

## РАЗНОЕ

УДК 539.3

Э. И. Старовойтов<sup>1</sup>, Ю. М. Плещичевский<sup>2</sup>, Д. В. Леоненко<sup>1</sup>, Д. В. Тарлаковский<sup>3</sup>

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТУПЕНЧАТОЙ КОМПОЗИТНОЙ БАЛКИ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Рассмотрено термосиловое деформирование упругой трехслойной балки со ступенчатой толщиной одного из несущих слоев. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Выведена система уравнений равновесия и получено ее общее аналитическое решение в перемещениях. Проведен численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния металлополимерной трехслойной балки.

**Ключевые слова:** температура, деформирование, композитная балка, ступенчатая толщина.

**Введение.** В связи с широким применением композитных элементов конструкций в промышленности актуальной является проблема их прочностного расчета при различных внешних воздействиях и внутренних конфигурациях. Статическое и динамическое деформирования трехслойных композитных элементов конструкций с гладкой конфигурацией исследованы в [1]. Теория однородных тонкостенных конструкций ступенчато-переменной толщины разработана в [2]. В работах [3, 4] рассмотрено деформирование трехслойного стержня с нерегулярной границей при изотермическом нагружении. Работы [5, 6] посвящены динамическому деформированию трехслойных строительных конструкций.

**Постановка задачи.** Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная балка с жестким наполнителем (рис. 1), т. е. с учетом работы касательных напряжений. Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета используется гипотеза "ломаной" нормали: для тонких несущих слоев 1 и 2 справедлива гипотеза Бернулли (Bernoulli), в несжимаемом по толщине жестком наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной и не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый угол  $\psi(x)$ . Предполагается, что деформации малы, на внешний слой 1 балки действует распределенная силовая нагрузка  $q(x)$ ,  $p(x)$  и температурное поле  $T_k$  в стержне известно. В соответствии с принятыми предположениями прогибы во всех точках поперечного сечения стержня будут одинаковыми. На торцах стержня располагаются жесткие диафрагмы, препятствующие относительному сдвигу слоев. Толщина слоев  $h_k$  определяется как

$$h_3 = 2c, \quad h_2 = h_{20} + h_{21}H_0(x - x_0), \quad (1)$$

где  $H_0(x_0)$  — ступенчатая функция Хевисайда (Heaviside) [1].

При принятых предположениях продольные перемещения в слоях  $u^{(k)}$  могут быть выражены через три искомые функции  $u(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $w(x)$ :

$$u^{(1)} = u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1) \quad u^{(3)} = u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \quad (2)$$

$$u^{(2)} = u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c),$$

<sup>1</sup>УО "Белорусский государственный университет транспорта". 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34; э-почта: leoden@tut.by; <sup>2</sup>Гомельский филиал НАН Беларуси. 246007, г. Гомель, ул. Федюнинского, 4; <sup>3</sup>ФГБОУВПО "Московский авиационный институт" (Национальный исследовательский университет). Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4. Поступила 15.10.2014.

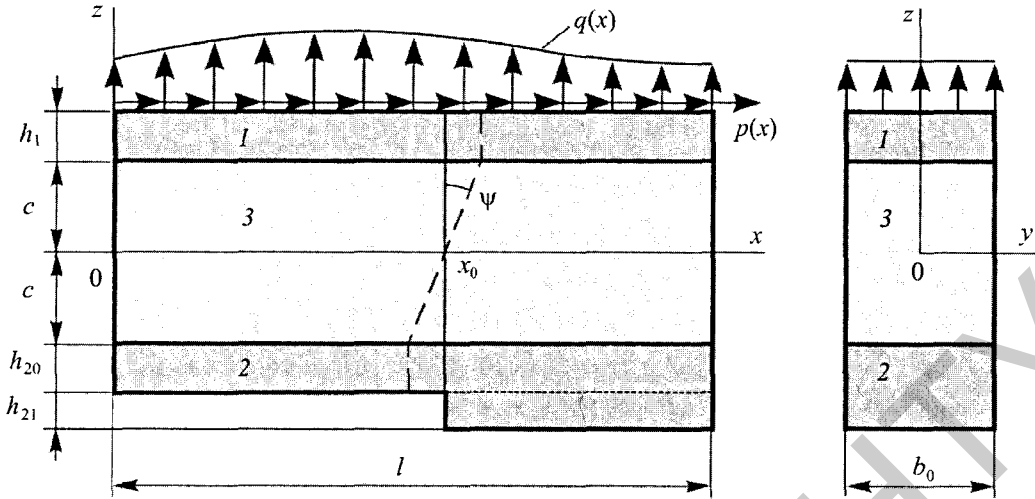


Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня: 1, 2 — тонкие несущие слои; 3 — жесткий наполнитель

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате. Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = x, z$ ) определяются по перемещениям (2) с использованием соотношений Коши (Cauchy) [8]. Внутренние силы и моменты в балке определяются как

$$N = \sum_{k=1}^3 N^{(k)}, \quad M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)}, \quad H = c(N^{(1)} - N^{(2)}) + M^{(3)}, \quad Q = Q^{(3)}, \quad (3)$$

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,$$

где  $\sigma_x^{(k)}$ ,  $\sigma_{xz}^{(3)}$  — компоненты тензора напряжений.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используются термоупругие соотношения закона Гука (3) в девиаторно-шаровой форме:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xx}^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad (4)$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k),$$

где  $s_{xx}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{xx}^{(k)}$  — девиаторные части тензоров напряжений и деформаций,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  — шаровые части тензоров напряжений и деформаций,  $\alpha_k$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $G_k$ ,  $K_k$  — температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования, вычисляемые по формуле Белла (Bell) [7, 8].

Компоненты тензора напряжений в слоях с учетом выражений (4) записываются в следующем виде:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = s_{xx}^{(k)} + \sigma^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} + 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k) = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} - 3K_k \alpha_k T_k, \quad (5)$$

$$\sigma_{xz}^{(3)} = s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} = G_3 \psi, \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k.$$

В дальнейшем температурное поле считаем усредненным по толщине  $k$ -го слоя. В этом случае значения упругих параметров внутри каждого слоя постоянны по толщине:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz.$$

С использованием соотношений (3), (4) и (5) внутренние усилия и моменты (2) выражаются через искомые функции  $u(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $w(x)$ .

**Решение задачи термоупругости.** В связи с разрывностью функции (1), описывающей толщину 2-го слоя балки, решение задачи термоупругости балки будет проводиться отдельно в обеих областях непрерывности ее толщины: I — до точки присоединения накладки ( $x < x_0$ ), II — после нее ( $x \geq x_0$ ).

Уравнения равновесия рассматриваемой балки в усилиях при изотермическом нагружении следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа (Lagrange) [3, 4]. Температура не входит явно в эти уравнения, поэтому они будут справедливы и в рассматриваемом случае термосиловых нагрузок. В общем случае уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$\begin{aligned} (a_1 + a_{10}H_0(x - x_0))u_{,xx} + (a_6 + a_{60}H_0(x - x_0))\psi_{,xx} - (a_7 + a_{70}H_0(x - x_0))w_{,xxx} &= -p, \\ (a_6 + a_{60}H_0(x - x_0))u_{,xx} + (a_2 + a_{20}H_0(x - x_0))\psi_{,xx} - (a_3 + a_{30}H_0(x - x_0))w_{,xxx} - a_5\psi &= 0, \\ (a_7 + a_{70}H_0(x - x_0))u_{,xxx} + (a_3 + a_{30}H_0(x - x_0))\psi_{,xxx} - (a_4 + a_{40}H_0(x - x_0))w_{,xxxx} &= -q. \end{aligned} \tag{6}$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными из-за функции Хевисайда  $H_0(x)$  коэффициентами, постоянные составляющие которых определяются как

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + 2K_3^+ c, \quad a_{10} = K_2^+ h_{21}, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \\ a_2 &= c^2 \left[ K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \quad a_{20} = c^2 K_2^+ h_{21}, \\ a_3 &= c \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_{20} \left( c + \frac{1}{2} h_{20} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \quad a_{30} = c K_2^+ h_{21} \left( c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right), \\ a_4 &= K_1^+ h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_{20} \left( c^2 + c h_{20} + \frac{1}{3} h_{20}^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \\ a_{40} &= K_2^+ h_{21} \left( c \left( c + 2h_{20} + h_{21} \right) + h_{20} h_{21} + h_{20}^2 + \frac{1}{3} h_{21}^2 \right), \\ a_5 &= 2G_3 c, \quad a_6 = c \left[ K_1^+ h_1 - K_2^+ h_{20} \right], \quad a_{60} = -c K_2^+ h_{21}, \\ a_7 &= K_1^+ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_{20} \left( c + \frac{1}{2} h_{20} \right), \quad a_{70} = -K_2^+ h_{21} \left( c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right). \end{aligned}$$

В первой области функция Хевисайда обращается в ноль и  $h_2 = h_{20}$ . Искомые перемещения в этой области пометим индексом "1". В этом случае система уравнений равновесия (6) принимает вид

$$\begin{aligned} a_1 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} &= -p, \\ a_6 u_{1,xx} + a_2 \psi_{1,xx} - a_3 w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 &= 0, \\ a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_4 w_{1,xxxx} &= -q. \end{aligned} \tag{7}$$

Ее аналитическое решение совпадает по виду с приведенным в [1] решением для трехслойной балки постоянной толщины:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= C_{21} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + C_{31} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + \\ &+ \frac{1}{\beta_1} \left[ \operatorname{sh}(\beta_1 x) \int g_1(x) \operatorname{ch}(\beta_1 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_1 x) \int g_1(x) \operatorname{sh}(\beta_1 x) dx \right], \\ w_1(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[ \alpha_{11} \int \psi_1 dx - a_7 L_3^{-1}(p) + a_1 L_4^{-1}(q) + \frac{a_1 C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51} x + C_{61}, \\ u_1(x) &= \gamma_{31} \psi_1 + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[ -a_4 L_2^{-1}(p) + a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7}{2} C_{11} x^2 \right] + C_{71} x + C_{81}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $C_{11}, \dots, C_{81}$  — константы интегрирования, определяемые из граничных условий,  $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$  — линейные интегральные операторы:

$$L_2^{-1}(g) \equiv \iint f(x) dx dx, \quad L_3^{-1}(g) \equiv \iiint f(x) dx dx dx, \quad L_4^{-1}(g) \equiv \iiint \int f(x) dx dx dx dx,$$

остальные параметры определяются как

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &= \frac{a_1 a_5 \alpha_{21}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}, \quad g_1(x) = \gamma_{21} p + \gamma_{11} \left( \int_0^x q dx + C_{11} \right), \\ \alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2 &\neq 0, \quad \alpha_{11} = a_1 a_3 - a_6 a_7, \quad \alpha_{21} = a_1 a_4 - a_7^2, \quad \alpha_{31} = a_1 a_2 - a_6^2, \\ \gamma_{11} &= \frac{a_1 \alpha_{11}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}, \quad \gamma_{21} = \frac{a_6 \alpha_{21} - a_7 \alpha_{11}}{\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2}, \quad \gamma_{31} = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_{21}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Во второй области, где функция Хевисайда равна единице и  $h_2 = h_{20} + h_{21}$ , искомые перемещения помечим индексом "2". Система уравнений равновесия для них имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11} u_{2,xx} + a_{61} \psi_{2,xx} - a_{71} w_{2,xxx} &= -p, \\ a_{61} u_{2,xx} + a_{21} \psi_{2,xx} - a_{31} w_{2,xxx} - a_5 \psi_2 &= 0, \\ a_{71} u_{2,xxx} + a_{31} \psi_{2,xxx} - a_{41} w_{2,xxxx} &= -q, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $a_{11} = a_1 + a_{10}$ ,  $a_{21} = a_2 + a_{20}$ ,  $a_{31} = a_3 + a_{30}$ ,  $a_{41} = a_4 + a_{40}$ ,  $a_{61} = a_6 + a_{60}$ ,  $a_{71} = a_7 + a_{70}$ .

Система уравнений (10) не отличается по виду от системы уравнений (7), поэтому ее решение  $u_2(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $w_2(x)$  можно представить в следующем виде (8):

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= C_{22} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + \frac{1}{\beta_2} \left[ \operatorname{sh}(\beta_2 x) \int g_2(x) \operatorname{ch}(\beta_2 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_2 x) \int g_2(x) \operatorname{sh}(\beta_2 x) dx \right], \\ w_2(x) &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[ \alpha_{12} \int \psi_2 dx - a_{71} L_3^{-1}(p) + a_{11} L_4^{-1}(q) + \frac{a_{11} C_{12}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{42}}{2} x^2 + C_{52} x + C_{62}, \\ u_2(x) &= \gamma_{32} \psi_{12} + \frac{1}{\alpha_{22}} \left[ -a_{41} L_2^{-1}(p) + a_{71} L_3^{-1}(q) + \frac{a_{71}}{2} C_{12} x^2 \right] + C_{72} x + C_{82}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $C_{12}, \dots, C_{82}$  — константы интегрирования, параметры  $g_2(x)$ ,  $\beta_2^2$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{22}$  и  $\gamma_{32}$  определяются по аналогии с такими же параметрами в (9):

$$\beta_2^2 = \frac{a_{11}a_5\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{12}^2}, \quad g_2(x) = \gamma_{22}p + \gamma_{12} \left( \int_0^x q dx + C_{12} \right),$$

$$\alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{12}^2 \neq 0, \quad \alpha_{12} = a_{11}a_{31} - a_{61}a_{71}, \quad \alpha_{22} = a_{11}a_{41} - a_{71}^2, \quad \alpha_{32} = a_{11}a_{21} - a_{61}^2,$$

$$\gamma_{12} = \frac{a_{11}\alpha_{12}}{\alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{12}^2}, \quad \gamma_{22} = \frac{a_{61}\alpha_{22} - a_{71}\alpha_{12}}{\alpha_{22}\alpha_{32} - \alpha_{12}^2}, \quad \gamma_{32} = \frac{a_{31}a_{71} - a_{41}a_{61}}{\alpha_{22}}.$$

В результате общее решение исходной системы уравнений (6) с учетом решений (8) и (11) будет следующее:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_1(x) + (\psi_2(x) - \psi_1(x))H_0(x - x_0), \\ u(x) &= u_1(x) + (u_2(x) - u_1(x))H_0(x - x_0), \\ w(x) &= w_1(x) + (w_2(x) - w_1(x))H_0(x - x_0). \end{aligned} \tag{12}$$

Отметим, что температура не входит в явном виде в уравнения равновесия (6) и (10). Их решение связывается с температурой через параметры упругости и константы интегрирования. Константы интегрирования  $C_{11}, \dots, C_{81}$ ,  $C_{12}, \dots, C_{82}$  определяются из 8 граничных условий на торцах балки и дополнительных 8 условий равенства перемещений и их производных в точке перепада толщин  $x = x_0$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi_2(x) - \psi_1(x) \rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \langle \psi_{2,x}(x) - \psi_{1,x}(x) \rangle_{x=x_0} = 0, \quad \langle \psi_{2,xx}(x) - \psi_{1,xx}(x) \rangle_{x=x_0} = 0, \\ \langle w_2(x) - w_1(x) \rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \langle w_{2,x}(x) - w_{1,x}(x) \rangle_{x=x_0} = 0, \quad \langle w_{2,xx}(x) - w_{1,xx}(x) \rangle_{x=x_0} = 0, \\ \langle u_2(x) - u_1(x) \rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \langle u_{2,x}(x) - u_{1,x}(x) \rangle_{x=x_0} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

В случае жесткой заделки левого конца балки при свободном правом торце используются следующие граничные условия на ее концах

$$\begin{aligned} x = 0: \quad w_1 &= w_{1,x} = u_1 = \psi_1 = 0, \\ x = l: \quad \psi_2 &= N_2 = M_2 = M_{2,x} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Для шарнирно опертой по обоим концам балки имеем

$$x = 0, l: u_{(1,2)} = \psi_{(1,2)} = w_{(1,2)} = M_{(1,2)} = 0. \tag{15}$$

Таким образом, задача определения 16 констант интегрирования замыкается присоединением к восьми уравнениям (13) восьми граничных условий на концах балки типа (14) и (15).

**Численные результаты.** Численные исследования выполнялись для балки с несущими слоями 1 и 2 (рис. 1), изготовленными из сплава дюралюминия с наполнителем (3) из фторопласта-4. При этом предполагалось, что  $c = 0.09$ ,  $h_1 = 0.03$ ,  $h_{20} = 0.02$ ,  $h_{21} = 0.01$  и  $l = 1$  м. Координата начала ступеньки  $x_0 = 0.5$  (если другое не указано). Торцы балки шарнирно оперты. Интенсивности нагрузок  $p = 0$ ,  $q = -1$  МПа. Термомеханические характеристики материалов приведены в табл. 1 и 2. На рис. 2 показаны графики изменения перемещений в балке при различных температурах. Нагревание слоев балки на 50 К приводит к увеличению ее прогиба и сдвига слоев в ней до 70%. При нагревании балки на 100 К подобное увеличение достигает примерно 135%.

Таблица 1. Термомеханические характеристики сплава Д16Т

Параметр	Значение параметра
$G_0$ , МПа	$0.267 \cdot 10^5$
$K_0$ , МПа	$0.8 \cdot 10^5$
$\alpha_0$ , 1/К	$24.3 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2. Термомеханические характеристики фторопласта-4

Параметр	Значение параметра
$G_0$ , МПа	90
$K_0$ , МПа	4700
$\alpha_0$ , 1/К	$17.8 \cdot 10^{-6}$

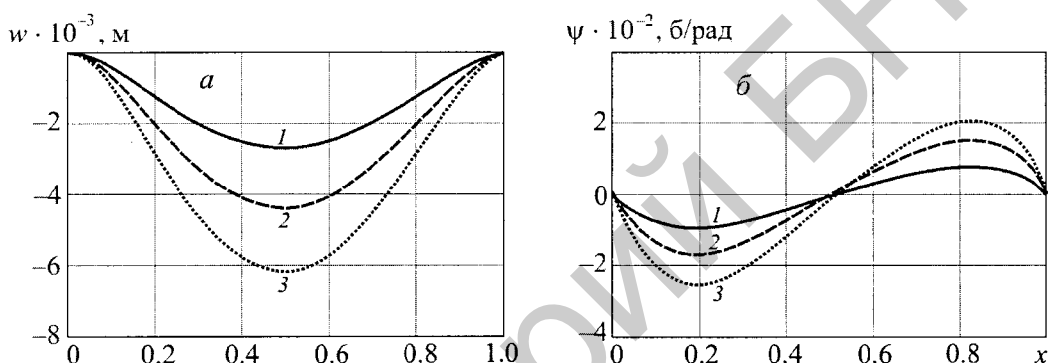


Рис. 2. Изменение перемещений в стержне вдоль его оси при температурах  $T = 293$  (1), 343 (2) и 393 К (3): а — прогиб  $w(x)$ ; б — относительный сдвиг заполнителя  $\psi(x)$

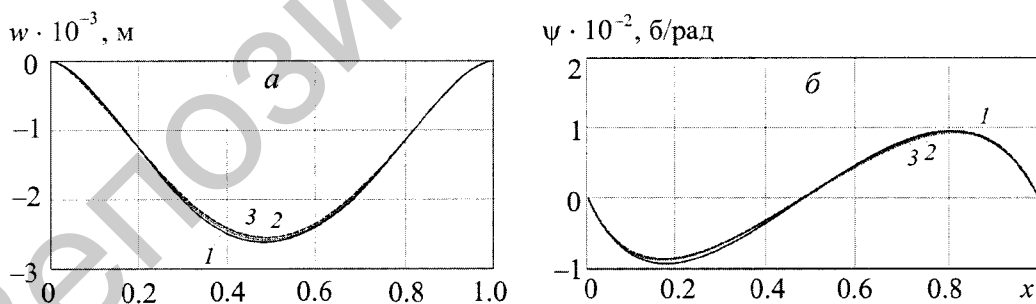


Рис. 3. Зависимость прогиба стержня (а) и относительного сдвига его заполнителя (б) вдоль оси  $x$  от толщины ступеньки при температуре  $T = 293$  К: 1 —  $h_{20} = 0$ ,  $h_{21} = 0.03$ ; 2 — 0.01, 0.02; 3 — 0.015, 0.015

Рис 3. иллюстрирует изменение перемещений слоев в балке в зависимости от толщины ступеньки. Суммарное количество материала слоя 2 остается постоянным, поскольку  $h_{20} + h_{21} = 0.03$ . Ступенька приводит к уменьшению жесткости балки и росту ее прогиба. Относительный сдвиг слоев в балке изменяется слабо. При принятых размерах ступеньки перемещения в балке мало зависят от ее наличия. На рис. 4 представлены напряжения на торцах балки. На левом торце напряжения экстремальны на внешней поверхности нижнего слоя, а на правом — на внутренней поверхности этого слоя. Увеличение температуры приводит к росту экстремумов напряжений во внешних слоях на 15–45%, а в заполнителе — на 20–60%.

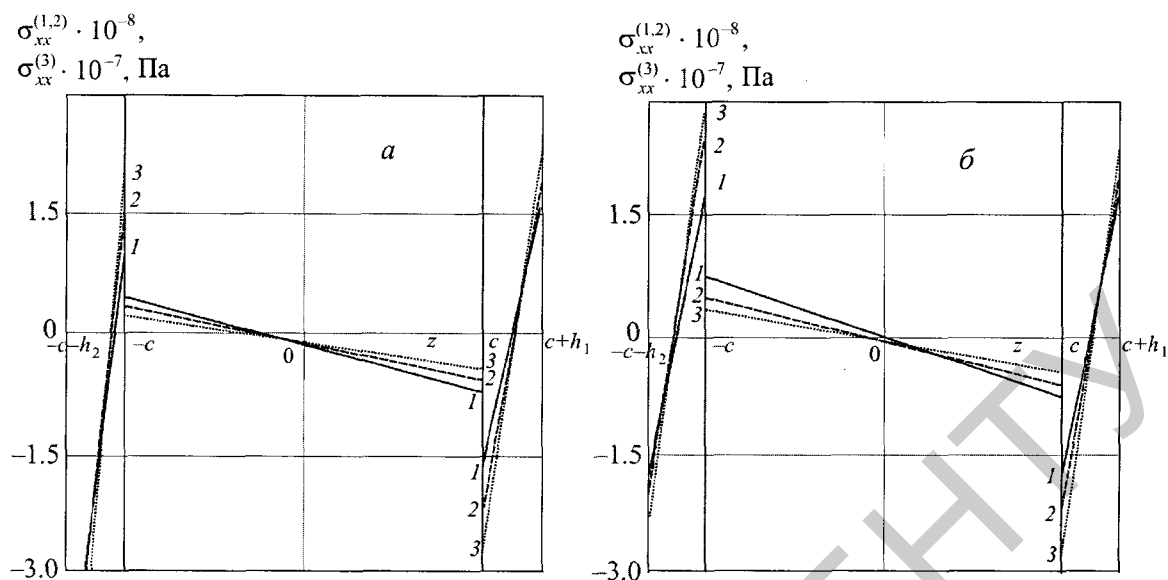


Рис. 4. Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня на его левом торце ( $x = 0$ ) при  $h_2 = h_{20}$  (а) и правом торце ( $x = l$ ) при  $h_2 = h_{20} + h_{21}$  (б): 1 —  $h_{21} = 0$ ,  $h_{21} = 0.03$ ; 2 — 0.01, 0.02; 3 — 0.015, 0.015

**Заключение.** Приведенная постановка краевой задачи об изгибе упругой трехслойной балки со ступенчато-переменной границей и ее общее решение (12) позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния элементов строительных и других конструкций в зависимости от прочностных и геометрических параметров их слоев и ступеньки при различных температурах.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-49-00091).

#### Обозначения

$b_0$  — ширина поперечного сечения балки, м;  $c$  — половина толщины заполнителя, м;  $G_k$  и  $K_k$  — сдвиговой и объемный модули упругости материалов слоев, Па;  $h_k$  — толщина  $k$ -го слоя балки, м;  $p$  и  $q$  — силовые нагрузки, Па;  $u(x)$  — продольное перемещение срединной поверхности заполнителя, м;  $u^{(k)}(x)$  — продольные перемещения в слоях балки, м;  $w(x)$  — прогиб балки, м;  $x$  и  $z$  — продольная и поперечная координаты;  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора напряжений и деформаций, Па, б/рад;  $\psi(x)$  — относительный сдвиг в заполнителе, б/рад. Индексы:  $k = 1, 2, 3$  — номера слоев.

#### Литература

1. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием*. Москва: Физматлит, 2011.
2. Игнатъев О. В., Карпов В. В., Филатов В. Н. *Вариационно-разностный метод в нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины*. Волгоград: Волгоградский гос. ун-т, 2001.
3. Плескачевский Ю. М., Старовойтова Е. Э. Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2008. № 3 (4). С. 52–55.
4. Старовойтова Е. Э. Напряженное состояние металлополимерного трехслойного стержня прямоугольного сечения со ступенчато-переменной границей. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2010. № 1 (12). С. 58–62.
5. Леоненко Д. В. Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании. *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2007. № 3. С. 70–74.
6. Харитонов В. В., Старовойтова Т. А., Старовойтов Э. И. Трехслойная пластинка при тепловом ударе. *Инженерно-физический журнал*. 1987. Т. 52, № 6. С. 1010–1017.
7. Starovoitov E. I. and Nagiyev F. B. *Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity, and Viscoelasticity*. Toronto: Apple Academic Press, 2012.
8. Старовойтов Э. И. *Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки*. Гомель: Белорусский гос. ун-т транспорта, 2002.