



*The offered calculation procedure allows to determine with adequate accuracy the temperature dynamics by section of slug depending on time.*

Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, Днепродзержинский государственный технический университет,  
П. Э. РАТНИКОВ, Белорусский национальный технический университет,  
Т. В. СОРОКО, ИТМО им. А.В. Лыкова НАН Беларуси,  
Д. В. МЕНДЕЛЕВ, Белорусский национальный технический университет

УДК 621.783

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗАГОТОВКАХ РАЗЛИЧНЫХ МАРОК СТАЛЕЙ

Все методы решения нелинейных задач теплопроводности можно разделить на три класса: аналитические; приближенные (инженерные); численные.

Перечисленные методы имеют свои преимущества и недостатки, область применения и т.д. В одних случаях предпочтение следует отдавать численным методам, позволяющим учесть физико-химические процессы, сложную геометрию нагреваемых тел, специфику организации тепловой работы печей, тепловое взаимодействие всех компонентов системы «кладка печи – факел горения топлива – нагреваемые заготовки», расположение газогорелочных устройств и т.д. В других случаях, например, при проведении оперативных расчетов, оценки влияния различных факторов на закономерности нагрева тел, высокая точность решения нелинейных задач численными методами оказываются излишними.

В работах [1–7] доказана необходимость дальнейшего совершенствования и развития приближенных методов, при этом обоснованы их преимущества для проведения конкретных исследований.

В настоящее время существует множество различных приближенных методов решения задач нестационарной теплопроводности, в основу которых положена модель термического слоя (МТС). При этом используется идея разбиения процесса по времени на два этапа: инерционный, который длится до тех пор, пока температурное возмущение не достигнет центра заготовки, и регулярный, где идет нагрев всех точек сечения тела. Наиболее распространенными из них являются интегральный метод теплового баланса Гудмена, метод исключения пространственных переменных Вейника, метод мгновенного регулярного режима Гольдфарба, итерационный метод Швеца, вариационные методы Био и Канторовича, метод эквивалентных источников Постольника.

Однако большинству этих методов присущи недостатки, главные из которых – одномерность области интегрирования в пространстве и необходимость априорного задания первоначального температурного профиля. Отсюда вид и точность решения определяются умением угадывать наиболее удачный задаваемый профиль температуры.

Эти недостатки становятся весьма существенными особенно при решении нелинейных задач теплопроводности. Поэтому большинство существующих МТС в таких случаях дает неудовлетворительные результаты. Исключением является метод эквивалентных источников (МЭИ), который не требует предварительного задания температурного профиля и лучше всех других МТС работает в нелинейной теории теплопроводности.

Таким образом, при моделировании процессов нагрева цилиндрических заготовок в кольцевых печах в качестве базового метода решения выбран метод МЭИ [1–7], хорошо зарекомендовавший себя при решении нелинейных задач нестационарной теплопроводности.

При расчете нагрева термочувствительных марок сталей, т.е. когда их теплофизические свойства существенно зависят от температуры, для упрощения математической модели предлагается линеаризовать эти зависимости. При построении линейных зависимостей в работе применяется метод наименьших квадратичных отклонений.

Вид прямой задается уравнением

$$y = ax + b. \tag{1}$$

Функционал квадратичных отклонений для данной зависимости записывается в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2. \tag{2}$$

Условия минимума функционала:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0. \tag{3}$$

Отсюда, произведя соответствующие вычисления, получаем

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i y_i \sum_{i=1}^N x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}, \tag{4}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - Nb}{\sum_{i=1}^N x_i}. \tag{5}$$

Математическая модель радиационно-конвективного симметричного нагрева неограниченного цилиндра из термочувствительных металлов имеет вид [1-7]:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi (1 + \epsilon_\lambda \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] = (1 + \epsilon_c \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \tag{6}$$

$$(1 + \epsilon_\lambda \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \text{Sk} [1 - \theta_n^4(\tau)] + \text{Bi} [1 - \theta_n(\tau)], \tag{7}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \tag{8}$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0 = \text{const}, \tag{9}$$

где  $\theta(\xi, \tau) = \frac{T(\xi, \tau)}{T_c}$ ;  $\xi = \frac{r}{R}$ ;  $\tau = \text{Fo} = \frac{at}{R^2}$ ;  $\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}$ ;  $\text{Sk} = \frac{\sigma_B}{\lambda} T_c^3 R$ ;  $\epsilon_\lambda = \frac{\delta_\lambda}{\lambda_0} T_c$ ;  $\epsilon_c = \frac{\delta_c}{c_V^0} T_c$ ;  $\lambda(T) = \lambda_0 + \delta_\lambda T$ ;

$$c_V(T) = c_V^0 + \delta_c T.$$

В соответствии с известной моделью термического слоя рассмотрим два последовательных этапа нагрева: инерционный, когда цилиндр только прогревается, и упорядоченный, когда температура меняется уже по всему сечению.

Решение для инерционного этапа прогрева ( $0 \leq \tau \leq \tau_0$ ) [1-7]:

$$\tau_0 = \frac{1 + \epsilon_c \theta_0}{8(1 + \epsilon_\lambda \theta_0)}, \tag{10}$$

где  $\tau_0$  – время, при котором  $\beta(\tau_0) = 0$ , т.е. время полного прогрева цилиндра;

$$\beta(\tau) = 1 - \sqrt{8 \frac{1 + \epsilon_\lambda \theta_0}{1 + \epsilon_c \theta_0} \tau}, \tag{11}$$

где  $\beta(\tau)$  – фронт прогрева.

Изменение температуры по сечению цилиндра:

$$\theta_1(\xi, \tau) = \theta_0 + [\theta_{1n}(\tau) - \theta_0] \frac{\xi^2 - \beta^2(\tau) + 2\beta^2(\tau) \ln \frac{\beta(\tau)}{\xi}}{1 - \beta^2(\tau) + 2\beta^2(\tau) \ln \beta(\tau)}. \quad (12)$$

Температура на поверхности цилиндра:

$$\theta_{1n}(\tau) = \theta_0 + \frac{[Sk + Bi(1 - \theta_0)][1 - \beta^2(\tau) + 2\beta^2(\tau) \ln \beta(\tau)]}{2(1 + \varepsilon_\lambda \theta_0)[1 - \beta^2(\tau)] + Bi[1 - \beta^2(\tau) + 2\beta^2(\tau) \ln \beta(\tau)]}. \quad (13)$$

В момент  $\tau_0$  температуру  $\theta_{1n}(\tau)$  определим по выражению:

$$\theta_{1n}(\tau_0) = \theta_n^0 = \theta_0 + \frac{Sk + Bi(1 - \theta_0)}{2(1 + \varepsilon_\lambda \theta_0) + Bi}. \quad (14)$$

Эта же температура является начальной для второго, упорядоченного, этапа прогрева ( $\tau_0 \leq \tau < \infty$ ), значение температуры на котором определяется как [1-7]:

$$\theta_2(\xi, \tau) = \theta_{2n}(\tau) - \frac{Sk[1 - \theta_{2n}^4(\tau)] + Bi[1 - \theta_{2n}(\tau)]}{2[1 + \varepsilon_\lambda \theta_{2n}(\tau)]} (1 - \xi^2). \quad (15)$$

Решение для поверхности цилиндра на этом этапе имеет вид

$$\sum_{i=1}^4 a_i [\varphi_i(\theta_{2n}) - \varphi_i(\theta_n^0)] = 2(Sk + Bi)(\tau - \tau_0), \quad (16)$$

где  $\varphi_1 = \frac{1}{2} [\text{arth} \theta_{2n}(\tau) + \text{arctg} \theta_{2n}(\tau)]; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} [\text{arth} \theta_{2n}(\tau) - \text{arctg} \theta_{2n}(\tau)]; \quad \varphi_3 = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \theta_{2n}^2(\tau)}{1 - \theta_{2n}^2(\tau)};$

$$\varphi_4 = -\frac{1}{4} \ln [1 - \theta_{2n}^4(\tau)]; \quad a_1 = 1 - \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_\lambda}{3(1 - \varepsilon_\lambda^4)} (4\varepsilon_\lambda^2 Sk - Bi); \quad a_2 = -\frac{4(\varepsilon_c - \varepsilon_\lambda)Sk + (1 - \varepsilon_c \varepsilon_\lambda^3)Bi}{3(1 - \varepsilon_\lambda^4)};$$

$$a_3 = \varepsilon_c - \frac{4\varepsilon_\lambda(\varepsilon_c - \varepsilon_\lambda)Sk - (\varepsilon_c - \varepsilon_\lambda^3)Bi}{3(1 - \varepsilon_\lambda^4)}; \quad a_4 = \frac{4(1 - \varepsilon_c \varepsilon_\lambda^3)Sk - \varepsilon_\lambda(1 - \varepsilon_c \varepsilon_\lambda)Bi}{3(1 - \varepsilon_\lambda^4)}.$$

Температура в центре цилиндра рассчитывается [1-7] по формуле:

$$\theta_{1z}(\tau) = \frac{1}{\varepsilon_\lambda} \left[ 1 - (1 - \varepsilon_\lambda \theta_n) \sqrt{1 + \varepsilon_\lambda \frac{Sk(1 - \theta_n^4) + Bi(1 - \theta_n)}{(1 - \varepsilon_\lambda \theta_n)^2}} \right]. \quad (17)$$

С помощью метода наименьших квадратов были линеаризованы теплофизические свойства (теплопроводность и объемная теплоемкость) для следующих марок сталей: Ст.08, 20, 45, 40X, ШХ15, У8, У12.

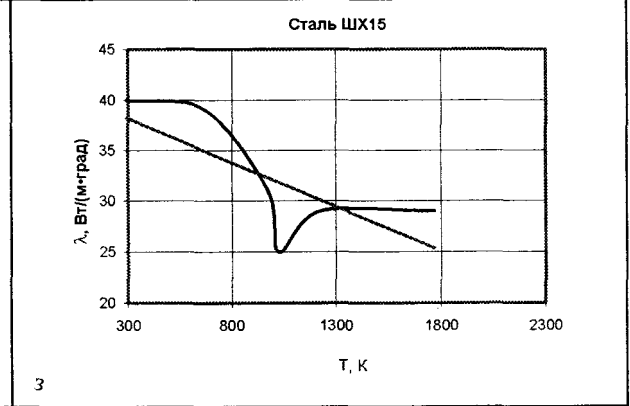
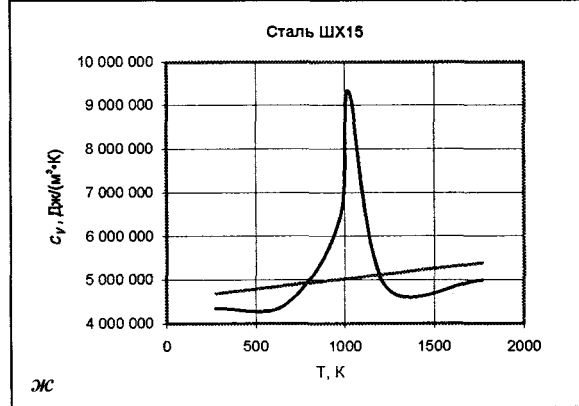
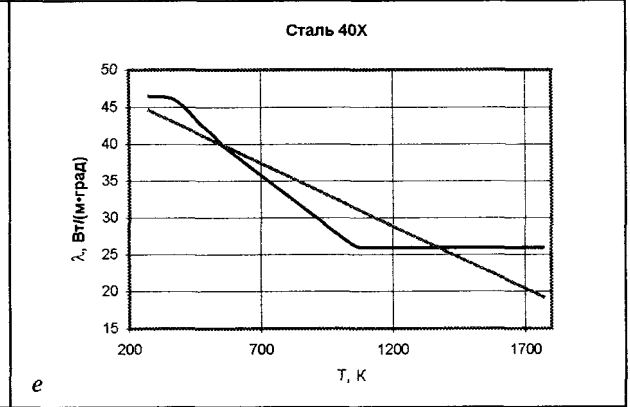
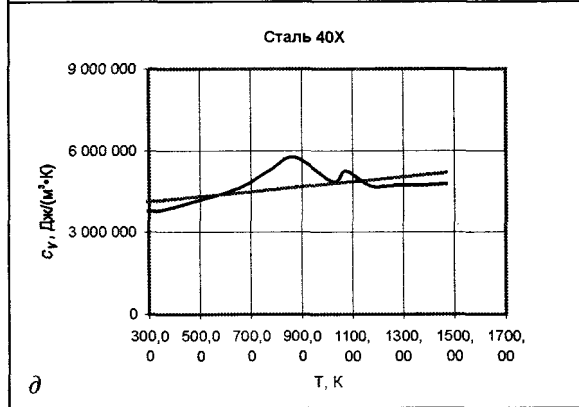
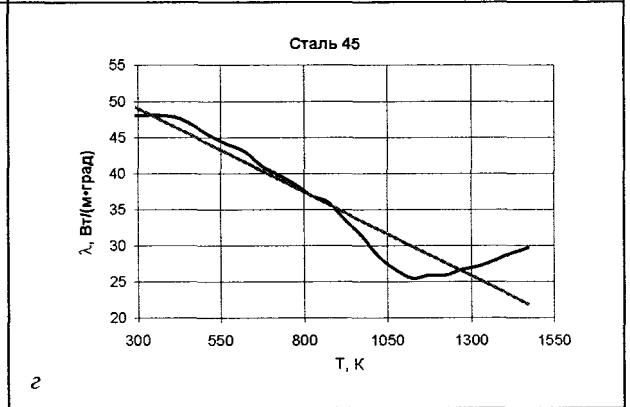
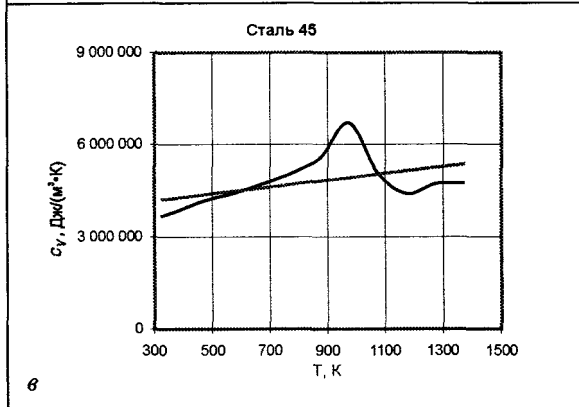
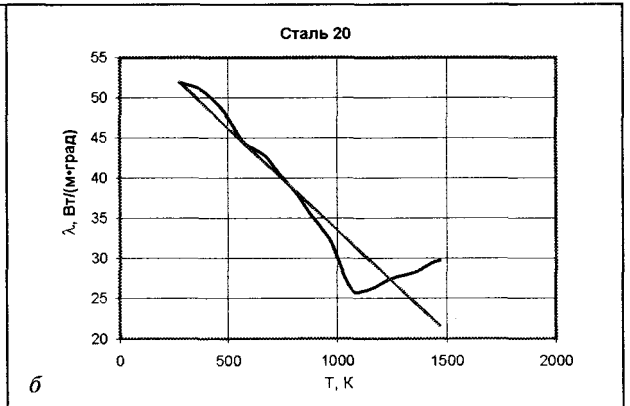
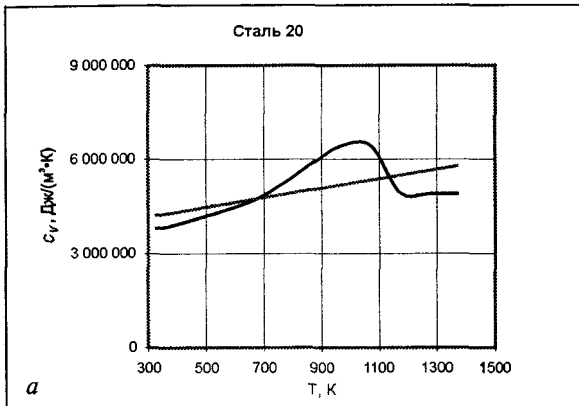
При линеаризации объемных теплоемкостей по формулам (4), (5) не учитывались максимумы этих зависимостей, так как они носят точечный характер. Результаты расчетов приведены на рис. 1, а-а, а формулы этих зависимостей – в табл. 1.

Расчеты проводили на ЭВМ. Были составлены две программы расчета на языке FORTRAN 6: для линеаризации свойств и расчета температурных полей.

Для оценки точности предложенной приближенной методики было произведено сравнение процессов нагрева цилиндрических заготовок, рассчитанных с помощью метода эквивалентных источников с точным численным решением. Исходные данные:  $Sk=0,3; Bi=0,05; \varepsilon_\lambda=-0,49; \varepsilon_c=1,33; \theta_0=0,196$ .

Численное решение задачи (6)–(9) проводили на ЭВМ методом конечных разностей с использованием явной разностной схемы. Выполняя замену частных производных их разностными аналогами, получаем следующие расчетные формулы:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{\Delta \xi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta \tau}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta \xi^2}. \quad (18)$$



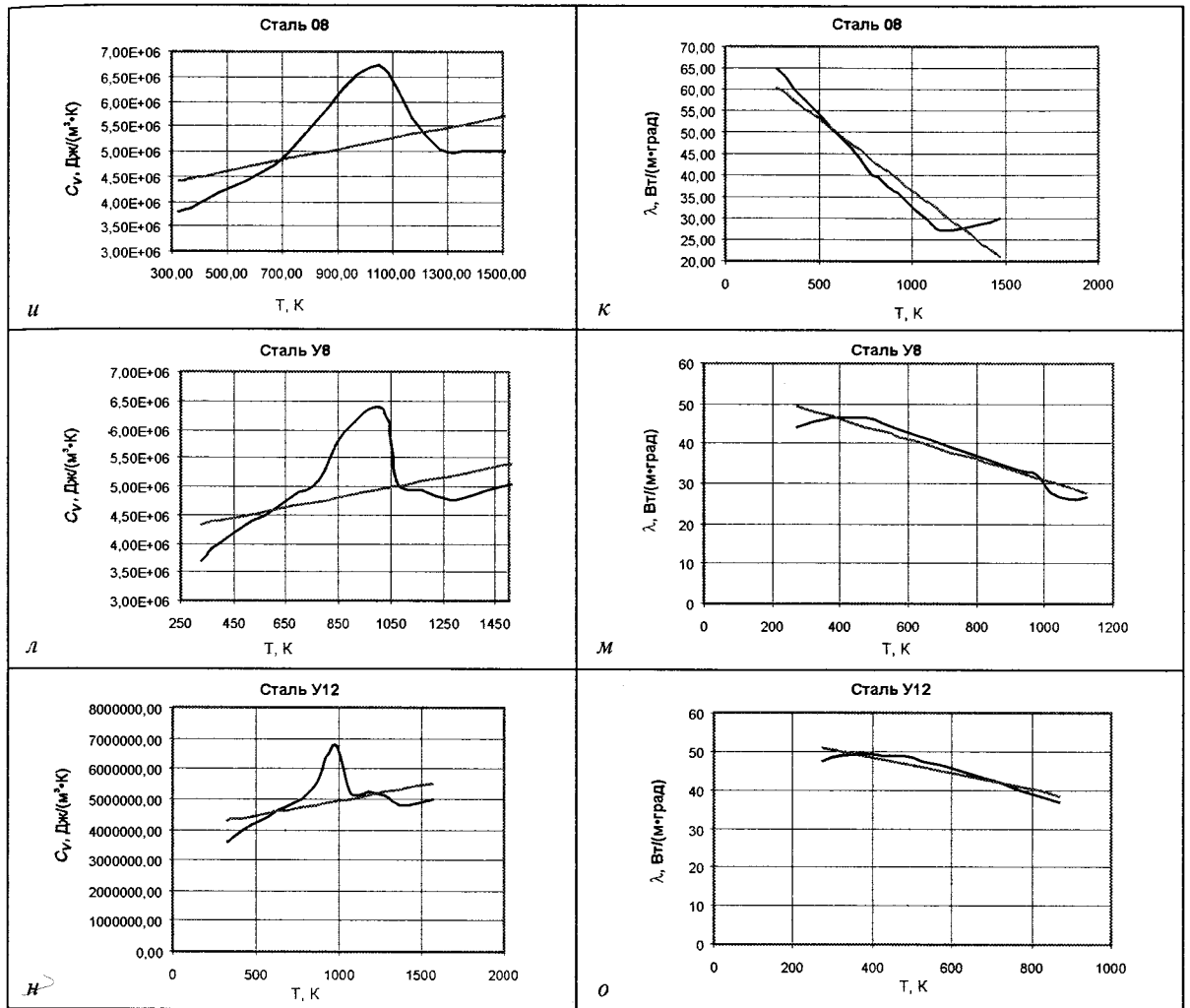


Рис. 1. Зависимости теплофизических свойств от температуры для выбранных марок сталей по данным [8]. Кривые линии – истинное поведение, прямые – линейризованные зависимости

Таблица 1. Формулы линейризованных зависимостей теплофизических свойств сталей от температуры

Марка стали	Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	Зависимость коэффициента объемной теплоемкости от температуры, $\text{Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{К})$
Сталь 08	$69.6 - 3.3 \cdot 10^{-2} T$	$40.6 \cdot 10^5 + 1090 T$
Сталь 20	$58.9 - 2.54 \cdot 10^{-2} T$	$37.2 \cdot 10^5 + 1510 T$
Сталь 45	$56.0 - 2.32 \cdot 10^{-2} T$	$38.5 \cdot 10^5 + 1100 T$
Сталь 40X	$49.3 - 1.7 \cdot 10^{-2} T$	$45.6 \cdot 10^5 + 469 T$
Сталь ШХ15	$40.8 - 8.74 \cdot 10^{-3} T$	$38.6 \cdot 10^5 + 916 T$
Сталь У8	$56.2 - 2.53 \cdot 10^{-2} T$	$40.5 \cdot 10^5 + 887 T$
Сталь У12	$56.8 - 2.09 \cdot 10^{-2} T$	$39.5 \cdot 10^5 + 999 T$

Температура во внутренних точках:

$$\theta_{ij+1} = \theta_{ij} + \frac{\Delta\tau}{(1 + \epsilon_c \theta_{ij})} \left( \frac{(1 + \epsilon_\lambda \theta_{ij})(\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j})}{i \Delta\xi^2} + \frac{(1 + \epsilon_\lambda \theta_{ij})(\theta_{i+1j} - 2\theta_{ij} + \theta_{i-1j})}{\Delta\xi^2} + \frac{\epsilon_\lambda (\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j})^2}{\Delta\xi^2} \right) \quad (19)$$

Температура поверхности:

$$\theta_{nj+1} = \theta_{n-1j+1} + \frac{\Delta\rho}{(1 + \epsilon_c \theta_{nj+1})} \left( \text{Sk} [\theta_{rj+1}^4 - \theta_{nj+1}^4] + \text{Bi} (\theta_{rj+1} - \theta_{nj+1}) \right), \quad (20)$$

где  $i$  – номер пространственного слоя;  $j$  – номер временного интервала.

Уравнение (20) представляет собой трансцендентное уравнение относительно температуры поверхности  $\theta_{n,j+1}$  в последующий момент времени. Для его решения использовали метод последовательных приближений Ньютона:

$$\theta_{n,j+1} = \theta_{n,j} - \frac{\Phi}{\Phi'}$$

где  $\Phi$  представляет уравнение (20), заданное в виде  $\Phi(\theta_{n,j+1})=0$ ;  $\Phi$  – производная по температуре поверхности. Для нахождения удовлетворительной точности достаточно 5–10 итерационных шагов.

Результаты сравнения метода эквивалентных источников с численными расчетами приведены на рис. 2.

Из рисунка видно хорошее согласование обоих методов. Максимальное расхождение

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{\text{анал}} - \theta_{\text{числ}}}{\theta_{\text{макс}}} \cdot 100\%$$

не превышает 5%, что

говорит об адекватности методики (10)–(17) для расчета высокотемпературного нагрева стальных цилиндрических заготовок с переменными теплофизическими свойствами.

С помощью предложенной методики (10)–(17) были рассчитаны динамики изменения температурных полей в цилиндрических заготовках для сталей Ст.8, 20, 45, 40Х, ШХ15, У8, У12 диаметрами 130 и 150 мм при нагреве их по камерному режиму. Исходные данные для расчетов:  $T_0 = 300$  К,  $\alpha = 60$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\sigma = 2,8 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $T_c = 1440$  К. Теплофизические параметры взяты из табл. 1. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

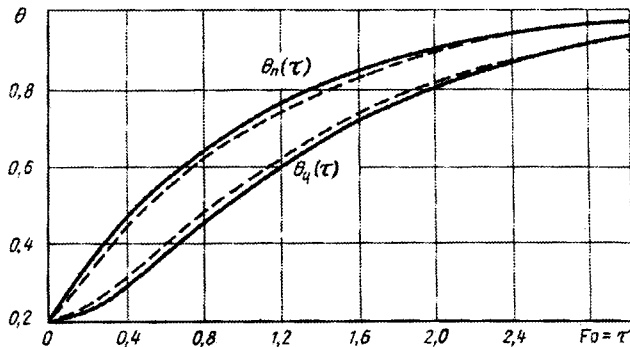


Рис. 2. Изменение относительных температур поверхности  $\theta_n(\tau)$  и центра  $\theta_c(\tau)$  в зависимости от критерия Фурье: сплошные линии – по приближенному решению, штриховые – численное решение

Таблица 2. Длительность нагрева и конечный перепад по сечению цилиндрических заготовок

Марка стали	Диаметр, мм	Время нагрева, ч	Перепад по сечению заготовки
Сталь 20	130	1,43	6
Сталь 45	130	1,26	7
Сталь 40Х	130	1,19	8
Сталь ШХ15	130	1,3	7
Сталь 20	150	1,7	8
Сталь 45	150	1,5	10
Сталь 40Х	150	1,43	8
Сталь ШХ15	150	1,56	7

Таким образом, предложенная расчетная методика позволяет с достаточной точностью определить динамику температуры (что было подтверждено сравнением с экспериментом) по сечению заготовки в зависимости от времени, а затем при необходимости и термонапряжения, возникающие в металле при нагреве.

### Литература

1. Постольник Ю.С., Тимошпольский В.И. Радиационно-конвективный нагрев неограниченного цилиндра с функционально-зависящими теплофизическими характеристиками // Изв. вузов. Энергетика. 1980. №3. С. 121–124.
2. Постольник Ю.С., Тимошпольский В.И., Сичевой А.П. Анализ технологии нагрева металла в пламенных печах // Изв. вузов. Черная металлургия. 1979. №2.
3. Тимошпольский В.И., Трусова И.А., Пекарский М.Я. Кольцевые печи. Мн.: Выш. шк., 1993.
4. Промышленные теплотехнологии: Моделирование нелинейных процессов: Учеб. в 5-ти ч. Ч.5 / В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, А.П. Несенчук; Под общ. ред. В.И. Тимошпольского, А.П. Несенчука. Мн.: Выш. шк., 2000.
5. Стальной слиток. В 3-х т. Т.3. Нагрев / В.И. Тимошпольский, Ю.А. Самойлович, И.А. Трусова; Под общ. ред. В.И. Тимошпольского, Ю.А. Самойловича. Мн.: Белорусская наука, 2001.
6. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах: Учеб. пособ. / В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, А. Б. Стеблов, И. А. Павлюченков. Мн.: Выш. шк., 1992.
7. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев: Виша шк., 1984.
8. Неймарк Б.Е. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: Справ. М.: Металлургия, 1967.