

## АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

д.ф.-м.н. <sup>1</sup>Чигарев А.В., к.т.н. <sup>2</sup>Борисов А.В.

<sup>1</sup>*Белорусский национальный технический университет, Минск*

<sup>2</sup>*филиал ГОУВПО НИУ «Московский энергетический институт (Технический университет)» в г. Смоленске, Россия*

**Введение.** Использование системы компьютерной математики связано с возникающими техническими трудностями при составлении дифференциальных уравнений движения. При составлении уравнений Лагранжа второго рода, в зависимости от количества звеньев, происходит практически экспоненциальный рост объема вычислений, необходимых для записи дифференциальных уравнений движения [1]. Кроме того, при дифференцировании по времени координат центра масс количество слагаемых удваивается за счет того, что углы и длины звеньев суть функции времени. Таким образом, количество операций, выполняемых при составлении дифференциальных уравнений движения, в сравнении с моделью с абсолютно твердыми звеньями, увеличивается многократно. И, если уравнения для одного звена еще возможно составить вручную, то уже для двухзвенной модели затруднительно, не говоря уже о моделях с большим количеством звеньев. Система компьютерной математики на обычном офисном компьютере с аналитическими преобразованиями для модели с одиннадцатью подвижными звеньями с учетом операции упрощения уравнений справляется примерно за 10 минут. Таким образом, дальнейшее увеличение количества звеньев наталкивается на трудности технического характера. Кроме того, уравнения, составленные программой, непригодны для анализа и записи, требуют от исследователя дополнительной интеллектуальной работы по их группировке и приведению к структурированному виду. Имеются и другие программные средства для моделирования антропоморфных систем [2-4], однако их использование также связано либо с вышеуказанными трудностями, либо с их ориентацией на численные расчеты инженерных конструкций и отсутствием возможности получения в аналитическом виде дифференциальных уравнений движения. Поэтому в работе предложен рекуррентный метод составления дифференциальных уравнений движения. Матричное представление дифференциальных уравнений рассматривается также в работах [5-9]. Он, в отличие от классических методов, может стартовать с модели одного подвижного звена переменной длины, и далее, для составления уравнений движения используются только операции записи матриц по готовым формулам, их умножения на соответствующий вектор-столбец и сложения. В результате получают дифференциальные уравнения в структурированном виде, пригодные для непосредственного дальнейшего использования. Подходы к составлению дифференциальных уравнений движения подобных систем не ограничиваются перечисленными выше методами. Подробный их анализ приводится, например, в работе [10]. В ней, в частности, указываются недостатки существующих методов получения уравнений, сходные с теми, о которых говорилось ранее. В этой работе описаны подходы к анализу механических систем, состоящих из цепочек твердых тел, на основании уравнений Аппеля и сравнения уравнений моделей, с количеством звеньев, отличающихся на единицу.

**Описание математической модели.** В работе [11] приводится алгоритм получения дифференциальных уравнений движения стержневых робототехнических систем. Алгоритм приводится для пространственного случая модели с абсолютно твердыми звеньями. Модифицируем его на случай моделей плоских стержневых механических

систем со звеньями переменной длины (рис. 1).

В данном алгоритме используются главные локальные системы координат. Рассмотрим  $n$ -звенный стержневой механизм со звеньями переменной длины, например, рассмотренный на рис. 1.

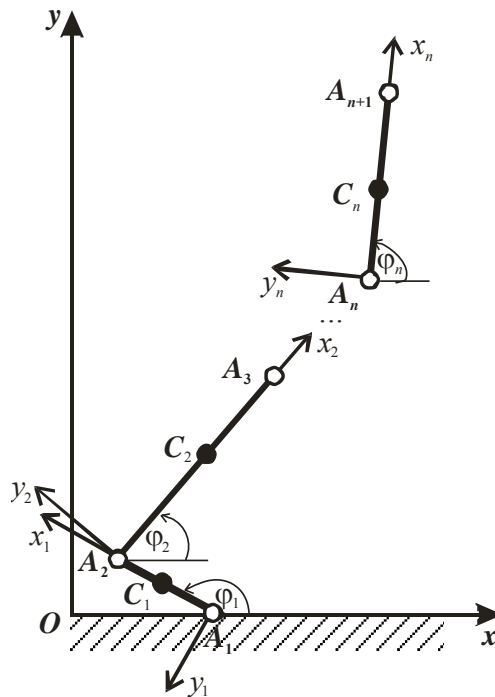


Рис. 1. Схематическая модель экзоскелета с локальными системами координат

С каждым  $i$ -тым звеном свяжем подвижную локальную систему координат  $A_i x_i y_i z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Неподвижная абсолютная система координат  $Oxyz$  (рис. 1). Начало каждой подвижной системы координат совместим с полюсом соответствующего звена, то есть с его точкой прикрепления к предыдущему звену, а для первого звена – в точке прикрепления к опоре. Движение полюса можно определить, исходя из движения предыдущего звена. Ось  $y$  направим вдоль звена, ось абсцисс направим перпендикулярно звену. Угол  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) определяет поворот осей  $i$ -той системы координат  $A_i x_i y_i z_i$  относительно неподвижной  $Oxyz$ . Углы  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются первым набором обобщенных координат, так как определяют положение звеньев механизма на плоскости. Вторым набором обобщенных координат являются длины звеньев механизма  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Обобщенные координаты считаем функциями времени:  $\varphi_i = \varphi_i(t)$ ,  $l_i = l_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

### Алгоритм построения дифференциальных уравнений

Опишем данный алгоритм.

1. Задаем вектор обобщенных координат:

$$q = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, l_1, l_2, \dots, l_n)^T.$$

2. Задаем обобщенные скорости:

$$qv = dq/dt.$$

3. Организуем цикл для определения обобщенных координат и скоростей в абсолютной системе координат, используя локальные системы координат.

- 3.1. Для  $i$ -того звена задается матрица поворота локальной системы координат:

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3.2. Задаем угловую скорость поворота  $i$ -той локальной системы координат:

$$\omega_{ri} = (\dot{\phi}_i, 0)^T \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3.3. Определяем угловую скорость  $i$ -того звена в абсолютной системе координат:

$$\omega_i = \Gamma_i \omega_{ri} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3.4. Находим координаты полюса, то есть точки  $A_i$  в предшествующей локальной системе координат  $A_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ .

$$r_{O_i} = (l_{i-1}, 0)^T \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Примечание. При первом обращении, то есть в случае первого звена в пункте 3.4. координаты полюса для первого звена имеют вид:

$$r_{O_1} = (0, 0)^T.$$

3.5. Задаем координаты центра масс  $i$ -того звена в локальной системе координат:

$$r_{C_i} = (l_i n_i, 0)^T \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где, как и прежде,  $n_i$  – множитель, определяющий положение центра масс  $i$ -того звена ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

3.6. Вычисляем координаты центра масс  $i$ -того звена в абсолютной системе координат:

$$r_{A_i} = \Gamma_i r_{C_i} + \sum_{k=1}^{i-1} \Gamma_k r_{O_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3.7. Определяем абсолютную скорость  $i$ -того звена:

$$v_{A_i} = dr_{A_i}/dt \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3.8. Задаем матрицу тензора инерции  $i$ -того звена, которая для стержня имеет вид:

$$J_i = \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3.9. Вычисляем кинетическую энергию  $i$ -того звена в абсолютной системе координат:

$$T_i = (m_i v_{A_i}^T v_{A_i} + \omega_i^T (J_i \omega_i))/2 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3.10. Записываем потенциальную энергию звена в абсолютной системе координат:

$$P_i = m_i g r_{A_{yi}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь  $r_{A_{yi}}$  –  $y$ -ковая компонента вектора  $r_{A_i}$ .

4. Пункты 3.1-3.10 повторяем для всех  $n$  звеньев механизма. Затем записываем кинетическую и потенциальную систему всего механизма:

5.

$$T = \sum_{i=1}^n T_i, \quad P = \sum_{i=1}^n P_i.$$

6. Записываем функцию Лагранжа стержневой системы:

$$L = T - P.$$

7. Формируем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i.$$

Обобщенные силы  $Q_i$  имеют смысл управления в системе. В итоге получают дифференциальные уравнения движения механизма.

**Практический пример составления уравнений для модели телескопического звена с двумя подвижными звеньями.**

Рассмотрим телескопическую модель звена, которая состоит из двух весо- мых шарниров-суставов, расположенных на концах звена, и самого весо- мого звена телеско- пической конструкции (рис. 2). Один из шарниров жестко соединен со штоком, второй с корпусом. Под действием реакций со стороны опоры и соседних стержней происхо- дит движение штока внутри корпуса, тем самым обеспечивается изменение длины зве- на.

Для исследования плоского движения экзоскелета в одноопорной фазе введем не- подвижную правую декартову систему координат  $xOy$  с началом в точке  $O$ . Движение центра масс при этом происходит в плоскости  $xOy$ .

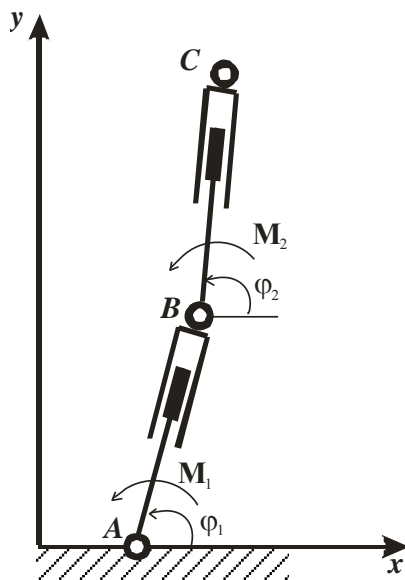


Рис. 2. Модель экзоскелета с двумя телескопическими подвижными звеньями и весо- мыми шарнирами-суставами

В точке  $A$  имеется шарнирная связь с опорой. В реальности при ходьбе антропои- да данная связь реализуется в виде неудерживающей импульсной связи. Она может мгновенно накладываться и сниматься. За счет имеющихся между стопой конечности и опорой сил трения в зоне контакта отсутствует проскальзывание. Необходимая сила трения для обеспечения отсутствия проскальзывания оценена в седьмой главе.

Координаты центров масс звеньев должны вычисляться, исходя из конкретной конструкции звена и используемых материалов. Предполагаем, что центр масс звена находится на отрезке  $AB$  и заключен между точками  $A$  и  $B$ , но не совпадает с ними. При таких предположениях в модели координаты центров масс звеньев аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{C1} &= l_1 n_1 \cos \varphi_1, & y_{C1} &= l_1 n_1 \sin \varphi_1; \\ x_{C2} &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 n_2 \cos \varphi_2, & y_{C2} &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 n_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (1)$$

За счет изменения длины звена  $l_i = l_i(t)$  ( $i = 1,2$ ) положение центров масс звеньев изменяется относительно звеньев. Обозначение  $n_i$  – это постоянный множитель, опре- деляющий положение центров масс звеньев, исходя из конструкции звена. При сделан- ных выше предположениях его значение находится в пределах  $0 < n_i < 1$ , ( $i = 1,2$ ).

Активными силами, действующими в шарнирах звеньев, являются управляющие моменты, обеспечивающие как поддержание конфигурации системы, так и синтез за- данного перемещения.

При постановке ноги на опору происходит удар. В результате звенья уменьшают свою длину до минимального значения. Восстановление длины звена происходит в фа- зе переноса конечности.

При исследованиях данной модели были сделаны следующие предположения: шарниры-суставы считаются идеальными; управляющие моменты реализующимися мгновенно, без задержек, и по величине являются достаточными для реализации движения. Связь с опорной поверхностью считаем мгновенно накладывающейся и снимающейся, обеспечивающей отсутствие проскальзывания.

Схематически подобная модель с двумя подвижными звеньями имеет вид (рис. 3 а). Модель содержит подвижное соединение в шарнире-суставе.

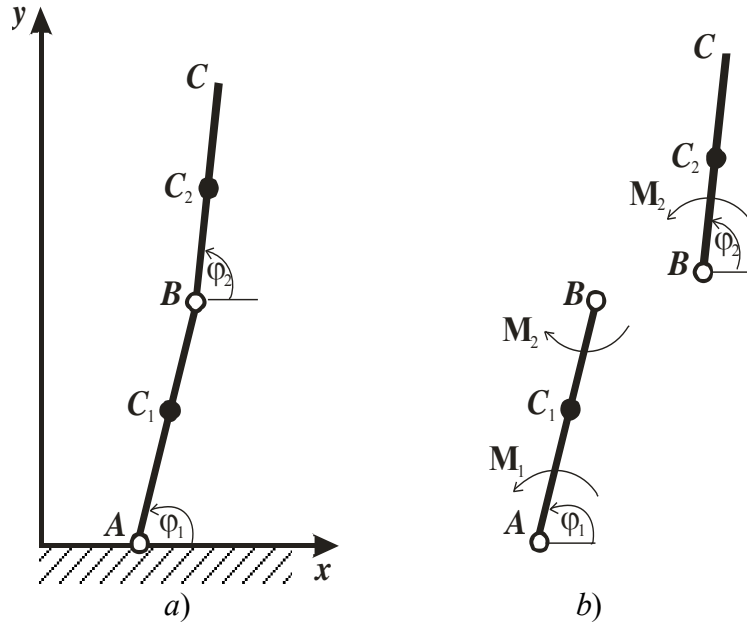


Рис. 3. Модель экзоскелета с двумя подвижными звеньями

Для исследования плоского движения системы введем неподвижную правую декартову систему координат  $xyz$  с началом в точке  $O$ . Система имеет два весомих звена, центры масс которых движутся в плоскости  $xy$ . Элементы структуры являются упругими и длины стержней являются функциями времени:  $l_i = l_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ).

Пусть  $AB = l_1$ ,  $BC = l_2$  – длины звеньев экзоскелета. Положение в одноопорной фазе однозначно определяется углами  $\varphi_i$  и длинами стержней  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ). Рассматриваемая система имеет четыре степени свободы. Обозначим через  $M_i$  моменты, развиваемые в  $i$ -том шарнире ( $i = 1, 2$ ).

Центры масс находятся в точках  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ). Их положения будем задавать в виде отношений длины от начала соответствующего звена до центра масс ко всей длине звена, через множители  $n_i$ , ( $i = 1, 2$ ), ( $0 < n_i < 1$ ) (если все звенья перенумеровать по номерам индексов у соответствующих углов).

Массы звеньев:  $m_1$ ,  $m_2$ . Моменты инерции звеньев, относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения:  $I_1$ ,  $I_2$  являются константами. При расчетах и моделировании движения биомеханической системы все вышеприведенные характеристики берутся равными соответствующим экспериментальным данным человека [12].

Записав выражение элементарной работы  $\delta A$  для сил, приложенных к системе, получаем обобщенные силы.

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -gl_1(m_2 + m_1n_1)\cos\varphi_1 + M_1 - M_2, \\
 Q_2 &= -gl_2m_2n_2\cos\varphi_2 + M_2, \\
 Q_3 &= -k_1\Delta l_1 - g(m_2 + m_1n_1)\sin\varphi_1, \\
 Q_4 &= -k_2\Delta l_2 - gm_2n_2\sin\varphi_2,
 \end{aligned} \tag{2}$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа второго рода, получим систему уравнений движения рассматриваемой модели, описывающую изменение угловых координат и длин звеньев (3)-(6).

$$(I_1 + l_1^2(m_2 + m_1n_1^2))\ddot{\varphi}_1 + l_1l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + l_1l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \\ + gl_1(m_2 + m_1n_1)\cos\varphi_1 + 2l_1(m_2 + m_1n_1^2)\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + 2l_1m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 - \\ - l_1m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{l}_2 = M_1 - M_2, \quad (3)$$

$$l_1l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 + (I_2 + m_2l_2^2n_2^2)\ddot{\varphi}_2 - l_1l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 + \\ + gl_2m_2n_2\cos\varphi_2 + 2l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + 2l_2m_2n_2^2\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 + \\ + l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{l}_1 = M_2, \quad (4)$$

$$l_2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - l_1(m_2 + m_1n_1^2)\dot{\varphi}_1^2 - l_2m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \\ + g(m_2 + m_1n_1)\sin\varphi_1 + 2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{l}_2\dot{\varphi}_2 + (m_2 + m_1n_1^2)\ddot{l}_1 + \\ + m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{l}_2 = -k_1\Delta l_1, \quad (5)$$

$$-l_1m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 - l_1m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - l_2m_2n_2^2\dot{\varphi}_2^2 + gm_2n_2\sin\varphi_2 - \\ - 2m_2n_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{l}_1\dot{\varphi}_1 + m_2n_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{l}_1 + m_2n_2^2\ddot{l}_2 = -k_2\Delta l_2, \quad (6)$$

Первые два уравнения описывают изменение угловых координат, вторые два – изменение длин стержней.

Общее решение системы уравнений движения зависит от 8 произвольных постоянных. Чтобы однозначно определить движение, требуется задать начальные условия. Для угловых координат формулы (7), для колебаний длин звеньев – (8).

$$\varphi_1|_{t=0} = \varphi_{1_0}; \varphi_2|_{t=0} = \varphi_{2_0}; \dot{\varphi}_1|_{t=0} = \omega_{1_0}; \dot{\varphi}_2|_{t=0} = \omega_{2_0}; \quad (7)$$

$$l_1|_{t=0} = l_{1_0}; l_2|_{t=0} = l_{2_0}; \dot{l}_1|_{t=0} = \dot{l}_{1_0}; \dot{l}_2|_{t=0} = \dot{l}_{2_0}; \quad (8)$$

Таким образом, описана динамика модели экзоскелета с двумя подвижными звеньями.

### **Сравнение различных методов составления дифференциальных уравнений движения**

Сравнительная таблица методов, использованных при составлении дифференциальных уравнений движения и предложенного рекуррентного метода, имеет вид (табл. 1).

Табл. 1. Сравнение различных методов составления дифференциальных уравнений движения

Метод \ Операция	Общие теоремы динамики [13]	Уравнения Лагранжа второго рода [14]	Алгоритм, предложенный в данной статье	Рекуррентный метод [15]
Дифференцирование, в том числе частные производные и повторное	Да ( $6n$ )	Да ( $4n$ )	Да, основные затраты времени	Нет
Решение системы линейных уравнений	Да ( $2n$ неизвестных), основные затраты времени	Нет	Нет	Нет
Упрощение	Да	Да, 2 раза при вычислении кинетической энергии и записи самих уравнений, основные затраты времени	Да	Нет
Операции умножения, в том числе и матричного	Да	Да	Да, основные затраты времени	Да, не зависят от количества звеньев
Операции сложения и вычитания	Да	Да	Да	Да

*Примечание:* в скобках, где возможно оценить, указано количество соответствующих операций, необходимое для записи дифференциальных уравнений системы с  $n$  звеньями переменной длины.

Табл.2. Сравнение времени составления дифференциальных уравнений движения для трехзвенной модели экзоскелета различными методами с помощью системы компьютерной математики «Mathematica»

Метод	Время, с.
Общие теоремы динамики	1,642
Уравнения Лагранжа второго рода	12,125
Алгоритм, предложенный в данной статье	1,209
Рекуррентный метод	0,141

Из таблицы следует, что для составления дифференциальных уравнений движения стержневых механических систем наиболее эффективными и рациональным являются специально разработанный в работе [15] рекуррентный метод.

**Заключение.** Благодаря разработанным алгоритмам, открывается возможность автоматизированного проектирования двумерных и трехмерных моделей экзоскелетов и антропоморфных роботов с большим количеством звеньев, совершенствуя их и приближая их движения к движениям человека.

## РЕЗЮМЕ

В работе впервые предложен алгоритм для построения дифференциальных уравнений движения с использованием локальных систем координат, описывающих динамику антропоморфных систем с деформируемыми звеньями. Благодаря полученным результатам появляется возможность автоматизировать процесс записи дифференциальных уравнений движения. При-

веден практический пример составления уравнений для модели с двумя телескопическими шарнирно соединенными подвижными звеньями. Проведен сравнительный анализ различных алгоритмов составления дифференциальных уравнений движения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов, Д.Ю. Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел / Д.Ю. Погорелов // Теория и системы управления (Известия АН). - 2005. - №04. - С. 5-15.
2. Голубев, Ю. Ф. Компьютерное моделирование шагающих роботов / Ю. Ф. Голубев, Д. Ю. Погорелов // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4, № 2. – С. 525 – 534.
3. Журавков, М. А. Использование пакетов ANSYS WORKBENCH, ADAMS, VISUAL NASTRAN и Pro/Engineer для исследования механики роботов / М. А. Журавков, О. В. Громыко, А. А. Царева // Информатизация образования – 2010: педагогические аспекты создания информационно-образовательной среды: материалы междунар. науч. конф. (Минск, 27-30 окт. 2010 г.) / отв. ред. И. А. Новик. – Минск : БГУ, 2010. – С. 209-214.
4. <http://www.umlabor.ru/>
5. Величенко, В. В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники / А. В. Величенко. – М. : Наука, 1988. – 280 с.
6. Ивович, В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем / В.А. Ивович. – М. : Машиностроение. – 1981. – 183 с.
7. Корнев, Г. В. Введение в механику человека / Г.В. Корнев. – М.: Наука, 1977. – 264с.
8. Попов, Е. П. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
9. Формальский, А. М. Перемещение антропоморфных механизмов / А.М. Формальский. – М. : Наука, 1982. – 368 с.
10. Голубев, Ю. Ф. Функция Апеля в динамике систем твердых тел / Ю. Ф. Голубев // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2014. – № 58. – 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-58>
11. Черноусько, Ф. Л. Методы управления нелинейными механическими системами. / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
12. Чигарев, А. В. Биомеханика: учебник / А. В. Чигарев, Г. И. Михасев, А. В. Борисов. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.
13. Борисов, А. В. Применение системы компьютерной математики «Mathematica» для составления уравнений движения антропоморфного механизма с использованием общих теорем динамики / А. В. Борисов // Известия Тульского государственного университета. Серия : Естественные науки. – 2010. – Вып. 2. – С. 163-172.
14. Borisov, A. V. Twelve-Link Exoskeleton with Biological Endoskeleton Properties / A. V. Borisov, L. V. Konchina, A. V. Chigarev // Journal of Machinery Manufacturing and Automation. – Sept. 2015, Vol. 4 Iss. 3, PP. 23-37. Режим доступа: <http://www.academicpub.org/jmma/paperInfo.aspx?PaperID=16611>
15. Чигарев, А. В. Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический журнал. – Минск, БНТУ. – 2015. – Вып. 30. – С. 70-81.

## SUMMARY

*The developed algorithm for constructing differential equations of motion using a local coordinate system describing the dynamics of anthropomorphic systems with deformable links. Due to obtained results it is possible to automate the process of writing differential equations of motion. Practical example of writing equations for the model with two telescopic swivel United movable links. A comparative analysis of different algorithms for composing differential equations of motion.*

**E-mail:** [chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)  
[borisowandrej@yandex.ru](mailto:borisowandrej@yandex.ru)

Поступила в редакцию 07.10.2015