УДК 514.8

Вычисление расстояния до линии горизонта планеты Земля

Акимов В.А., Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

Воспользуемся формулами $\alpha = \left(\frac{3\Delta l}{2R}\right)^{\frac{1}{3}}$ (1) и $h = \sqrt[3]{\frac{9(\Delta l)^2 R}{32}}$ (2) при следующих данных $R = 6370\ км = 6{,}37 \cdot 10^6\ м$ - радиус Земли; $\Delta l = 1 см = 10^{-2} м$. В результате подсчета получим: $h = 5{,}64\ м$, $\alpha \approx 4{,}5' < 1/12$ градуса. Таким образом, решена следующая задача: если вокруг Земли обвить нить, а затем ее увеличить на 1 см и натянуть, то высота под ней в месте натяжения будет 5 м и 64 см.

Теперь воспользуемся формулой $BA = BC = \sqrt{2Rh}$ (3), где h - высота, с которой мы сморим на горизонт. В обычных условиях это уровень над землей наших глаз. Подсчет для $h = 1{,}7 м$ позволяет установить $BA = BC = 4{,}65 км$.

Фактически на Рис.1 угол α и высота h увеличены примерно в 350 раз. В действительности точка В сливается с верхней точкой окружности. Этим и объясняется, что была применена теория пределов с использованием эквивалентных бесконечно малых величин. Если не обращать внимания на сильное увеличение рисунка и применить школьную геометрию, то из известной теоремы о касательной и секущей можно получить формулу $AB^2 = h(2R + h)$ (4). Полагая в ней $2R + h \approx 2R$, опять получим найденную выше формулу (3). Это обстоятельство говорит о том, что если даже точка В фактически сливается с точкой окружности, то геометрическая школьная формула остается работоспособной и в этом случае, а помимо всего прочего это еще одно подтверждение правильности полученного результата. Пользуясь формулой (4), легко оценить относительную погрешность:

$$\Delta = \frac{\sqrt{(2R+h)h} - \sqrt{2Rh}}{\sqrt{2Rh}} \cdot 100\% = \frac{h^2}{(\sqrt{(2R+h)h} + \sqrt{2Rh}} \cdot 100\% <$$

$$< \frac{h^2}{2Rh} \cdot 100\% = \frac{h}{2R} \cdot 100\% = \frac{1{,}7}{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} \cdot 100\% = 0{,}33 \cdot 10^{-4}\%$$

Как видим, она составляет менее одной десятитысячной процента.

По своей сущности формула (3) напоминает известную формулу Торричелли $v = \sqrt{2gh}$ для определения скорости падающего с высоты h тела. Она также проста и изящна, и должна по праву быть включена в школьную программу по физике.