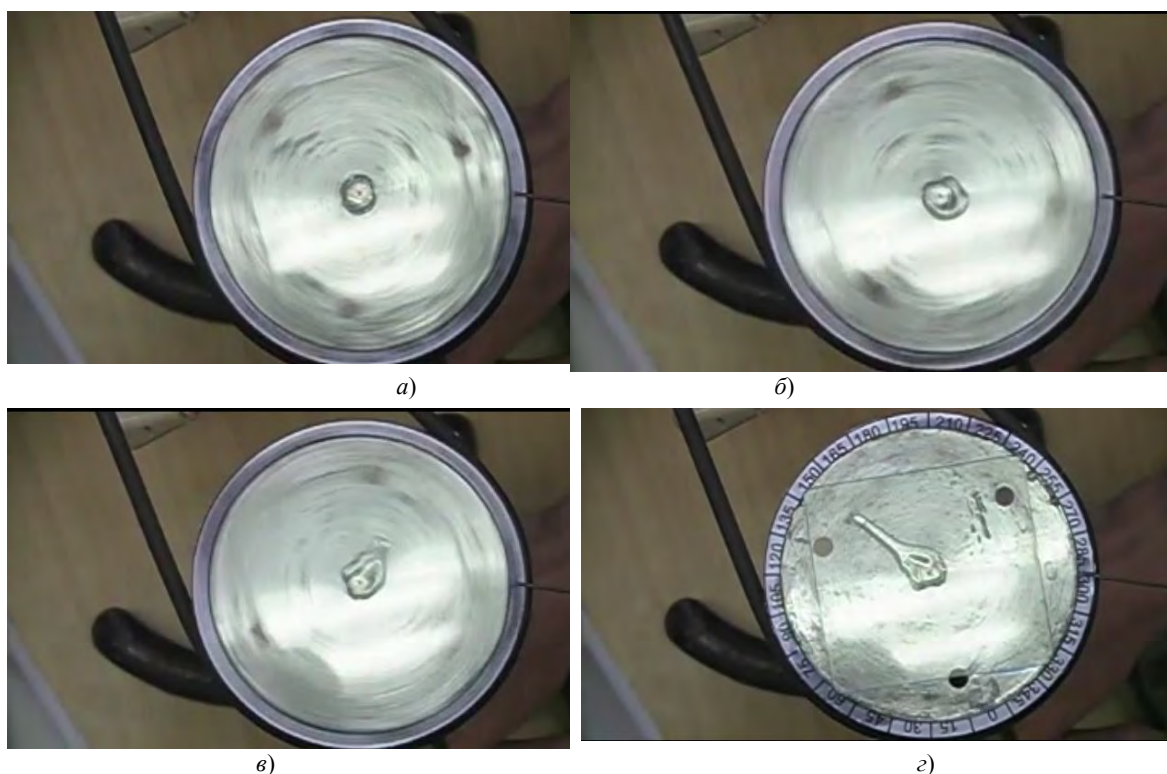


Рис. 3. Форма капли при различных угловых скоростях вращения: а — при частоте вращения 3 об/сек, б — при увеличении частоты вращения, в — развитие возмущений в капле при 10 об/сек, г — образование вытянутой струйки жидкости при частоте вращения 20 об/сек и окончание эксперимента

В рамках исследования механизма волокнообразования были также проведены экспериментальные исследования поведения жидких слоев на вращающемся диске. В качестве жидкости использовалось масло ПФМС-4. Результаты экспериментов

приведены на рисунках 4-6. На рисунке 4а два кольцеобразных слоя жидкости нанесены на поверхность покоящегося диска. При вращении диска слои распадались в виде вытянутых струек, что показано на рисунке 4б. Вследствие преобладающего влияния центробежных сил инерции и значительной роли вязких сил влияние сил инерции Кориолиса на движение оказалось малым и на рисунках практически незаметно отклонение струек от радиального движения. С удалением слоя от оси вращения растет число нестационарных возмущений поверхности в виде достаточно тонких нитей.

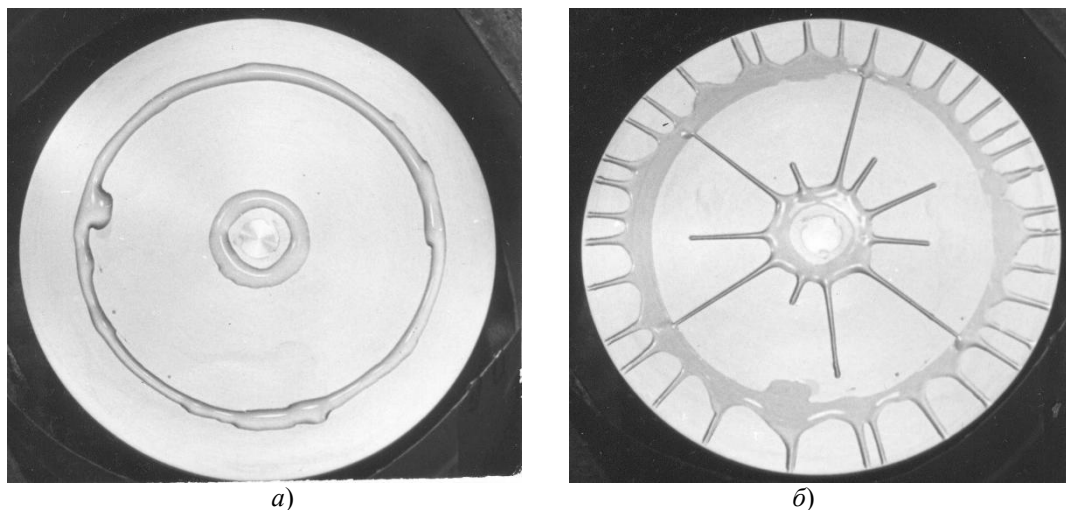


Рис. 4. Форма кольцеобразных слоев масла ПФМС-4 на диске: а — при отсутствии вращения; б — при вращении

На рисунках 5 показано развитие возмущений покоящегося слоя масла от капли в центре диска при некотором увеличении угловой скорости вращения. Видно образование восьми развитых волн в азимутальном направлении, примерно равномерно расположенных по окружности диска (рисунок 5а). С течением времени дробление капли продолжается до 11 разных возмущений, и струйки жидкости движутся дальше в радиальном направлении, что показано на рисунке 5б. В течение какого-то момента времени можно считать, что наблюдаются стационарные возмущения поверхности, при этом слой и диск вращаются как единое целое.

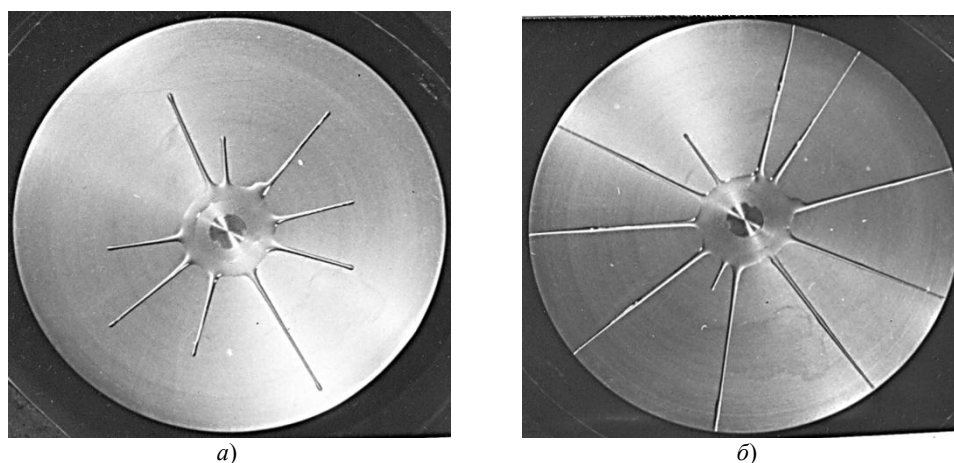


Рис. 5. Развитие возмущений слоев масла ПФМС-4 на диске: а — при небольшом увеличении угловой скорости вращения в начале движения; б — в последующий момент времени

На рисунке 6а изображено развитие возмущений от первоначально покоящегося слоя масла в виде капли в центре диска при резком увеличении угловой скорости

вращения. Видно образование множества очень тонких вытянутых по радиусу струек, расположенных примерно равномерно по периметру цилиндра. По мере удаления жидкости от центра диска число хорошо развитых возмущений растет (рисунком бб), и тонкие струйки покидают вращающуюся поверхность диска, срываясь с него, загибаясь против вращения и выбрасываясь в окружающее пространство.

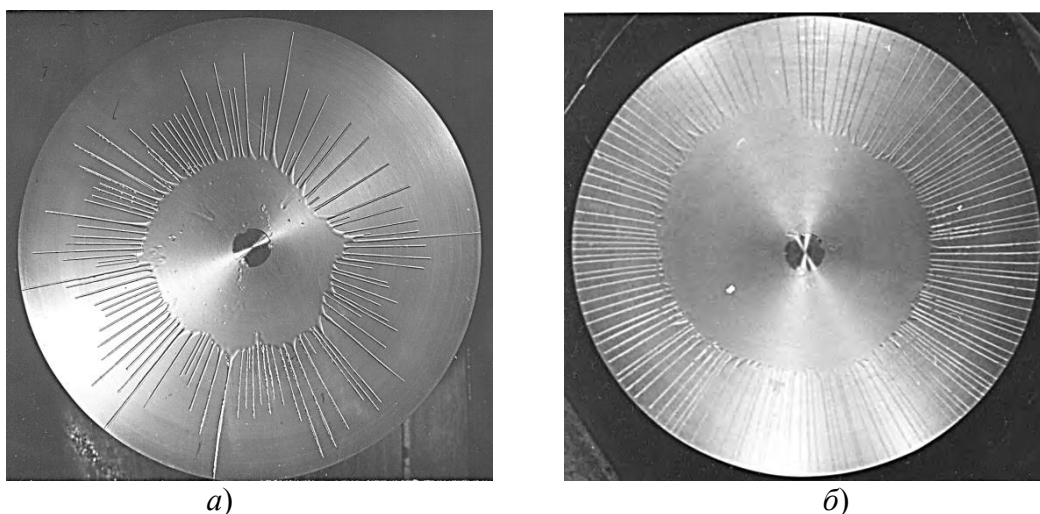


Рис. 6. Развитие возмущений слоев масла ПФМС-4 на диске: а—при резком увеличении угловой скорости вращения в начале движения; б— в последующий момент времени

Результаты экспериментов показывают, что при небольших угловых скоростях вращения диска для сильновязких жидкостей возможно относительное равновесие слоя и жидкости на вращающейся горизонтальной подложке. С увеличением угловой скорости возможен распад слоя в виде вытянутых по радиусу цилиндра струек. Число струек растет, и они становятся тоньше с увеличением угловой скорости вращения диска.

К задаче о движении и относительном равновесии неосесимметричной капли на вращающемся диске. Рассмотрим движение капли вязкой жидкости на поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью ω диска в поле сил инерции, поверхностного натяжения и силы тяжести.

Движение удобно рассматривать в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , в которой ось z направлена вдоль оси симметрии; r — в радиальном, а φ - в окружном направлениях.

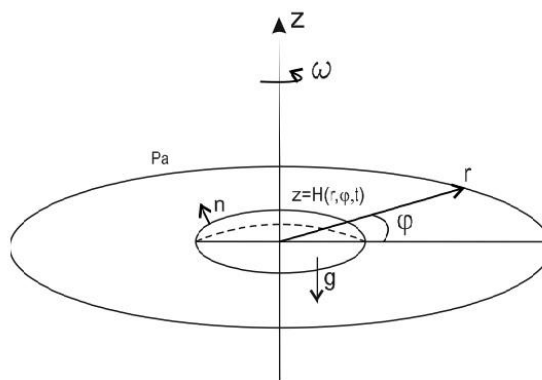


Рис. 7. К исследованию движения слоя на вращающемся диске

Движение капли жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса, неразрывности и неизвестной свободной поверхности $z = H(r, \varphi, t)$. На поверхности диска $z = 0$ выполняется условие прилипания, а на свободной поверхности жидкости — условия не-

прерывности напряжений в касательной плоскости и скачок нормальных напряжений, вызванный действием капиллярных сил [3].

Проведенные экспериментальные исследования подтверждают тот факт, что возможно вращение диска и жидкости как единого целого. Это говорит о том, что задача исследования форм относительного равновесия жидкости на вращающемся диске имеет самостоятельный интерес. В [3] из уравнений Навье-Стокса и граничного условия на нормальные напряжения при относительном покое жидкого слоя выведено уравнение равновесия

$$\frac{1}{2}We(2Eu + r^2 - \frac{2H}{Fr}) = \frac{r(1 + H_r^2)(rH_r + H_{\varphi\varphi}) - 2H_rH_{\varphi}(rH_{r\varphi} - H_{\varphi}) + (r^2 + H_{\varphi}^2)rH_{rr}}{[r^2(1 + H_r^2) + H_{\varphi}^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Здесь нижний индекс обозначает частную производную по соответствующему направлению. Уравнение (1) записано в безразмерном виде. В качестве значения характерной длины l_0 использована величина $l_0 = \sqrt{\sigma/\rho g}$, а характерная скорость равна $l_0\omega$. Уравнение (1) содержит три безразмерных параметра. Это число Эйлера Eu , характеризующее перепад давлений p_0 в точке слоя (0,0,0) и атмосферного p_a ; число Фруда Fr и число Вебера We :

$$Eu = \frac{p_0 - p_a}{\rho l_0^2 \omega^2}, \quad Fr = \frac{l_0^2 \omega^2}{gl_0}, \quad We = \frac{\rho l_0^3 \omega^2}{\sigma}. \quad (2)$$

В (2) обозначено: ρ — ее плотность жидкости, а σ — коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение силы тяжести.

В случае осесимметричных форм относительного равновесия капли, когда $H = H(r)$, уравнение (1) представляется в виде:

$$rH'' - We(Eu + \frac{1}{2}r^2 - \frac{H}{Fr})r(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}} + (1 + H'^2)H' = 0. \quad (3)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по r . К уравнению (1) необходимо добавить следующие условия: ограниченность смачиваемой поверхности, определяемой, вообще говоря, неизвестным радиусом $r_0(\varphi)$, наличие постоянного угла смачивания ε_0 , выполнение симметрии решения относительно вертикальной оси, сохранения постоянной массы капли и периодичность решения по углу.

$$H|_{r=r_0} = 0; \quad H'|_{r=r_0} = -tg\varepsilon_0; \quad H'|_{r=0} = 0; \quad M = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r_0(\varphi)} \int_0^0 r^2 H(r, \varphi) dr d\varphi, \\ H(r, 0) = H(r, 2\pi), \quad H'(r, 0) = H'(r, 2\pi). \quad (4)$$

Решение уравнения (1) с условиями (4) позволит определить осесимметричную форму слоя вместе с радиусом смачиваемой поверхности $r_0(\varphi)$ и перепадом давлений Eu .

Решение задачи (1), (4) будем искать в виде суммы осесимметричного решения $H = H_0(r)$ и малого неосесимметричного отклонения $h(r, \varphi) \ll H_0(r)$:

$$H(r, \varphi) = H_0(r) + h(r, \varphi) \quad (5)$$

Из (1) и (5) получаем, что осесимметричное решение $H = H_0(r)$ удовлетворяет уравнению (3). Решение для осесимметричного случая исследовано в [3]. Для неосесимметричного случая, пренебрегая произведениями малых величин, получаем уравнение

$$(1 + H_0'^2)h_{\varphi\varphi} + r^2 h_{rr} + G(r)h_r + \frac{We}{Fr}(1 + H_0'^2)^{\frac{3}{2}}r^2 h = 0, \quad G(r) = r - \frac{3H_0'H_0''}{1 + H_0'^2}r^2 \quad (6)$$

Решение задачи (6) ищется методом разделения переменных:

$$h(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаются дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0, \quad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{F_1(r)}{r} \frac{dR}{dr} + (F_0(r) - \frac{n^2}{r^2})(1 + H_0'^2)R = 0, \quad (8)$$

$$F_1(r) = \frac{1}{r} - \frac{3H_0'H_0''}{1 + H_0'^2}, \quad F_0(r) = (1 + H_0'^2) \frac{We}{Fr}.$$

Для слоя с малой кривизной, когда $H_0'^2 \approx 0$, $H_0'H_0'' \approx 0$ из второго уравнения (8) выводится уравнение Бесселя

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} + (\frac{We}{Fr} - \frac{n^2}{r^2})(1 + H_0'^2)R = 0, \quad (9)$$

частное решение которого, ограниченное при $r=0$, имеет вид:

$$R_n(r) = J_n(\sqrt{\frac{We}{Fr}} \cdot r). \quad (10)$$

Если в качестве характеристического размера использовать величину $l_0 = \sqrt{\sigma/\rho g}$, то отношение $We/Fr=1$, и возмущение основного решения не зависит от угловой скорости вращения диска. Этот факт объясняется рассматриваемым в уравнении (9) приближением каплей очень малой кривизны. В результате поверхность неосесимметричного слоя на диске определяется выражением

$$H(r, \varphi) = H_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_n(r) \sin n\varphi, \quad (11)$$

где c_n – постоянные, подлежащие определению из краевых условий.

Рассматривая решение (11) и поведение функции Бесселя $J_n(r)$, можно определить вид сверху неосимметричной капли, как область возмущенного слоя. Если радиус основного решения r_0 меньше радиуса определяющего зону очень мелких возмущений, то возмущения слоя при $r \leq r_0$ не влияют на основное осесимметричное решение и при $r \geq r_0$ видны лишь возмущения, что показано на рисунке 11 при $n=8$, $r_0=4$. С ростом n возмущения утоньшаются и вытягиваются. Качественно решение на рисунке 11б согласуется с экспериментальным исследованием, изображенным на рисунке 5а в предположении относительного покоя слоя.

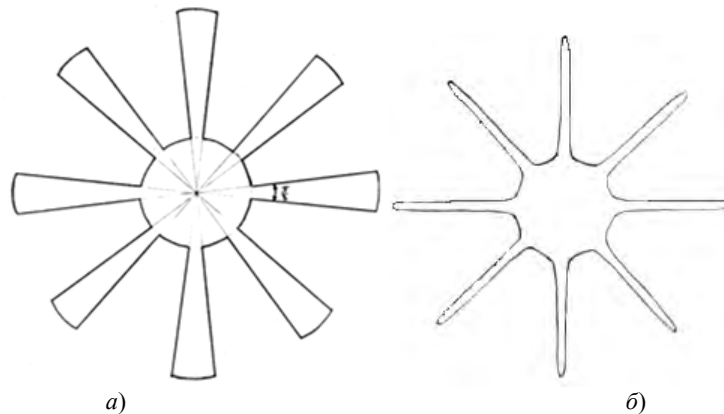


Рис. 8. Вид сверху равновесной неосесимметричной капли при $n=8$, $r_0=4$ на вращающемся диске:

а) — возмущенная область, б) — вид капли сверху после сглаживания

РЕЗЮМЕ

Разработана экспериментальная установка и проведены экспериментальные исследования поведения слоев вязкой жидкости на поверхности горизонтального вращающегося диска. При небольших скоростях вращения возможно относительное равновесие слоя на диске. С увеличением скорости вращения слой распадается на струйки в радиальном направлении. Выведено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, описывающее относительное равновесие слоя. Рассмотрены формы равновесия неосесимметричной капли малой кривизны. Определен вид сверху поверхности капли, найдены границы области возмущений. Полученное решение дает удовлетворительное качественное согласование с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидромеханика невесомости / Под ред. А.Д. Мышкиса.-М.: Наука, -1976.-506 с.
2. Конон, П.Н. Исследования плоских и осесимметричных слоев жидкости, неподвижных относительно внутренней поверхности вращающегося цилиндра / П.Н. Конон, В.В. Шпортько // Вестник БРФФИ.-2011.-№3.-С. 98-110.
3. Конон, П.Н. О формах осесимметричных слоев жидкости на поверхности горизонтального вращающегося диска / П.Н. Конон // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2014, вып.29. – С.128-133.

SUMMARY

The experimental setup and experimental studies of the behavior of layers of viscous liquid on the surface of the horizontal rotating disk. At low speeds possible relative equilibrium layer on the disk. With increasing speed of rotation layer splits into streams in the radial direction. We derive a nonlinear differential equation of second order partial derivatives describing the relative equilibrium layer. Considered forms of non-axisymmetric equilibrium drops lesser curvature. The form of the top surface of the droplet, found the boundary of the perturbation. The resulting solution gives a satisfactory qualitative agreement with experiment.

E-mail: kononp@tut.by

Поступила в редакцию 13.09.2015