Автоматика и телемеханика, № 4, 2015

© 2015 г. **А.В. МЕТЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (ametelskii@gmail.com)**
(Белорусский национальный технический университет, Минск)

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПОМОЩИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Для спектрально управляемой линейной автономной системы запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями строится статическая обратная связь по состоянию, обеспечивающая произвольный конечный спектр замкнутой системы. За счет выбора последнего замкнутая система может быть сделана асимптотически устойчивой. Результаты проиллюстрированы примером.

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - jh) + bu(t), \quad t > 0, \tag{1}$$
$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0].$$

Здесь $x = [x_1, \ldots, x_n]'$ – n-вектор-столбец решения системы (1) ($n \geqslant 2$); $0 < h$ – постоянное запаздывание; A_j – постоянные ($n \times n$)-матрицы ($j = \overline{0, m}$); b – постоянный n-вектор; начальная функция η из пространства кусочно-непрерывных n-вектор-функций; u – скалярное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих $'$ обозначает операцию транспонирования. Считаем, что в уравнении (1) $b = e_n = [0; \ldots; 0; 1]'$. Этого всегда можно достичь невырожденным преобразованием переменных $\breve{x} = Ux$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел), обозначим:

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} A_j \lambda^j,$$

$W(p, e^{-ph}) = pE_n - A(e^{-ph})$ – характеристическая матрица ($p \in \mathbb{C}$, E_n – единичная матрица n-го порядка), $w(p, e^{-ph}) = |W(p, e^{-ph})|$ – характеристический квазиполином системы (1). Здесь и далее $|W|$ – определитель произвольной квадратной матрицы W.

Множество корней $\sigma = \{p \in \mathbb{C} | w(p, e^{-ph}) = 0\}$ характеристического уравнения называют спектром системы (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p, e^{-ph})$ действительны, то комплексные числа входят в σ сопряженными парами: σ – самосопряженный спектр.

В классе задач управления системой (1) регулятором по типу обратной связи центральное место занимает задача FSA (finite spectrum assignment) – назначения замкнутой системе произвольного конечного самосопряженного спектра. Эта задача возникла [1] в связи с задачей стабилизации [2, 3] системы с запаздыванием. Системы с конечным спектром по сути – конечномерные системы, поэтому исследование таких систем упрощается. В частности, успокаивающие управления для систем с конечным спектром можно строить в классах простейших функций.

Известно [4, 5], что спектр системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором, может содержать инвариантные значения $p^* \in \mathbb{C}$, которые входят в спектр при любом выборе коэффициентов регулятора. Чтобы убрать из спектра такие значения, например для обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы, нужно ввести в регулятор распределенные запаздывания. В [1] доказано, что для разрешимости задачи FSA для системы (1) в классе регуляторов с распределенными запаздываниями необходимо, чтобы система (1) была спектрально управляема [6]:

$$\operatorname{rank}\left[pE_n - A(e^{-ph}), b\right] = n \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Условие (2) и [7] достаточно для разрешимости задачи FSA для системы (1) в классе регуляторов с распределенными запаздываниями. В [8] установлено, что для выполнения (2) для системы (1) необходимо, чтобы

$$\operatorname{rank}[b, A(\lambda)b, \ldots, A^{n-1}(\lambda)b] = n \quad \text{при некотором} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Управление спектром системы (1) в классе разностных регуляторов при выполнении равенства (3) для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ исследовано в [9]. Там обоснована возможность приведения характеристического квазиполинома замкнутой системы к виду

$$w(p, e^{-ph}) = \prod_{i=1}^{n} \left(p + \beta_i(e^{-ph})\right),$$

где $\beta_i(\lambda)$ $(i = \overline{1, n})$ – наперед заданные полиномы.

В связи с работой [3] возникла [10] также задача замены конечной самосопряженной части спектра системы (1) произвольным аналогичным набором. Было установлено [10], что для системы (1) условие (2) необходимо и достаточно для разрешимости данной задачи.

Задача приведения системы (1) к системе с конечным (не произвольным!) спектром в классе дифференциально-разностных регуляторов изучалась в [4], где показано, что условие (2) достаточно для спектральной приводимости системы (1). Там же обосновано необходимое условие спектральной приводимости системы (1) в классе таких регуляторов: равенство (2) может нарушаться только в конечном числе точек. В [11] получены новые условия спектральной приводимости и построен дифференциально-разностный регулятор запаздывающего типа, приводящий замкнутую систему (1) к системе с конечным спектром. В настоящеи работе предлагается новая схема получения FSA-регулятора и тем самым дано новое конструктивное доказательство того, что условие (2) необходимо и достаточно для разрешимости задачи назначения произвольного конечного спектра (FSA) для системы (1).

Пусть λ_D – оператор сдвига: $\lambda_D^j \varphi(t) = \varphi(t-jh)$ (φ – функция, $j = 0, 1, \ldots$). Рассмотрим статический регулятор по типу обратной связи

$$
\begin{gathered}
u(t) = -\alpha(\lambda_D, x(t)) + \hat{g}'(\lambda_D)x(t) + \\
+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}'_{ki}(\lambda_D)x(t-s)e^{p_k s}s^i/i!ds,\ t>0,
\end{gathered} \tag{4}
$$

где $\alpha(\lambda_D, x(t)) = e'_n \sum_{j=0}^{m} A_j x(t-jh)$; $\hat{g}'(\lambda_D) = [\hat{g}_1(\lambda_D), \ldots, \hat{g}_n(\lambda_D)]$ – векторный полином с действительными коэффициентами, $\hat{q}'_{ki}(\lambda_D) = [\hat{q}_{ki1}(\lambda_D), \ldots$ $\ldots, \hat{q}_{kin}(\lambda_D)]$ – векторные полиномы, возможно, с комплексными коэффициентами, $P^* = \{p_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, L}\}$ – набор действительных и комплексно сопряженных чисел. Для отрицательных значений аргумента переменные $x_i(t)$, если они не заданы, считаем произвольными кусочно-непрерывными функциями.

Параметры регулятора (4) таковы, что после приведения выражения $\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}'_{ki}(\lambda_D)x(t-s)e^{p_k s}s^i/i!ds$ применением формулы Эйлера $e^{\mathrm{i}\varphi} =$ $= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ (i – мнимая единица) к виду

$$
\sum_{j=0}^{N_1}\int_0^h R_j(s)\lambda_D^j x(t-s)ds, \tag{5}
$$

где $R_j(s) = \sum_{l=1}^{\tilde{L}} e^{\alpha_l s}(\cos(\beta_l s)P_{jl}(s) + \sin(\beta_l s)Q_{jl}(s))$ ($\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $P_{jl}(s), Q_{jl}(s)$ – n-векторные полиномы), все коэффициенты регулятора (4) действительные.

Пусть

$$
d(p) = \prod_{i=1}^{s_1}(p-\tilde{p}_i)^{k_i} = \sum_{i=0}^{n}\gamma_i p^{n-i}, \quad \tilde{p}_i \in \tilde{P}, \tag{6}
$$

– заданный характеристический полином замкнутой системы, $\tilde{P} = \{\tilde{p}_i \in \mathbb{C},$ $i = \overline{0, s_1}\}$ – его различные действительные или комплексно сопряженные корни с алгебраическими кратностями k_i.

Задача: при выполнении условия (2) подобрать множество P^* и векторные коэффициенты $\hat{g}'(\lambda_D), \hat{q}'_{ki}(\lambda_D)$ регулятора (4) так, чтобы характеристическая матрица $pE_n - \breve{A}(p, e^{-ph})$ замкнутой системы (1), (4) имела действительные коэффициенты и выполнялось равенство

$$
|pE_n - \breve{A}(p, e^{-ph})| = d(p).
$$

Такой регулятор назовем FSA-регулятором. Ниже приводится алгоритм построения FSA-регулятора для системы (1).

2. Вспомогательные результаты

В записи регулятора (4) присутствуют слагаемые с сосредоточенным запаздыванием: $\lambda_D^j x_i(t)$ и с распределенным запаздыванием: $\int_0^h \lambda_D^j x(t-s) \times \times e^{p_k s} s^i/i!ds$. Будем говорить, что регулятор (4) имеет D-структуру (запаздывающую структуру).

В замкнутой системе последнее уравнение имеет вид

$$\dot{x}_n(t) = \hat{g}'(\lambda_D)x(t) + \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}'_{ki}(\lambda_D)x(t-s)e^{p_k s}s^i/i!ds, \tag{7}$$

соответственно последняя строка характеристической матрицы системы (1), (4) такова ($\lambda = e^{-ph}$):

$$pe'_n - \left(\hat{g}'(\lambda) + \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\hat{q}'_{ki}(\lambda)\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!ds\right). \tag{8}$$

Вычисляя, получаем ($\lambda_k = e^{-p_k h}$)

$$\int_0^h e^{-(p-p_k)s}ds = \frac{-(\lambda-\lambda_k)}{\lambda_k(p-p_k)},$$

$$\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!ds = \frac{-1}{\lambda_k}\left(\frac{(\lambda-\lambda_k)}{(p-p_k)^{i+1}} + \sum_{l=1}^{i}\frac{\lambda h^l}{l!(p-p_k)^{i-l+1}}\right),$$

$$i \geqslant 1.$$

Обозначим $\tilde{q}'_{jki}(\lambda) = -\hat{q}'_{jki}(\lambda)/\lambda_k$ ($j = \overline{1,n}$, $i = \overline{0,L_1}$),

$$\hat{f}_{jk}(p,\lambda) = \frac{\tilde{q}_{jk0}(\lambda)(\lambda-\lambda_k)}{p-p_k} + \sum_{i=1}^{L_1}\tilde{q}_{jki}(\lambda)\left(\frac{(\lambda-\lambda_k)}{(p-p_k)^{i+1}} + \sum_{l=1}^{i}\frac{\lambda h^l}{l!(p-p_k)^{i-l+1}}\right), \tag{9}$$

$$f_j(p,\lambda) = \hat{g}_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{L}\hat{f}_{jk}(p,\lambda), \quad j = \overline{1,n}, \tag{10}$$

где $\hat{g}_j(\lambda)$, $\tilde{q}_{jki}(\lambda)$ ($j = \overline{1,n}$, $i = \overline{0,L_1}$) – полиномы. Таким образом, если регулятор (4) имеет D-структуру, то последняя строка характеристической матрицы замкнутой системы имеет вид $[-f_1(p,\lambda), \dots, p - f_n(p,\lambda)]$. Про функции $f_j(p,\lambda)$ также будем говорить, что они имеют D-структуру.

Пусть $f_0(p,\lambda)$ – произвольная функция вида (10) ($j = 0$). Приведя к общему знаменателю, получим $f_0(p,\lambda) = \frac{K(p,\lambda)}{d_1(p)}$, где

$$d_1(p) = \prod_{k=1}^{L}(p-p_k)^{l_k}, \tag{11}$$

– общий знаменатель суммы $\sum_{k=1}^{L} \hat{f}_{0k}(p,\lambda)$; $K(p,\lambda)$ – полином, степень которого относительно переменной p не больше степени $d_1(p)$. Очевидно, что функция вида $f_0(p, e^{-ph})$ целая. Верно и обратное утверждение.

Теорема 1. Дробно-рациональная функция $\frac{K(p,\lambda)}{d_1(p)}$ имеет D-структуру, если и только если степень переменной p в полиноме $K(p,\lambda)$ не больше степени переменной p в полиноме $d_1(p)$ и производные функции $K(p, e^{-ph})$ по переменной p удовлетворяют равенствам

$$K^{(i)}(p_k, e^{-p_k h}) = 0, \quad i = \overline{0, l_k - 1}, \quad k = \overline{1, L}. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 1 см. в [12, раздел 2].

3. Достаточные условия FSA-регулятора

Считаем, что для системы (1) выполнено условие спектральной управляемости (2). Обозначим

$$M(p,\lambda) = [M_1(p,\lambda), \ldots, M_n(p,\lambda)]' =$$
$$= \left[(-1)^{n+1} m_1(p,\lambda), (-1)^{n+2} m_2(p,\lambda), \ldots, m_n(p,\lambda)\right]'$$

– алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $W(p,\lambda) = pE_n - A(\lambda)$. Здесь

$$\begin{aligned} m_i(p,\lambda) &= \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}(\lambda) p^{j-1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ &= m_n(p,\lambda) = \sum_{j=1}^{n-1} m_{n,j}(\lambda) p^{j-1} + p^{n-1} \end{aligned} \tag{13}$$

– миноры, полученные вычеркиванием i-го столбца из первых $n-1$ строк матрицы $W(p,\lambda)$ ($m_{i,j}(\lambda)$ – полиномы).

На основании теоремы 1 последнюю строку матрицы $\breve{A}(p,\lambda)$ замкнутой системы, соответствующую регулятору (4), будем искать в виде

$$e_n' \breve{A}(p,\lambda) = [g_1(\lambda) + f_1(p,\lambda), \ldots, g_n(\lambda) + f_n(p,\lambda)], \tag{14}$$

где полиномы $f_j(p,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, имеют вид (10). Обозначим

$$K(p,\lambda) = -d(p) - [g_1(\lambda), g_2(\lambda), \ldots, g_n(\lambda) - p]\, M(p,\lambda). \tag{15}$$

Для построения FSA-регулятора полиномы $g_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, далее подбираются так, чтобы функция $K(p,\lambda)$ удовлетворяла условиям теоремы 1.

Пусть $P_1^* = \{p_k^* \in \mathbb{C}, k = \overline{1, \mu_1}\}$ – множество различных чисел таких, что при некотором $\lambda_k \in \mathbb{C}$ пара (p_k^*, λ_k) – решение системы

$$M_i(p,\lambda) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Набор P_1^* содержит инвариантные [4, 5] спектральные значения, которые не "убираются" из конечного спектра замкнутой системы дифференциально-разностным регулятором. Это видно из разложения характеристического определителя замкнутой системы по $n-1$ первым строкам на основании теоремы Лапласа.

Ввиду условия (2) полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, не имеют [4] общего множителя, зависящего от λ, поэтому множество P_1^* конечно. Согласно теореме Гильберта о нулях найдется векторный полином $\varphi'(p,\lambda) = [\varphi_1(p,\lambda),\ldots \ldots,\varphi_n(p,\lambda)]$, при котором

$$\varphi_1(p,\lambda)M_1(p,\lambda)+\ldots+\varphi_n(p,\lambda)M_n(p,\lambda)=d_1(p), \tag{17}$$

где полином

$$d_1(p)=\prod_{k=1}^{\mu_1}(p-p_k^*)^{l_k} \tag{18}$$

имеет корнями все числа $p_k^*\in P_1^*$, найденные из системы (16).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости* (2). *Для того чтобы регулятор* (4) *был FSA-регулятором, достаточно:*

1) в разложении (17) *обеспечить, чтобы степень переменной p в числителе каждой дроби $\varphi_i(p,\lambda)K(p,\lambda)/d_1(p)$, $i=\overline{1,n}$, была не больше степени переменной p в знаменателе, и в (14) положить*

$$[f_1(p,\lambda),\ldots,f_n(p,\lambda)]=\varphi'(p,\lambda)K(p,\lambda)/d_1(p); \tag{19}$$

2) выбрать полиномы $g_1(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)$ так, чтобы функция $K(p,\lambda)/d_1(p)$ удовлетворяла условиям теоремы 1.

Доказательство. Ввиду условий 1), 2) доказываемой теоремы и теоремы 1 функции $\varphi_i(p,\lambda)K(p,\lambda)/d_1(p), i=\overline{1,n}$, а значит, и компоненты вектор-функции $[f_1(p,\lambda),\ldots,f_n(p,\lambda)]$ имеют D-структуру. Покажем, что замкнутая система (1), (4) имеет характеристический полином $d(p)$.

Разлагая характеристический определитель $|pE_n-\breve{A}(p,\lambda)|$ замкнутой системы (1), (4) по последней строке, получаем

$$|pE_n-\breve{A}(p,\lambda)|=-\left[g_1(\lambda)+f_1(p,\lambda),\ldots,g_n(\lambda)+f_n(p,\lambda)-p\right]M(p,\lambda). \tag{20}$$

Умножая обе части (19) справа на $M(p,\lambda)$ и учитывая (17), получаем равенство

$$[f_1(p,\lambda),\ldots,f_n(p,\lambda)]\,M(p,\lambda)=K(p,\lambda)(\varphi'(p,\lambda)M(p,\lambda))/d_1(p)=K(p,\lambda),$$

из которого следует

$$|pE_n-\breve{A}(p,\lambda)|=-\left[g_1(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)-p\right]M(p,\lambda)-K(p,\lambda).$$

Ввиду (15) замкнутая система (1), (4) имеет конечный спектр с полиномом $d(p)$. Теорема доказана.

Чтобы обеспечить условие 1) теоремы 2, приведем систему (1) к системе с конечным спектром, характеристический полином которой возьмем в виде $d_1(p)$ (см. (18)).

4. Приведение системы (1) к системе конечного спектра посредством дифференциально-разностного регулятора

Замкнем систему (1) регулятором

$$
(21)\qquad \begin{cases} u(t) = -\alpha(\lambda_D, x(t)) + y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dots \\ \dot{y}_r(t) = z'(\lambda_D)x(t) + \tilde{z}'(\lambda_D)\tilde{y}(t), \quad t > 0. \end{cases}
$$

Здесь $\tilde{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_r(t)]'$ – вспомогательные переменные; $z'(\lambda_D) = [\hat{z}_1(\lambda_D), \dots, \hat{z}_n(\lambda_D)]$, $\tilde{z}'(\lambda_D) = [\hat{z}_{n+1}(\lambda_D), \dots, \hat{z}_{n+r}(\lambda_D)]$ – векторные полиномы, подлежащие определению.

Таким образом, матрица замкнутой системы (1), (21) порядка $N = n + r$ имеет вид

$$
\hat{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(\lambda) & \dots & a_{n-1,n}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hat{z}_1(\lambda) & \dots & \hat{z}_n(\lambda) & \hat{z}_{n+1}(\lambda) & \dots & \hat{z}_{n+r}(\lambda) \end{bmatrix},
$$

и замкнутая система, как и исходная система (1), – запаздывающего типа.

Пусть

$$
\check{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(\lambda) & \dots & a_{n-1,n}(\lambda) \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C(\lambda) = [b, \check{A}(\lambda)b, \dots, \check{A}^{n-1}(\lambda)b].
$$

Ввиду (3) $\delta(\lambda) = |C(\lambda)| \neq 0$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Множество корней полинома $\delta(\lambda)$ обозначим $\Lambda_\delta = \{\lambda_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1, \mu}\,|\delta(\lambda_i) = 0\}$, ν_i – их алгебраические кратности. Запишем матрицу $\tilde{A}(\lambda)$ размеров $N \times N$ $(N = n + r)$, полученную из матрицы $\hat{A}(\lambda)$ заменой элементов последней строки нулями.

Обозначим: $e_N = [0; \dots; 0; 1]'$ – N-вектор-столбец, $\tilde{C}(\lambda) = [e_N, \tilde{A}(\lambda)e_N, \dots, \tilde{A}^{N-1}(\lambda)e_N]$. Нетрудно видеть, что в силу (3)

$$
\operatorname{rank}\left[e_N, \tilde{A}(\lambda)e_N, \dots, \tilde{A}^{N-1}(\lambda)e_N\right] = N \quad \text{при некотором} \quad \lambda \in \mathbb{C}.
$$

Рассмотрим характеристический полином: $|pE_N - \tilde{A}(\lambda)| = p^N + \alpha_1(\lambda)p^{N-1} + \dots + \alpha_N(\lambda)$. Очевидно, что $\alpha_i(\lambda) = 0$, $i = \overline{n, N}$. Пусть

$$
S(\lambda) = \tilde{C}(\lambda)\check{C}^{-1}(\lambda), \quad \check{C}(\lambda) = [e_N, F(\lambda)e_N, \dots, F^{N-1}(\lambda)e_N],
$$

где

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_N(\lambda) & -\alpha_{N-1}(\lambda) & \dots & -\alpha_1(\lambda) \end{bmatrix},$$

тогда

$$S^{-1}(\lambda) = \check{C}(\lambda)\tilde{C}^{-1}(\lambda), \quad \lambda \notin \Lambda_\delta. \tag{22}$$

Свойства матрицы $S^{-1}(\lambda)$ изучены в [13]. Первые n строк и первые n столбцов матрицы $S^{-1}(\lambda)$ содержат матрицу $\tilde{S}^{-1}(\lambda)$, отвечающую случаю, когда $N = n\,(r = 0)$, т.е. записанную для матрицы $\tilde{A}(\lambda) = \check{A}(\lambda)$.

Рассмотрим наименьшее общее кратное

$$\tilde{\delta}(\lambda) = \mathrm{LCM}\{q_{11}(\lambda), \dots, q_{1,n-1}(\lambda)\} = \prod_{i=1}^{\tilde{\mu}} (\lambda - \lambda_i)^{\tilde{\nu}_i} \tag{23}$$

знаменателей (общий знаменатель) элементов $s_{11}(\lambda)|\tilde{S}(\lambda)|^{-1}, \dots$ $\dots, s_{1,n-1}(\lambda)|\tilde{S}(\lambda)|^{-1}$ первой строки $[\tilde{S}^{-1}(\lambda)]_1$ матрицы $\tilde{S}^{-1}(\lambda)$. Строку $[\tilde{S}^{-1}(\lambda)]_1$ можно найти как алгебраические дополнения к элементам последнего столбца матрицы $C(\lambda)$, деленные на $\delta(\lambda) = |C(\lambda)|$ (см. (22)).

Пусть $\rho_i(p) = p^{N_i} + \alpha_{i1}p^{N_i-1} + \dots + \alpha_{iN_i}$ – минимальный полином матрицы $\check{A}(\lambda_i)$, $i = \overline{1, \tilde{\mu}}$. Напомним, что $\rho_i(p)$ можно найти [14, с. 100] по формуле $\rho_i(p) = |pE_n - \check{A}(\lambda_i)|/G_{n-1}(p, \lambda_i)$, где $G_{n-1}(p, \lambda_i)$ – наибольший общий делитель миноров порядка $n-1$ матрицы $pE_n - \check{A}(\lambda_i)$. Комплексные λ_i входят в $\Lambda_{\tilde{\delta}} = \{\lambda_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, \tilde{\mu}}\,|\tilde{\delta}(\lambda_i) = 0\}$ сопряженными парами, поэтому полином

$$d_0(p) = \mathrm{LCM}\{\rho_i^{\tilde{\nu}_i}(p),\, i = \overline{1, \tilde{\mu}}\} = p^{\tilde{N}} + \gamma_1 p^{\tilde{N}-1} + \dots + \gamma_{\tilde{N}}$$

– наименьшее общее кратное полиномов $\{\rho_i^{\tilde{\nu}_i}(p),\, i = \overline{1, \tilde{\mu}}\}$ – имеет действительные коэффициенты. Если степень $\tilde{N}$ полинома $d_0(p)$ меньше, чем n, то домножим его на произвольный полином $\tilde{d}_0(p)$ с действительными коэффициентами степени $n - \tilde{N}$:

$$d_1(p) = d_0(p)\tilde{d}_0(p) = p^N + \gamma_1 p^{N-1} + \dots + \gamma_N, \quad N \geqslant n. \tag{24}$$

В [13, 15] доказано утверждение.

Лемма 1. *Для того чтобы замкнутая система* (1), (21) *имела конечный спектр* $|pE_N - \hat{A}(\lambda)| = d_1(p)$, *достаточно в регуляторе* (21) *положить*

$$[z'(\lambda), \tilde{z}'(\lambda)] = [\alpha_N(\lambda) - \gamma_N, \dots, \alpha_1(\lambda) - \gamma_1]S^{-1}(\lambda) = -[S^{-1}(\lambda)]_1 d_1(\tilde{A}(\lambda)), \tag{25}$$

здесь $[S^{-1}(\lambda)]_1$ *– первая строка матрицы* $S^{-1}(\lambda)$.

Элементы строки (25) должны быть полиномами – именно этому требованию подчинена конструкция полинома $d_0(p)$.

Замечание 1. Как видно из доказательства леммы 3 в [15], для того чтобы элементы строки (25) были полиномами, достаточно, чтобы полиномами были элементы строки $[\tilde{S}^{-1}(\lambda)]_1 d_1(\breve{A}(\lambda))$. Поэтому проверяем, нельзя ли уменьшить кратности k_j корней p_j, $j = \overline{1, s_1}$, полинома (24) так, чтобы элементы строки $[\tilde{S}^{-1}(\lambda)]_1 d_1(\breve{A}(\lambda))$ оставались полиномами.

Замечание 2. Если в (24) $N = n\,(r = 0)$, вместо управления (21) возьмем

$$u(t) = -\alpha(\lambda_D, x(t)) + z'(\lambda_D)x(t), \quad t > 0. \tag{26}$$

Замкнутая система (1), (21) будет иметь характеристический полином $d_1(p)$.

Лемму 1 можно использовать для приведения системы (1) к системе с конечным спектром (содержащим инвариантные спектральные значения!), а можно использовать для получения (см. раздел 5) разложения (17).

5. Вычисление коэффициентов FSA-регулятора (4)

Теорема 3. Условие спектральной управляемости (2) *необходимо и достаточно для существования FSA-регулятора* (4).

Доказательство. Необходимость. Пусть регулятор (4) обеспечивает замкнутой системе (1), (4) характеристический полином (6). Разлагая характеристический определитель $|pE_n - \breve{A}(p, e^{-ph})|$ замкнутой системы по последней строке, получаем

$$d(p) = -\left[g_1(e^{-ph}) + f_1(p, e^{-ph}), \ldots, g_n(e^{-ph}) + f_n(p, e^{-ph}) - p\right] M(p, e^{-ph}).$$

В правой части этого выражения все функции целые, поэтому, если условие (2) при некотором $p_0 \in \mathbb{C}$ нарушается, т.е. $M(p_0, e^{-p_0 h}) = 0$, то $d(p_0) = 0$. Значит, p_0 – инвариантное спектральное значение при любом допустимом регуляторе (4). Это противоречит существованию FSA-регулятора, обеспечивающего произвольный конечный спектр.

Достаточность. Считая выполненным условие спектральной управляемости (2), построим для системы (1) FSA-регулятор вида (4), обеспечивающий замкнутой системе произвольный конечный спектр.

1) *получение разложения* (17). Поскольку спектр замкнутой системы (1), (21) конечен: $w(p, \lambda) = d_1(p)$, то разлагая определитель $d_1(p) = |pE_N - \hat{A}(\lambda)|$ по последней строке, получаем равенство (17)

$$-\hat{z}_1(\lambda)M_1(p,\lambda) - \ldots - (\hat{z}_n(\lambda) + \hat{z}_{n+1}(\lambda)p + \ldots + \hat{z}_{n+r}(\lambda)p^r - p^{r+1})M_n(p,\lambda) = d_1(p),$$

где

$$\begin{gathered} \varphi_i(p,\lambda) = -\hat{z}_i(\lambda), \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \varphi_n(p,\lambda) = -(\hat{z}_n(\lambda) + \hat{z}_{n+1}(\lambda)p + \ldots + \hat{z}_{n+r}(\lambda)p^r - p^{r+1}) \end{gathered} \tag{27}$$

– полиномы, вычисляемые с помощью (25).

Так как степень полинома $K(p,\lambda)$ не больше $n-1$, то степень числителя каждой дроби в равенстве (19) $\varphi_i(p,\lambda)K(p,\lambda)/d_1(p)$, $i=\overline{1,n}$, по переменной p не больше N степени знаменателя. Значит, условие 1) теоремы 2 выполнено, остается найти полиномы $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$;

2) *вычисление полиномов* $g_1(\lambda),\dots,g_n(\lambda)$. Покажем, как выбрать полиномы $g_1(\lambda),\dots,g_n(\lambda)$ так, чтобы функция $K(p,\lambda)$ удовлетворяла условиям (12), т.е. чтобы обеспечить условие 2) теоремы 2. Обозначим $g'(\lambda)=$ $=[g_1(\lambda),\dots,g_n(\lambda)]$. Функцию $K(p,\lambda)$ запишем так

$$K(p,\lambda)=pM_n(p,\lambda)-d(p)-g'(\lambda)M(p,\lambda). \tag{28}$$

Пусть полином $d_1(p)$ имеет вид (11) и $P^*=\{p_k\in\mathbb{C},k=\overline{1,L}\}$ – множество его различных корней, тогда должно выполняться условие (12), равносильное следующему:

$$\left.\frac{d^i(g'(e^{-ph})M(p,e^{-ph}))}{dp^i}\right|_{p=p_k}=\left.\frac{d^i(pM_n(p,e^{-ph})-d(p))}{dp^i}\right|_{p=p_k}, \tag{29}$$
$$i=\overline{0,l_k-1},\quad k=\overline{1,L}.$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$$\begin{gathered} g_j^{(i)}(\lambda_k),\quad j=\overline{1,n},\quad i=\overline{0,l_k-1},\quad k=\overline{1,L},\\ \lambda_k\in\Lambda^*=\{\lambda_k=e^{-p_kh}|p_k\in P^*,\quad k=\overline{1,L}\}. \end{gathered} \tag{30}$$

Поскольку выполнено условие спектральной управляемости (2), то среди чисел $M_j(p_k,e^{-p_kh})$, $j=\overline{1,n}$, при любом $k=\overline{1,L}$ есть отличное от нуля число. Поэтому при каждом $k\in\overline{1,L}$ из первого уравнения $(i=0)$ найдем $g_j(\lambda_k)$, $j=\overline{1,n}$, из второго уравнения $(i=1)$ найдем $g_j^{(1)}(\lambda_k)$, $j=\overline{1,n}$, и т.д. Система (29) имеет бесконечное множество решений ввиду того, что если $M_{j^0}(p_k,e^{-p_kh})\neq 0$, то остальные неизвестные $g_j^{(i)}(\lambda_k)$, $j\neq j^0$, могут выбираться произвольными.

Для комплексно сопряженных чисел $p^*,\bar{p}^*$ числа $\lambda^*=e^{-p^*h}$, $\bar{\lambda}^*=e^{-\bar{p}^*h}$ также комплексно сопряжены. Поэтому система (29) для комплексно сопряженных пар $\{p^*,\bar{p}^*\}\in P^*$ имеет комплексно сопряженные решения

$$\left(g_j(\bar{\lambda}^*),g_j^{(1)}(\bar{\lambda}^*),\dots,g_j^{(l^*-1)}(\bar{\lambda}^*)\right)=\left(\bar{g}_j(\lambda^*),\bar{g}_j^{(1)}(\lambda^*),\dots,\bar{g}_j^{(l^*-1)}(\lambda^*)\right),\quad j=\overline{1,n}.$$

Окончательно полиномы $g_1(\lambda),\dots,g_n(\lambda)$ получаем как интерполяционные полиномы Лагранжа – Сильвестра по значениям (30), найденным из системы (29). Согласно [14, с. 110] полиномы $g_1(\lambda),\dots,g_n(\lambda)$, полученные по интерполяционным значениям (30), будут иметь действительные коэффициенты.

3) *дробно-рациональные функции* $f_1(p,\lambda),\dots,f_n(p,\lambda)$ получаем по формуле (19), которой предшествует вычисление функции $K(p,\lambda)$ по формуле (15). FSA-регулятор построен. Теорема доказана.

Замечание 3. Полиномы $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, в регуляторе (4) можно находить методом неопределенных коэффициентов, как решение системы линейных алгебраических уравнений (29). Степени полиномов $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, получаем из совокупности интерполяционных значений (30): $\deg(g_i(\lambda)) \leqslant \leqslant \sum_{k=1}^{L} l_k - 1$.

6. Заключение

При доказательстве теоремы 3 фактически дан алгоритм получения коэффициентов регулятора (4), обеспечивающего выполнение условий теоремы 2, и, значит, желаемый спектр замкнутой системы запаздывающего типа. Коэффициенты регулятора (4) определяются неоднозначно, поэтому при их вычислении можно вводить дополнительные ограничения. Например, можно потребовать, чтобы кратность запаздываний в регуляторе (4), определяемая степенями полиномов $\hat{g}_j(\lambda_D)$, $\hat{q}_{kij}(\lambda_D)$, $j=\overline{1,n}$, была минимальной. Тем самым будет минимизирован объем необходимой информации о прошлых состояниях объекта управления. Если считать коэффициенты исходной системы (1) управления интервальными, то полиномиальные коэффициенты регулятора можно подчинить требованию робастной устойчивости замкнутой системы.

Кроме способа, изложенного при доказательстве теоремы 3, разложение (17) можно получить следующим образом. Рассматривая полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, как полиномы от λ с дробно-рациональными коэффициентами, зависящими от p, по алгоритму Евклида найдем векторный полином $\hat{\varphi}(p,\lambda)$ с дробно-рациональными коэффициентами от p такой, что $\hat{\varphi}'(p,\lambda)M(p,\lambda)=1$. Домножая обе части последнего равенства на общий знаменатель компонент вектора $\hat{\varphi}'(p,\lambda)$, получаем

$$\tilde{\varphi}'(p,\lambda)M(p,\lambda)=\tilde{d}_1(p). \tag{31}$$

Степень переменной p в $K(p,\lambda)$ не больше (см. (15)), чем $n-1$. Ввиду теоремы 2 потребуем, чтобы степень переменной p в числителе каждой дроби $\tilde{\varphi}_i(p,\lambda)K(p,\lambda)/\tilde{d}_1(p)$, $i=\overline{1,n}$, была не больше степени переменной p в знаменателе. Компоненты $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, векторного полинома $M(p,\lambda)$ относительно p имеют степень не выше $n-2$. Если степень $\widetilde{\mu}$ полинома $\tilde{d}_1(p)$ меньше, чем $2n-3$, то обе части равенства (31) домножим на полином $d_2(p)$ с действительными коэффициентами степени $2n-3-\widetilde{\mu}$. В частности, можно за счет выбора $d_2(p)$ в разложении полинома $\tilde{d}_1(p)$ на множители увеличить кратности инвариантных значений p_k^* так, чтобы $\deg(d_2(p)\tilde{d}_1(p)) = = 2n-3$. Степени полиномов $d_2(p)\tilde{\varphi}_1(p,\lambda),\ldots,d_2(p)\tilde{\varphi}_{n-1}(p,\lambda)$ относительно p сделаем меньше, чем $n-1$ – степень переменной p в полиноме $M_n(p,\lambda)$. Если степень переменной p полинома $d_2(p)\tilde{\varphi}_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, не меньше чем $n-1$, то представим его в виде $d_2(p)\tilde{\varphi}_i(p,\lambda)=\xi_i(p,\lambda)M_n(p,\lambda)+\varphi_i(p,\lambda)$, где $\xi_i(p,\lambda)$, $\varphi_i(p,\lambda)$ – полиномы. Это возможно, так как полином $M_n(p,\lambda) = = m_n(p,\lambda)$ имеет вид (13). Поскольку степень полинома $d_1(p)=\tilde{d}_1(p)d_2(p)$ равна $2n-3$, то после указанных преобразований степень полинома $\varphi_n(p,\lambda)$ в разложении (17), полученном из (31), относительно p будет равна $n-2$.

Степень переменной p в полиноме $K(p,\lambda)$ не больше чем $n-1$, поэтому $\deg_p(\varphi_i(p,\lambda)K(p,\lambda)) \leqslant \deg_p(d_1(p))$, $i=\overline{1,n}$.

Для системы (1) можно построить динамический регулятор, содержащий распределенное запаздывание только по одной переменной. Замкнем систему (1) регулятором

$$
(32) \qquad \begin{cases} u(t) = -\alpha(\lambda_D, x(t)) + y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dots \\ \dot{y}_r(t) = z'(\lambda_D)x(t) + \tilde{z}'(\lambda_D)\tilde{y}(t) + y_{r+1}(t), \\ \dot{y}_{r+1}(t) = \tilde{u}(t), \quad t > 0, \end{cases}
$$

где полиномы $z'(\lambda), \tilde{z}'(\lambda)$ задаются посредством (25), $\tilde{u}(t)$ – новое управление, которое будем искать в виде (4) по изложенной в разделе 5 схеме. Порядок замкнутой системы будет равен $N+1$, и такова должна быть степень желаемого характеристического полинома $d(p)$.

Первые N уравнений системы (1), (32) содержат подсистему (1), (21). Ввиду леммы 1 эта подсистема имеет конечный спектр. Ее характеристический полином обозначим через $d_1(p)$. Столбец алгебраических дополнений к элементам (начиная с первого) последней строки характеристической матрицы системы (1), (32) имеет вид

$$
\tilde{M}(p,\lambda) = [M_1(p,\lambda), \dots, M_n(p,\lambda), M_n(p,\lambda)p, \dots, M_n(p,\lambda)p^r, d_1(p)]'.
$$

Равенство (19) будет таким:

$$
(33) \qquad [f_1(p,\lambda), \dots, f_N(p,\lambda), f_{N+1}(p,\lambda)] = [0, \dots, 0, 1]\, K(p,\lambda)/d_1(p).
$$

Здесь функция $K(p)$ задается формулой (15) с заменой n на $N+1$ и $M(p,\lambda)$ на $\tilde{M}(p,\lambda)$, поэтому по переменной p степень числителя дроби $K(p,\lambda)/d_1(p)$ не больше степени знаменателя. Следовательно, условие 2) теоремы 1 выполнено. Полиномы $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,N+1}$, находим, как и ранее, из условия (12). В данном случае регулятор вида (4) будет содержать распределенное запаздывание только по вспомогательной переменной y_{r+1}.

Замечание 4. Если в (24) $N = n\,(r=0)$, вместо управления (32) возьмем

$$
(34) \qquad \begin{cases} u(t) = -\alpha(\lambda_D, x(t)) + z'(\lambda_D)x(t) + y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) = \tilde{u}(t), \quad t > 0. \end{cases}
$$

Процедуру построения FSA-регулятора поясним на примере.

Пример 1. Рассмотрим систему управления с матрицами вида

$$
\breve{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \ln 2.
$$

Данная система имеет бесконечный спектр ($\lambda = e^{-ph}$): $w(p,\lambda) = p^3 - p^2 - p\lambda^2$.

Запишем алгебраические дополнения

$$M_1(p,\lambda)=\lambda^2,\quad M_2(p,\lambda)=(-1+p)\lambda,\quad M_3(p,\lambda)=-p+p^2-\lambda^2$$

к элементам последней строки характеристической матрицы $pE_3-\breve{A}(\lambda)$. Найдем множество решений (p,λ) системы $M_i(p,\lambda)=0$, $i=\overline{1,3}$: $\{(0;0),(1;0)\}$. Поскольку $e^{-ph}\neq\lambda$, то система спектрально управляема, и FSA-регулятор существует. Для его построения реализуем пп. 1)–3), изложенные при доказательстве теоремы 3.

Ввиду (22) находим строку $[\tilde{S}^{-1}(\lambda)]_1$ как алгебраические дополнения к элементам последнего столбца матрицы $C(\lambda)$, деленные на $\delta(\lambda)=-\lambda^3$. Следовательно, $[\tilde{S}^{-1}(\lambda)]_1=\left[-1/\lambda^2,0,0\right]$ и $\tilde{\delta}(\lambda)=\lambda^2$.

Для корня $\lambda_1=0$ полинома $\tilde{\delta}(\lambda)$ вычисляем минимальный полином $\rho_1(p)=(-1+p)p$ матрицы $\breve{A}(\lambda_1)$. Согласно (24) и замечанию 1, в качестве характеристического полинома системы (1), (21) возьмем

$$d_1(p)=\rho_1(p)p=(-1+p)p^2. \tag{35}$$

Применяя (25), где $[S^{-1}(\lambda)]_1=[\tilde{S}^{-1}(\lambda)]_1$, $\tilde{A}(\lambda)=\breve{A}(\lambda)$, получаем

$$[z'(\lambda),\tilde{z}'(\lambda)]=-[S^{-1}(\lambda)]_1\tilde{A}^2(\lambda)(\tilde{A}(\lambda)-E_3)=[-1,-\lambda,0]\,.$$

Таким образом, в разложении (17) ввиду (27) $(r=0)$

$$[\varphi_1(p,\lambda),\varphi_2(p,\lambda),\varphi_3(p,\lambda)]=[1,\lambda,p].$$

В качестве характеристического полинома замкнутой системы возьмем $d(p)=(p+1)(p+2)(p+3)$. Согласно условию 2) теоремы 2 функция

$$\frac{K(p,\lambda)}{(p-1)p^2}=\frac{-d(p)-[g_1(\lambda),g_2(\lambda),g_3(\lambda)-p]\,M(p,\lambda)}{(p-1)p^2}$$

должна быть целой. Из системы (12), где $p_1=0$, $l_1=2$; $p_2=0$, $l_2=1$, находим полиномы

$$g_1(\lambda)=-176,\quad g_2(\lambda)=12-103\lambda,\quad g_3(\lambda)=-79.$$

Получаем (см. (15))

$$K(p,\lambda)=-6-90p+72p^2+12\lambda-12p\lambda-6\lambda^2+102p\lambda^2.$$

Последняя строка матрицы $\breve{A}(p,\lambda)$ замкнутой системы ввиду (14) такова:

$$[-176+f_1(p,\lambda),\ 12-103\lambda+\lambda f_1(p,\lambda),\ -79+f_3(p,\lambda)]\,,$$

$$f_1(p,\lambda)=-\frac{96(-1+\lambda)(1+\lambda)}{p}+\frac{6(-1+\lambda)^2}{p^2}+\frac{24(-1+2\lambda)(1+2\lambda)}{-1+p},$$

$$f_3(p,\lambda)=72+\frac{6(-1+\lambda)^2}{p}+\frac{24\left(-1+4\lambda^2\right)}{-1+p}.$$

Окончательно регулятор (4), обеспечивающий замкнутой системе характеристический полином $d(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$, имеет вид

$$u(t) = -176x_1(t) + \tilde{x}_1(t) + (12 + 103\lambda_D)x_2(t) + \tilde{x}_2(t-h) - 7x_3(t) + \tilde{x}_3(t), \quad t > 0,$$

$$\tilde{x}_i(t) = 6\int_0^h (16(1+\lambda_D) + \lambda_D h)x_i(t-s)ds - 6\int_0^h s(-1+\lambda_D)x_i(t-s)ds -$$

$$-24\int_0^h e^s(1+2\lambda_D)x_i(t-s)ds, \quad i = \overline{1,2},$$

$$\tilde{x}_3(t) = -6\int_0^h (-1+\lambda_D)x_3(t-s)ds - 24\int_0^h e^s(1+2\lambda_D)x_3(t-s)ds.$$

Применяя лемму 1, построим динамический регулятор, содержащий распределенное запаздывание только по одной переменной. Векторный полином (25) имеет вид

$$z'(\lambda) = [-1, -\lambda, 0].$$

В данном случае $r = 0$, поэтому $\tilde{z}'(\lambda)$ отсутствует. Выбирая управление (26), получаем систему с характеристическим полиномом $d_1(p) = (-1+p)p^2$.

Пусть задан характеристический полином $d(p) = (p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$ замкнутой системы (1), (34). Решая систему линейных алгебраических уравнений (12): $p_1 = 0$, $l_1 = 2$; $p_2 = 0$, $l_2 = 1$, находим полиномы

$$[g_1(\lambda), \ldots, g_4(\lambda)] = [-886 + 812\lambda, -764 + 714\lambda, 0, 0]$$

и функцию

$$K(p,\lambda) = -24 - 50p - 35p^2 - 11p^3 - 764\lambda + 764p\lambda + 1600\lambda^2 - 714p\lambda^2 - 812\lambda^3.$$

Пользуясь равенством (33), определяем

$$[f_1(p,\lambda), \ldots, f_4(p,\lambda)] = [0,0,0,1]\, K(p,\lambda)/d_1(p),$$

$$f_4(p,\lambda) = -11 + \frac{4(-1+\lambda)^2(6+203\lambda)}{p^2} + \frac{2(-1+\lambda)\left(-37 - 37\lambda + 406\lambda^2\right)}{p} -$$

$$-\frac{2(-1+2\lambda)\left(-60 - 120\lambda + 203\lambda^2\right)}{-1+p}.$$

Записываем регулятор (34)

$$\begin{cases} u(t) = -x_1(t) - x_2(t-h) + y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) = (-886 + 812\lambda_D)x_1(t) + (-764 + 714\lambda_D)x_2(t) - 11y_1(t) - \\ -4 \int\limits_0^h s\left(-6 - 197\lambda_D + 203\lambda_D^2\right) y_1(t-s)ds - \\ -2 \int\limits_0^h \left(-37 - \lambda_D(37 + 12h) - 406\lambda_D^2(-1+h)\right) y_1(t-s)ds + \\ +2 \int\limits_0^h e^s\left(-60 - 120\lambda_D + 203\lambda_D^2\right) y_1(t-s)ds, \quad t > 0, \end{cases}$$

имеющий распределенное запаздывание только по вспомогательной переменной y_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. AC-24. No. 4. P. 541–553.
2. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. Вып. 6. С. 3–15.
3. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
4. *Булатов В.И.* Спектральная приводимость систем с запаздываниями // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1979. № 3. С. 78–80.
5. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.
6. *Bhat K.P., Koivo H.N.* Model characterization of controllability and observability of time-delay systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1976. AC-21. No. 2. P. 292–293.
7. *Watanabe K., Nobuyama E., Kitamori T., Ito M.* A New Algorithm for Finite Spectrum Assignment of Single-Input Systems with Time Delay // IEEE Trans. Autom. Control. 1992. AC-37. No. 9. P. 1377–1383.
8. *Марченко В.М.* К управляемости линейных систем с последействием // ДАН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1083–1086.
9. *Morse A.S.* Ring models for delay-differential systems // Automatica. 1976. V. 12. No. 5. P. 529–531.
10. *Булатов В.И., Калюжная Т.С., Наумович Р.Ф.* Управление спектром дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 11. С. 1946–1952.
11. *Метельский А.В.* Спектральная приводимость дифференциальных систем с запаздыванием с помощью динамического регулятора // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1621–1637.
12. *Метельский А.В.* Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1452.

13. *Метельский А.В.* Спектральное приведение дифференциальных систем с запаздыванием в регулярном случае // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 3–14.

14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

15. *Метельский А.В.* Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Л. Харитоновым.

Поступила в редакцию 07.09.2012