ЛИТЕЙНОЕ ПРОИЗВОДСТВО

УДК 621.74 *Поступила 15.10.2015*

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОЛИТЫХ ЗАГОТОВОК

RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODELS OF CONTINUOUS CAST INGOTS

Р. И. ЕСЬМАН, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь,
Е. И. МАРУКОВИЧ, Институт технологии металлов НАН Беларуси, г. Могилев, Беларусь

R. I. ESMAN, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus,
E. I. MARUKOVICH, Institute of Technology of Metals of National Academy of Sciences of Belarus, Mogilev, Belarus

Разработаны краевые задачи двумерного температурного поля с учетом сопряженных тепловых и гидродинамических процессов формирования непрерывнолитой заготовки. Получено численное решение задачи нестационарных температурных полей и температурных напряжений в заготовке и металлической форме в процессе их термодеформационного взаимодействия.

Boundary problems of a two-dimensional temperature fields taking into account the interfaced thermal and hydrodynamic processes of formation of continuous cast ingots are developed. The numerical solution of a problem of non-steady temperature fields and temperature tension in ingots and a in the metal form in the course of their thermodiffusional interaction is received.

Ключевые слова. *Математическая модель, термодиффузионное взаимодействие, численные методы.*

Keywords. *Mathematical model, thermodiffusional interaction, numerical methods.*

Предложены математическая модель и численное решение задачи нестационарной теплопроводности с переменными источниками теплоты, действующими на протяжении процесса затвердевания. При этом учитывается перемещение фронта фазовых превращений во времени и пространстве.

Приведено численное решение задачи сложного теплообмена при получении литых заготовок в виде слитков прямоугольного сечения в металлической форме. Ввиду двойной осевой симметрии можно ограничиться изучением тепловых процессов в слитках и кристаллизаторах, расположенных в первой координатной четверти. При расчете учитывается зазор между формирующимся слитком и кристаллизатором, образованный слоем покрытия и газовой прослойки, обусловленной усадкой материала заготовки и термическими деформациями металлической формы.

Поле температур в плите и кристаллизаторе описывается дифференциальными уравнениями:

$$c_1(T_1)\rho_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial y}\right], \quad (1)$$

$$c_2(T_2)\rho_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial y}\right], \quad (2)$$

где c_1, ρ_1, λ_1, T_1 и c_2, ρ_2, λ_2, T_2 – соответственно теплофизические характеристики и температуры заготовки и кристаллизатора.

Уравнение (1) решается в прямоугольной области ($0 \le x \le a_0$, $0 \le y \le b_0$), а уравнение (2) – в сложной области в виде угла, получаемой при вычитании из области ($0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$) области, занятой отливкой.

Сформулируем граничные и контактные условия. Контактные условия ставятся на общей границе заготовки и формы исходя из условий сопряжений.

Рассматривая теплоотдачу от заготовки к форме через двухслойную стенку (воздух + покрытие) по аналогии с одномерной задачей, граничные условия можно записать в виде

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \tag{3}$$

при $x = a_0$, $0 \le y \le b_0$;

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \tag{4}$$

при $y = b_0$, $0 \le x \le a_0$,
где $\lambda_{покр}$, $\lambda_в$ – теплопроводность покрытия и воздуха; $\delta(x, t)$ – зазор в контакте $y = b_0$ в момент времени t; $\delta(y, t)$ – зазор в контакте $x = a_0$ в момент времени t.

При записи уравнений (3), (4) учитывали только процесс теплопроводности через покрытие и процесс теплопроводности и теплоизлучения через слой воздуха. Процессом конвекции в зазоре пренебрегаем.

На осях симметрии можно записать

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0 \text{ при } x = 0.$$

Предполагая, что теплообмен с наружной поверхности формы можно представить по закону Ньютона, будем иметь

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha(T_2 - T_\infty) \text{ при } x = a,$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha(T_2 - T_\infty) \text{ при } y = b,$$

где T_∞ – температура внешней среды; α – коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности формы.

Коэффициент α определяется способом охлаждения наружной поверхности формы.

При свободном охлаждении формы в безграничном пространстве коэффициент α характеризует собой теплоотдачу свободной конвекцией и излучением: $\alpha = \alpha_к + \alpha_л$:

$$\alpha_к = f(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}),$$

$$\alpha_л = \varepsilon\sigma(T_2^2 + T_\infty^2)(T_2 + T_\infty).$$

При вынужденном охлаждении формы

$$\alpha = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}),$$

причем число Re вычисляется по толщине охладительной рубашки формы.

Начальные условия для уравнений (1), (2) запишем следующим образом:

$$T_1(x, y\ 0) = T_{1_0},$$

$$T_2(x, y\ 0) = T_{2_0},$$

где T_{1_0} – температура заливки; T_{2_0} – начальная температура равномерно прогретой формы.

Определим в качестве характерного размера длину формы a, а в качестве характерной температуры – температуру окружающей среды $T_0 = T_\infty$. Перепишем задачу в безразмерных переменных:

$$a^2 c_1 \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{7}$$

при $0 \le x \le \bar{a}_0$, $0 \le y \le \bar{b}_0$;

$$a^2 c_2 \rho_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right) \tag{8}$$

при $0 \le x \le 1$, $b_0 \le y \le \bar{b}$, $\bar{a}_0 \le x \le 1$, $0 \le y \le b_0$;

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial x} \tag{9}$$

при $x = \overline{a}_0$, $0 \le y \le \overline{b}_0$;

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial y} \tag{10}$$

при $x = b_0$, $0 \le x \le 1$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; \tag{12}$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \alpha a \upsilon \text{ при } x = 1; \tag{13}$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \alpha a \upsilon \text{ при } y = \overline{b}; \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 \text{ при } t = 0; \\ \upsilon &= \upsilon_0 \text{ при } t = 0, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где u и υ – безразмерные температуры в области I и II соответственно.

В уравнениях (9), (10) $\delta_{\text{покр}} \ne 0$, $\delta \ne 0$.

При $\delta = 0$, $\delta_{\text{покр}} \ne 0$ их следует заменить соответственно на условия:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = (u - \upsilon)\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a,$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = (u - \upsilon)\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a;$$

при $\delta_{\text{покр}} = 0$, $\delta \ne 0$ на условия

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \tag{16}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}, \tag{17}$$

наконец, при $\delta_{\text{покр}} = 0$ и $\delta = 0$ будем иметь

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial x},\ u = \upsilon,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial y},\ u = \upsilon.$$

Значения δ в равенствах (9), (10), (16), (17) определяются исходя из рассмотрения упругих деформаций формы.

В период фазового перехода уравнение (1) распадается на два уравнения, описывающие теплопроводность в жидкой и твердой фазах с добавлением условий на границе раздела фаз ξ:

$$\lambda_{1T} \operatorname{grad}(T_1)\Big|_{\xi+0} - \lambda_{1ж} \operatorname{grad}(T_1)_{\xi-0} = -\tilde{r}\tilde{\rho}\frac{d\xi}{dt}.$$

Вводя в рассмотрение δ-функцию Дирака и разрывные теплофизические коэффициенты, процесс фазового перехода можно описать с помощью одного уравнения

$$\rho_1\left[c_1 + r\delta\left(T_1 - T_{\text{ф}}\right)\right]\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}\right), \tag{18}$$

где $\rho_1, c_1, \lambda_1 = \begin{cases} \rho_{1T}, c_{1T}, \lambda_{1T} \text{ при } T_1 \prec T_ф; \\ \rho_{1ж}, c_{1ж}, \lambda_{1ж} \text{ при } T_1 \succ T_ф. \end{cases}$

Решение (18) производят путем сглаживания δ-функции и теплофизических коэффициентов, осуществляя замену фронта фазового перехода на некоторую его область $(T_ф - \Delta, T_ф + \Delta)$.

Введем в области I и II общую прямоугольную сетку, равномерную по каждой из осей, причем предположим, что контактные поверхности $x = \overline{a}_0$ и $y = -\overline{b}_0$ лежат на узлах сетки. Пусть N_1 и N_2 – число узлов по горизонтали и вертикали соответственно, тогда шаг по горизонтали $h_1 = 1/N_1$, а по вертикали $h_2 = \overline{b}/N_2$.

Предположим, что горизонтальная строка узлов на контактной поверхности имеет номер M_1, а вертикальный столбец – M_2. Будем решать задачу на фиктивной сетке с узлами:

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)h_1,\ y_i = \left(j + \frac{1}{2}\right)h_2$$

при $i = -1, 0, \ldots, N_1;\ j = -1, 0, \ldots, N_2$.

Неявные конечно-разностные уравнения, соответствующие выражениям (7)–(15), на узлах фиктивной сетки на шеститочечном шаблоне в момент времени $t = (l+1)\tau$ имеют вид

$$a^2 c_{i,j}^{(1)} \rho_{i,j}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j}^{l}}{\tau} = \frac{1}{h_1}\left(\lambda^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+1,j}^{l+1} - u_{i,j}^{l+1}}{h_1} - \lambda^{(1)}_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i-1,j}^{l+1}}{h_1}\right) + \frac{1}{h_2}\left(\lambda^{(1)}_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+1}^{l+1} - u_{i,j}^{l+1}}{h_2} - \lambda^{(1)}_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j-1}^{l+1}}{h_1}\right), \tag{19}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, M_1 - 1;\ j = 0, 1, 2, \ldots, M_2 - 1;\ l = 0, 1, 2, \ldots;$

$$a^2 c_{i,j}^{(2)} \rho_{i,j}^{(2)} \frac{\upsilon_{i,j}^{l+1} - \upsilon_{i,j}^{l}}{\tau} = \frac{1}{h_1}\left(\lambda^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\upsilon_{i+1,j}^{l+1} - \upsilon_{i,j}^{l+1}}{h_1} - \lambda^{(2)}_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\upsilon_{i,j}^{l+1} - \upsilon_{i-1,j}^{l+1}}{h_1}\right) + \frac{1}{h_2}\left(\lambda^{(2)}_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\upsilon_{i,j+1}^{l+1} - \upsilon_{i,j}^{l+1}}{h_2} - \lambda^{(2)}_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\upsilon_{i,j}^{l+1} - \upsilon_{i,j-1}^{l+1}}{h_2}\right),$$

где $\left.\begin{matrix} i = 0, 1, 2, \ldots N_1 - 1 \\ j = M_2, M_2 + 1, \ldots N_2 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} i = M_1, M_1 + 1, \ldots N_1 - 1 \\ j = 0, 1, 2, \ldots M_2 - 1 \end{matrix}\right\}\ l = 0, 1, 2;$

$$-\lambda^{(1)}_{M_1-\frac{1}{2},j} \frac{u_{M_1,j}^{l+1} - u_{M_1,j-1}^{l+1}}{h_1} = -\lambda^{(2)}_{M_1-\frac{1}{2},j} \frac{\upsilon_{M_1,j}^{l+1} - \upsilon_{M_1-1,j}^{l+1}}{h_1} = \kappa_j \left(\frac{u_{M_1,j}^{l+1} + u_{M_1,j-1}^{l+1}}{2} - \frac{\upsilon_{M_1,j}^{l+1} + \upsilon_{M_1-1,j}^{l+1}}{2}\right), \tag{20}$$

где $j = -1, 0, 1, \ldots M_2 - 1;$

$$-\lambda^{(1)}_{i,M_2-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,M_2}^{l+1} - u_{i,M_2-1}^{l+1}}{h_2} = -\lambda^{(2)}_{i,M_2-\frac{1}{2}} \frac{\upsilon_{i,M_2}^{l+1} - \upsilon_{i,M_2-1}^{l+1}}{h_2} = \kappa_i \left(\frac{u_{i,M_2}^{l+1} + u_{i,M_2-1}^{l+1}}{2} - \frac{\upsilon_{i,M_2}^{l+1} + \upsilon_{i,M_2-1}^{l+1}}{2}\right), \tag{21}$$

где $i = -1, 0, 1, \ldots M_1 - 1;$

$$\kappa_j = \frac{\frac{\lambda_{покр}}{\delta_{покр}} a \left(\frac{\lambda_в}{\delta_j} + \alpha_{л\,j}\right)}{\frac{\lambda_{покр}}{\delta_{покр}} + \frac{\lambda_в}{\delta_в} + \alpha_{л\,j}} \text{ при } \delta_{покр} \neq 0 \text{ и } \delta_в \neq 0; \tag{22}$$

$$\kappa_j = \frac{\lambda_{покр}}{\delta_{покр}} a \text{ при } \delta_{покр} \neq 0,\ \delta = 0;$$

$$\kappa_j = \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_j} + \alpha_{\text{л}_j} \ \text{ при } \ \delta_{\text{покр}} = 0,\ \delta \neq 0;$$

$$\sigma_i = -\beta_i E\left[\left(\frac{\upsilon_{i,0} + \upsilon_{i,-1}}{2} + 1\right)T_0 - T_{2_0}\right] + \frac{1}{N_1 - M_1}\sum_{i=M_1}^{N_1} \varepsilon_i \beta_i E\left[\left(\frac{\upsilon_{i,0} + \upsilon_{i,-1}}{2} + 1\right)T_0 - T_{2_0}\right],$$

$$\sigma_j = -\beta_j E\left[\left(\frac{\upsilon_{0,j} + \upsilon_{-1,j}}{2} + 1\right)T_0 - T_{2_0}\right] + \frac{1}{N_2 - M_2}\sum_{j=M_2}^{N_2} \varepsilon_j \beta_j E\left[\left(\frac{\upsilon_{0,j} + \upsilon_{-1,j}}{2} + 1\right)T_0 - T_{2_0}\right],$$

где β_i и β_j – коэффициенты температурного расширения материала вычисляются по температуре $(\upsilon_{i,0} + \upsilon_{i,-1})/2$ и $(\upsilon_{0,j} + \upsilon_{-1,j})/2$ соответственно. При вычислении интегралов использовали формулу трапеций.

В специальных технологиях литья в процессе движения расплава в полости формы происходит охлаждение жидкого металла и затвердевание за счет теплоотвода в стенку металлической формы (матрицы) или в неметаллическую форму. Вследствие этого вязкость металла непрерывно изменяется по времени, что определяет нестационарный характер течения. Другой особенностью рассматриваемой задачи является наличие фазового перехода в жидком металле (затвердевания). Благодаря теплоотдаче в форму температура расплава непрерывно уменьшается, а вязкость возрастает. При дальнейшем охлаждении на поверхностях формы образуется твердая корочка затвердевшего металла и происходит перемещение фронта кристаллизации в глубь заготовки.

Система дифференциальных уравнений движения расплава должна включать уравнение энергии, уравнение неразрывности, уравнение закона сохранения количества движения. Уравнение энергии (теплопроводности), описывающее распределение температуры в движущемся металле, а также по сечению кристаллизатора, имеет вид

$$c_i \rho_i \frac{dT_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z}\right), \tag{23}$$

где i = 1 – отливка, i = 2, 3 – форма.

Для отливки (i = 1) полная производная

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \nu_x \frac{\partial T}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial T}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

характеризует локальное и конвективное изменение температуры.

Для формы уравнение (23) переходит в уравнение теплопроводности при $\nu_x = \nu_y = n_z = 0$. В процессе затвердевания заготовки в уравнении вместо теплоемкости c_1 используется величина эффективности теплоты кристаллизации.

Уравнение неразрывности (сплошности) выводится из закона сохранения массы. Вследствие несжимаемости жидкого металла (ρ = const) уравнение неразрывности учитывает только потери расхода на заполнение пустот усадочного происхождения:

$$div\vec{\nu} = \beta \frac{dm}{dt}, \tag{24}$$

где $\vec{\nu}$ – вектор скорости потока; m – относительное содержание жидкой фазы в момент t; β – относительная величина объемной усадки.

Как было отмечено, при течении расплава в форме по мере отвода теплоты вязкость металла возрастает. Следовательно, вязкость не является постоянной величиной, а зависит от температуры и координат $\mu = f(T, x, y, z)$. В связи с этим запишем уравнение движения потока охлаждающегося расплава в виде

$$\rho \frac{d\vec{\nu}}{dt} = \rho g - \nabla p + \frac{\partial \vec{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\tau}_z}{\partial z}. \tag{25}$$

В качестве объекта исследования рассмотрим наиболее характерное сечение сложной осесимметричной заготовки. Расчетная область представляет собой полость кольцевого канала переменного сечения с внутренним выступом, в которой происходит движение и затвердевание расплава при несимметричных условиях охлаждения: на внутренней поверхности металл затвердевает за счет теплоотвода в песчаный стержень, на наружной поверхности – за счет теплоотвода в кристаллизатор (матрицу).

При расчете затвердевания металла теплоту кристаллизации введем в теплоемкость в точках, занятых областью фазового превращения. При этом предполагаем, что заполнение формы осуществляется сплошным ламинарным потоком: в начальный момент времени вязкость, плотность, температура расплава имеют постоянные значения по всему объему, а между потоком и поверхностью формы имеется плотный контакт. По мере охлаждения металла вязкость будем рассматривать как переменную величину во всей области течения $\mu = \mu(T)$. С этой целью воспользуемся зависимостью эффективной вязкости от температуры для высокопрочного алюминиевого сплава.

При конечно-разностной аппроксимации уравнений переноса (движения) воспользуемся методом контрольного объема, широко применяемым при решении задач течения и конвективного переноса. Разбивка расчетной области на контрольные объемы производится следующим образом. Вначале наносится нерегулярная сетка с узлами на пересечении координатных линий. Затем каждый узел связывают с контрольным объемом, грани которого проходят посередине между двумя смежными узлами. Исходная система дифференциальных уравнений интегрируется по каждому объему при замене подынтегральных выражений соответствующими интерполяционными многочленами, которые описывают изменение параметров между узловыми точками. В результате для данной системы находят дискретный аналог, который связывает значение параметра в данной узловой точке с его значениями в соседних узлах. Точность конечно-разностной схемы в значительной степени зависит от вида интерполяционного полинома.

На примере охлаждения и затвердевания заготовки сложной конфигурации исследованы процессы гидродинамики и теплообмена для нестационарного режима, начиная со стадии заполнения полости формы расплавом и заканчивая затвердеванием заготовки. Результаты расчетов по разработанному алгоритму представлены в виде распечаток температурных полей, полей скоростей и давлений в различных сечениях струи жидкого металла при его движении в полости формы.

Литература

1. Есьман Р. И., Жмакин Н. П., Шуб Л. И. Расчеты процессов литья. Мн.: Вышэйш. шк., 1977.

2. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

3. Есьман Р. И., Марукович Е. И. Численное решение краевой задачи нестационарной теплопроводности // Весці НАН Беларусі. Сер.-фіз. тэхн. навук. 2012. № 3. С. 5–9.

References

1. Es'man R. I., Zhmakin N. P., Shub L. I. *Raschety processov lit'ja* [Calculation of casting processes]. Minsk, Vyshejshaya shkola Publ., 1977.

2. Polyanin A. D., Zaycev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelinejnyh uravneniy matematicheskoy fiziki i mehaniki* [Metods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moskow, Fizmatlit Publ., 2005.

3. Es'man R. I., Marukovich E. I. Chislennoe reshenie klaevoy zadachi nestacionarnoy teploprovodnosti [Numerical solution of boundary problem of non-stationary heat conduction]. *Vesci Natsianalnay akademii nauk Belarusi, serija fiziko-tehnicheskih nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2012, no. 3, pp. 5–9.

Сведения об авторах

Есьман Руслан Иосифович, Белорусский национальный технический университет, пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь. Тел. +375 (29) 378-25-07.

Марукович Евгений Игнатьевич, Институт технологии металлов НАН Беларуси, ул. Бялыницкого-Бирули, 11, 212030, г. Могилев, Беларусь. Тел. +375 (222) 28-06-20.

Information about the authors

Es'man Ruslan, Belarusian National Technical University, 65, Nezavisimosti ave., Minsk, 220013, Belarus. Tel. +375 (29) 378-25-07.

Marukovich Evgeny, Institute of Technology of Metals of National Academy of Sciences of Belarus, Bialynitskogo-Biruli str., Mogilev, 212030, Belarus. Tel. +375 (222) 28-06-20.