

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ТРЕХ ПЛАНАРНЫХ ПОЗИЦИОНЕРАХ

к.т.н. Дайняк И.В., д.т.н. Карпович С.Е., студ. Войтов А.Ю.,
студ. Кузнецов В.В.

УО «Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники», Минск

Введение. Система перемещений на трех планарных позиционерах

Рассматриваемая в статье система перемещений (рисунок 1) представляет собой пространственный механизм, кинематическая цепь которого состоит из семи подвижных звеньев ($n = 7$). Из них три входных или ведущих звена 1, 2, 3 в виде индукторов планарных позиционеров [1], каждый из которых, являясь подвижным элементом соответствующего привода, обеспечивает любое задаваемое сочетание двух ортогональных перемещений по координатам x и y , принимаемым вдоль зубцов в соответствии с ортогональной нарезкой статора O . Выходным звеном механизма является платформа 7 в виде треугольной площадки, сложное движение которой соответствует назначению механизма и кинематическому описанию технологической операции.

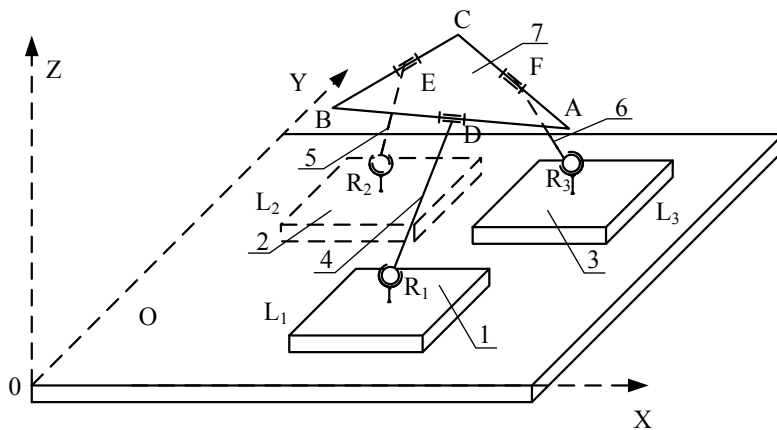


Рис. 1. Система перемещений на трех планарных позиционерах:
1, 2, 3 – планарные позиционеры; 4, 5, 6 – шатуны; 7 – подвижная платформа

В механизме также присутствуют промежуточные подвижные звенья 4, 5, 6, называемые шатунами, которые структурно и кинематически связывают подвижную платформу 7 и ведущие звенья 1, 2, 3. В кинематической цепи рассматриваемого механизма все подвижные звенья 1, 2, ..., 7 и неподвижное O связаны в определенном порядке кинематическими парами:

- сферическими R_1, R_2, R_3 , относящимися к парам третьего класса;
- плоскостными L_1, L_2, L_3 , относящимися к парам четвертого класса;
- вращательными D, E, F .

За счет именно такого сочетания кинематических пар и в такой последовательности, как представлено на рис. 1, этот механизм позволяет выполнять перемещение подвижной платформы относительно неподвижной системы $OXYZ$, связанной с неподвижным основанием (статором), с шестью степенями свободы.

Для рассматриваемой системы перемещений с шестью степенями свободы для алгоритмизации ее системы управления необходимо решать известные в теории механизмов и машин две задачи кинематики: прямую и обратную, которые для рассматриваемого в статье механизма формулируются следующим образом:

– прямая задача кинематики состоит в определении параметров $x_P, y_P, z_P, \varphi_P, \theta_P, \psi_P$ [2, 3], определяющих положение и ориентацию площадки в пространстве \mathbf{R}^3 , в зависимости от задаваемых ортогональных координат или перемещений индукторов планарных приводов 1, 2, 3;

– обратная задача кинематики состоит в определении кинематических параметров движения (координат x, y перемещений) приводов планарных позиционеров 1, 2, 3 в зависимости от положения и ориентации площадки.

Прямая задача кинематики

Для алгоритмизации решения прямой задачи кинематики рассмотрим расчетную геометрическую модель системы перемещений, представленную геометрическим местом точек, характеризующим его текущую конфигурацию. Обозначим подвижную платформу механизма вершинами A, B и C , образующих треугольник ABC , которые, в свою очередь, получены пересечением осей соответствующих кинематических пар (рис. 2).

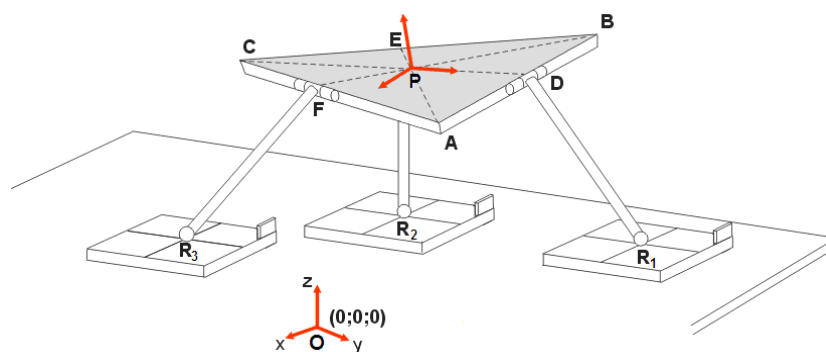


Рис. 2. Геометрическая модель системы перемещений

В свою очередь, кинематические подвижности системы перемещений задаются точками D, E, F с соответствующими векторами подвижностей $\overline{AB}, \overline{BC}$ и \overline{CA} . Подвижные звенья механизма в принятой геометрической модели представлены линейными подвижными звеньями DR_1, ER_2 и FR_3 .

При формировании расчетной математической модели были приняты следующие обозначения:

$$AB = BC = CA = a;$$

$$DR_1 = ER_2 = FR_3 = l.$$

С учетом этого, длины высот или медиан равностороннего треугольника ABC будут равны $AE = BF = CD = a\sqrt{3}/2$. В свою очередь $AP = BP = CP = a\sqrt{3}/3$; $DP = EP = FP = a\sqrt{3}/6$, а координаты точек D, E, F будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} x_D &= \frac{1}{2}(x_A + x_B); & y_D &= \frac{1}{2}(y_A + y_B); & z_D &= \frac{1}{2}(z_A + z_B); \\ x_E &= \frac{1}{2}(x_B + x_C); & y_E &= \frac{1}{2}(y_B + y_C); & z_E &= \frac{1}{2}(z_B + z_C); \\ x_F &= \frac{1}{2}(x_C + x_A); & y_F &= \frac{1}{2}(y_C + y_A); & z_F &= \frac{1}{2}(z_C + z_A). \end{aligned} \quad (1)$$

Окончательные уравнения связей, накладываемые на точечное представление текущей конфигурации механизма (рис. 2), определяемой взаимным расположением кинематических пар и звеньев, будут следующими:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{R1} - x_D)^2 + (y_{R1} - y_D)^2 + (z_{R1} - z_D)^2 = l^2; \\ (x_{R2} - x_E)^2 + (y_{R2} - y_E)^2 + (z_{R2} - z_E)^2 = l^2; \\ (x_{R3} - x_F)^2 + (y_{R3} - y_F)^2 + (z_{R3} - z_F)^2 = l^2; \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = a^2; \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = a^2; \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = a^2; \\ (x_{R1} - x_D) \cdot (x_B - x_A) + (y_{R1} - y_D) \cdot (y_B - y_A) + (z_{R1} - z_D) \cdot (z_B - z_A) = 0; \\ (x_{R2} - x_E) \cdot (x_C - x_B) + (y_{R2} - y_E) \cdot (y_C - y_B) + (z_{R2} - z_E) \cdot (z_C - z_B) = 0; \\ (x_{R3} - x_F) \cdot (x_A - x_C) + (y_{R3} - y_F) \cdot (y_A - y_C) + (z_{R3} - z_F) \cdot (z_A - z_C) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

При решении системы (2) необходимо учитывать, что в соответствии с рисунком 2 в рассматриваемом механизме $z_{R1} = z_{R2} = z_{R3} = 0$.

В результате имеем систему (2) из 9 уравнений с 9-ю неизвестными, в которой и уравнения, и неизвестные являются взаимно независимыми. Это, в отличие от других известных алгоритмов [6, 7], существенно сокращает и упрощает численное решение прямой задачи кинематики, которая имеет входными параметрами девять координат точек A, B, C , однозначно определяющих положение и ориентацию площадки 7 в пространстве \mathbf{R}^3 .

При необходимости девять координат точек A, B, C могут быть пересчитаны в шесть независимых параметров движения платформы $x_P, y_P, z_P, \varphi_P, \theta_P, \psi_P$ [4]. Для этого необходимо получить матрицу четвертого порядка M_{0P} , элементы которой представляют в однородных координатах положение и ориентацию системы координат с началом в точке P , связанной с подвижной платформой (рисунок 2). В общем случае матрица M_{0P} имеет следующий вид:

$$M_{0P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_P \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_P \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) являются направляющими косинусами углов, образованных всеми осями подвижной системы координат, связанной с платформой, с осями неподвижной системы координат статора $OXYZ$; а x_P, y_P, z_P – координаты точки P в неподвижной системе координат $OXYZ$.

По известным координатам точек A, B, C однозначно определяются все элементы матрицы M_{0P} по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{x_B - x_A}{l_{AB}}; & a_{12} &= \frac{y_B - y_A}{l_{AB}}; & a_{13} &= \frac{z_B - z_A}{l_{AB}}; \\ a_{21} &= \frac{x_P - x_C}{l_{CP}}; & a_{22} &= \frac{y_P - y_C}{l_{CP}}; & a_{23} &= \frac{z_P - z_C}{l_{CP}}; \\ a_{31} &= a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}; & a_{32} &= a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}; & a_{33} &= a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}; \\ x_P &= \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; & y_P &= \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; & z_P &= \frac{z_A + z_B + z_C}{3}, \end{aligned}$$

где

$$l_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2};$$

$$l_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 + (z_P - z_C)^2}.$$

Таким образом, нами выполнена алгоритмизация решения прямой задачи кинематики, которая свелась к нахождению положения системы координат платформы в зависимости от положений трех позиционеров, задаваемых в неподвижной системе координат.

Обратная задача кинематики

Для решения обратной задачи кинематики рассматриваемого механизма нами предложен метод на основе аналитической геометрии, позволяющий получить однозначные функции, связывающие координаты позиционера с положением и ориентацией платформы. Полученные функции при этом легко преобразуются в параметрические и легко реализуются в системе управления рассматриваемого пространственного механизма.

Идея метода основана на кинематике механизма (рис. 3), в котором подвижности звеньев DR_1 , ER_2 и FR_3 в кинематических соединениях D , E и F соответственно могут быть описаны соответствующими подвижными секущими плоскостями CDR_1 , AER_2 и BFR_3 , пересечения которых с неподвижной плоскостью рабочей поверхности статора полностью определяют все множество геометрических мест возможных положений позиционеров, задаваемых точками R_1 , R_2 , R_3 .

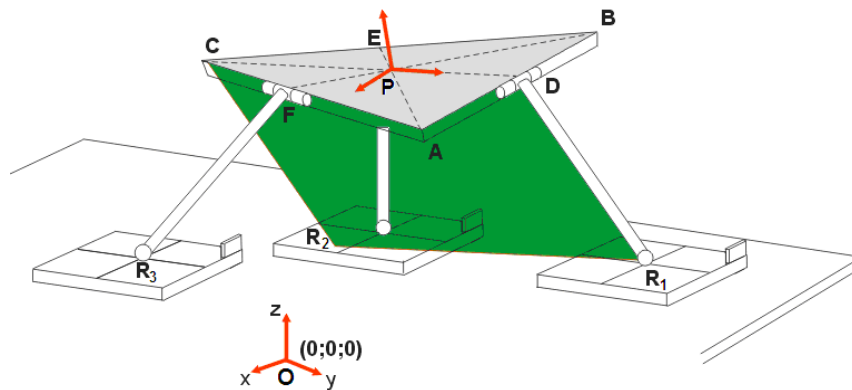


Рис. 3. Расчетная модель решения обратной задачи кинематики

Конкретный выбор точек R_1 , R_2 , R_3 на плоскости обеспечивается заданием длин промежуточных звеньев R_1D , R_2E и R_3F . В дальнейшем будем рассматривать случай равных между собой длин, когда $R_1D = R_2E = R_3F$.

Для задания секущих плоскостей в качестве задающего математического параметра используется соответствующий вектор нормали, который на основании рисунка 3 совпадает с соответствующей осью вращения подвижного соединения D , E или F . Так как в рассматриваемой обратной задаче кинематики координаты точек A , B , C принимаются заданными, то в качестве соответствующих векторов нормали могут быть приняты, соответственно, для подвижного соединения D – вектор \overrightarrow{AB} , для E – вектор \overrightarrow{BC} , для F – вектор \overrightarrow{CA} , которые имеют следующие координаты в базисе, связанном с неподвижным основанием (статором) механизма:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A); \\ \overrightarrow{BC} &= (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B); \\ \overrightarrow{CA} &= (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C).\end{aligned}$$

С учетом полученных векторов нормали и координат точек D , E и F подвижной площадки, можно записать уравнения трех секущих плоскостей. Общее уравнение плоскости π_1 , проходящей через точку D , имеет вид

$$(x-x_D) \cdot (x_B-x_A) + (y-y_D) \cdot (y_B-y_A) + (z-z_D) \cdot (z_B-z_A) = 0$$

или

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

где $A_1 = x_B - x_A$; $B_1 = y_B - y_A$; $C_1 = z_B - z_A$; $D_1 = -A_1x_D - B_1y_D - C_1z_D$.

Для нахождения геометрических мест пересечения секущих плоскостей с неподвижной плоскостью статора необходимо рассмотреть совместно уравнение соответствующей секущей плоскости и уравнение плоскости статора, которое в неподвижной системе координат статора имеет вид $z = 0$. Уравнение прямой линии L_1 пересечения плоскости π_1 с плоскостью статора найдется из условия

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ z = 0, \end{cases}$$

или в виде общего уравнения

$$L_1: A_1x + B_1y + D_1 = 0. \quad (4)$$

Общее уравнение прямой пересечения второй секущей плоскости π_2 с плоскостью статора имеет вид

$$L_2: A_2x + B_2y + D_2 = 0, \quad (5)$$

где $A_2 = x_C - x_B$; $B_2 = y_C - y_B$; $C_2 = z_C - z_B$; $D_2 = -A_2x_E - B_2y_E - C_2z_E$.

А общее уравнение прямой пересечения третьей секущей плоскости π_3 с плоскостью статора имеет вид

$$L_3: A_3x + B_3y + D_3 = 0, \quad (6)$$

где $A_3 = x_A - x_C$; $B_3 = y_A - y_C$; $C_3 = z_A - z_C$; $D_3 = -A_3x_F - B_3y_F - C_3z_F$.

При конкретном фиксированном значении l длин звеньев R_1D , R_2E , R_3F координаты точек R_1 , R_2 , R_3 найдутся из решения следующих простых систем уравнений, составленных из выражений для расчета длин звеньев R_1D , R_2E , R_3F и уравнений (4) – (6) для прямых L_1 , L_2 , L_3 :

$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_D - x_{R1})^2 + (y_D - y_{R1})^2 + (z_D - z_{R1})^2}; \\ A_1 \cdot x_{R1} + B_1 \cdot y_{R1} + D_1 = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_E - x_{R2})^2 + (y_E - y_{R2})^2 + (z_E - z_{R2})^2}; \\ A_2 \cdot x_{R2} + B_2 \cdot y_{R2} + D_2 = 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_F - x_{R3})^2 + (y_F - y_{R3})^2 + (z_F - z_{R3})^2}; \\ A_3 \cdot x_{R3} + B_3 \cdot y_{R3} + D_3 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, нами разработана алгоритмизация решения обратной задачи кинематики, которая свелась к нахождению позиционных функций планарных приводов по заданному положению и ориентации платформы.

Моделирование решения прямой и обратной задач кинематики в среде MATLAB

Для моделирования прямой задачи кинематики рассматриваемого исполнительного механизма в среде MATLAB на основе предложенного алгоритма нами была разработана программа, которая осуществляет численный поиск решения. Расчет начинается от точки, определяемой входным вектором начальных значений, и ведется в соответствии с заданным методом оптимизации. Система нелинейных уравнений представлена совокупностью функциональных уравнений, содержащих искомые переменные x_A , y_A , z_A , x_B , y_B , z_B , x_C , y_C , z_C и заданные входные координаты x_{R1} , y_{R1} , z_{R1} , x_{R2} , y_{R2} , z_{R2} , x_{R3} , y_{R3} , z_{R3} .

z_{R3} . Процесс решения системы нелинейных уравнений происходит до тех пор, пока значение оценочной функции в процессе итерационного поиска решений не станет меньше заданной точности или изменение значений искомых переменных не станет меньше заданной предельно допустимой величины.

В результате решения прямой задачи кинематики для каждого j -го набора координат позиционеров получаем последовательность точек траектории платформы механизма в виде координат $x_j, y_j, z_j, \varphi_j, \theta_j, \psi_j$. При этом в качестве начального приближения для текущего шага целесообразным является использование решения на предыдущем шаге, так как два последовательных решения прямой задачи кинематики при построении программируемых движений лежат очень близко друг к другу.

Разработанный алгоритм решения обратной задачи кинематики был использован при моделировании в среде MATLAB рабочей области перемещений платформы в трехмерном пространстве (рис. 4). Графическое отображение рабочей области, получаемое в результате моделирования, представляет собой область достижимых координат центра платформы при заданных конструктивных параметрах системы перемещений.

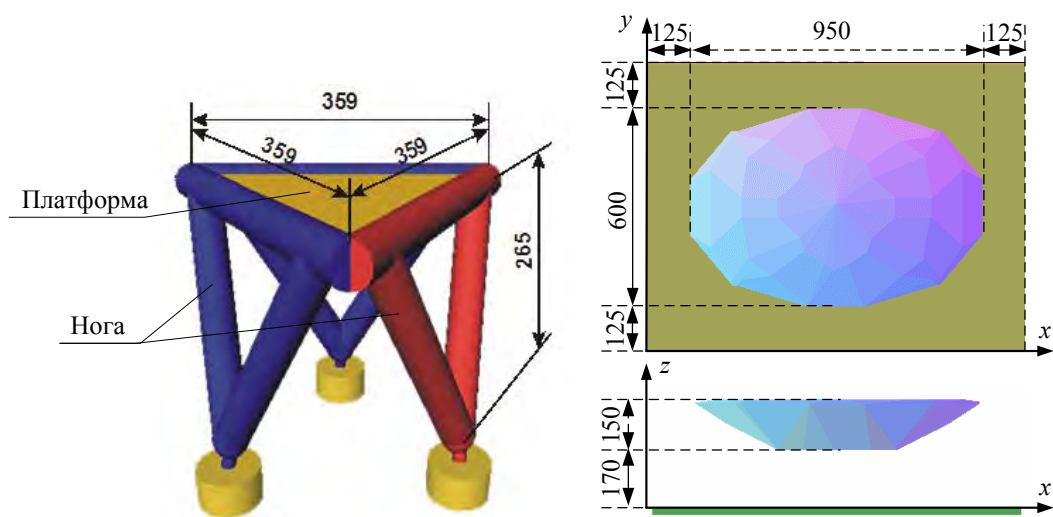


Рис. 4. Рабочая область пространственного механизма: слева – конструктивные параметры; справа – множество достижимых позиций

Определение рабочей области производилось по следующему алгоритму: задавались фиксированные углы Эйлера $\varphi_0, \theta_0, \psi_0$ ориентации платформы и начальные координаты ее центра x_0, y_0, z_0 , а затем путем решения обратной задачи кинематики на основе аналитического алгоритма из систем уравнений (7) – (9) определялись начальные положения планарных позиционеров на статоре. Далее, задавая позиции платформы приращения по координатам x и y в плоскостях, параллельных плоскости статора, выполнялось решение обратной задачи кинематики. Если для текущего положения платформы существовали соответствующие положения планарных позиционеров, то координаты платформы заносились в массив достижимых положений. При этом в расчетах учитывались геометрические размеры планарных позиционеров, размеры статора и конструктивные ограничения величины углов наклона шарниров, связывающих платформу с позиционерами.

Предложенный алгоритм решения обратной задачи кинематики для рассматриваемой системы перемещений, кроме нахождения рабочей области, позволяет решать широкий спектр задач кинематики, таких как оценка точности и калибровка пространства.

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются вопросы решения задач кинематики для пространственной мехатронной системы перемещений на базе механизма параллельной кинематики с шестью степенями свободы и трех прецизионных планарных приводах прямого действия. Алгоритмизация решения осуществлялась на основе методов аналитической геометрии, что позволило с помощью разработанной программы в среде MATLAB рассчитать рабочую область системы перемещений в зависимости от ее кинематических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жарский, В.В. Планарный привод прямого действия для многокоординатной системы перемещений / В.В. Жарский // Доклады БГУИР. – 2007. – № 6. – С. 44–49.
2. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
3. Имитационное моделирование голономных и мобильных автоматических систем / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : Белпринт, 2008. – 212 с.
4. Моделирование механизмов параллельной кинематики в среде MATLAB/Simulink / С.Е. Карпович [и др.]. – Минск : Бестпринт, 2013. – 153 с.
5. Ahranovich, A. Multicoordinate Positioning System Design and Simulation / A. Ahranovich, S. Karpovich, K. Zimmermann // Computer science meets automation : 52. Int. Wissenschaftliches Kolloquium : proceedings, Ilmenau, Germany, Sep. 10–13, 2007 / Technische Universitaet Ilmenau. – Ilmenau, 2007. – Vol. I. – P. 463–468.
6. Crane, C. Kinematic analysis of robot manipulators / C. Crane, J. Duffy. – Cambridge University Press, New York. – 1998. – 429 p.
7. Zentner, J. Zur optimalen Gestaltung von Parallelkinematikmaschinen mit Planarantrieben / J. Zentner. – Ilmenau : ISLE, 2006. – 123 s.

SUMMARY

The solving of kinematic problems for spatial mechatronic motion system on the base of parallel kinematic mechanism with six degrees of freedom and three precision planar direct drives was considered. The algorithmization of solving was carried out on the base of the methods of analytic geometry, it allowed to calculate the work area of motion system depending on its kinematic parameters using the program developed in MATLAB.

E-mail: mmts@bsuir.by
dainiak@bsuir.by

Поступила в редакцию 12.10.2015