

МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 622.673.29-85(045)(476)

**ДВИЖЕНИЕ ПНЕВМАТИЧЕСКОГО КОЛЕСА
ПО МАЛОДЕФОРМИРУЕМОЙ ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Казаченко Г.В. (УО «Белорусский национальный технический университет», г. Минск, Беларусь)

Предлагается подход к моделированию движения колеса, основанный на формировании силовой функции по способу академика М.В. Келдыша, а диссипативной – на базе теории трения профессора Ф.А. Опейко. Полученные соотношения анализируются в наиболее часто встречающихся режимах криволинейного движения с уводом и прямолинейном при действии тяговой нагрузки. Показано, что сформированная модель движения колеса хорошо согласуется с экспериментами, результаты которых приводятся в специальной литературе.

Введение

Моделированию движения колеса посвящено огромное количество исследований и научных работ прикладного и фундаментального характера [1]. Это обусловлено, прежде всего, тем, что колесные движители – самые распространенные опорно-ходовые устройства транспортных и тягово-энергетических средств. Причем сфера их применения непрерывно расширяется, что влечет за собой появление новых конструкций колес, обеспечивающих их надежную работу в самых разнообразных условиях. Этим объясняется неослабевающий интерес к исследованию работы колеса и поиску технических решений, повышающих эффективность колесных движителей.

При моделировании движения машин на колесном ходу, колесо рассматривается как элемент, воспринимающий нагрузки от некоторой машины и передающий их опорной поверхности. Под действием этих нагрузок колесо деформируется, а характер и величина деформаций существенно зависят от конструктивных параметров колеса, величины нагрузок и свойств опорного основания.

Большое разнообразие конструкций колес, характеристик материалов шин и физико-механических свойств опорных оснований не позволяет охватить единой теорией движение и работу колес во всех возможных ситуациях. Это обусловило создание ряда теорий движения колеса, которые хорошо объясняют его работу в одних условиях, но недостаточны для описания движения в других ситуациях. Характерные особенности работы колеса можно определить следующими ситуациями:

- жесткое колесо – твердое основание (деформации колеса и дороги пренебрежительно малы по сравнению с его размерами);
- жесткое колесо – деформируемое опорное основание (пренебрежительно малы только деформации колеса);
- деформируемое колесо – жесткое опорное основание (пренебрежительно малы только деформации дороги);
- деформируемое колесо – деформируемое опорное основание.

В настоящее время наиболее распространенным и важным в практических приложениях в связи с почти абсолютным применением пневматических колес при безрельсовом транспорте является третий вариант работы колеса. При моделировании работы колеса в таких условиях воспользуемся моделью деформаций шины, предложенной в свое время академиком АН СССР М.В. Келдышем [2], и теорией трения члена-корреспондента АН БССР Ф.А. Опейко [3].

Формирование основных зависимостей

Движение пневматического колеса на опорной поверхности сопровождается смещением его контактной площади относительно обода и деформациями шины, включая и деформации контактной площадки. Силы, действующие на колесо и вызывающие деформации шины, могут быть найдены по величине этих деформаций. Для этого необходимо определить деформации шины и установить зависимость сил от величин параметров деформации. Следуя [2] считаем, что силы от параметров деформаций шины зависят линейно, а деформированное состояние шины определяется смещением центра контакта из натурального положения и поворотом контактной площадки в плоскости дороги относительно обода. Под центром контакта площадки понимается центр ее давления на опорную поверхность, который при симметричном распределении давления совпадает с полюсом трения. При определении параметров деформации шины и нагрузок, вызывающих эти деформации, введем системы координат $Oxyz$ и $Oknz'$ с началом в центре колеса. Ось Ox первой системы совпадает с осью вращения колеса, а ось Oz отклонена от нормали к опорной поверхности вместе с ободом, оси Ox и On второй системы параллельны опорной плоскости. Таким образом, параметры деформации определены в триэдре, связанном с опорной поверхностью. В этом же триэдре определены скорости v_k, v_n, v_z деформации центра контакта шины и угловые скорости ω_1, ω_2 поворота колеса. Скорость вращения колеса вокруг своей собственной оси обозначена через ω_3 (рисунок 1, 2). Углы θ – отклонения обода от нормали к опорной поверхности, и γ – поворота контактной площадки относительно обода, малы, поэтому принимаем $\cos \theta = 1, \cos \gamma = 1, \sin \theta = 0, \sin \gamma = \gamma$.

Тогда, обозначив смещения центра контакта через $\lambda_k, \lambda_n, \lambda_z$, силы и моменты, вызывающие эти деформации и повороты $P_k, P_n, P_z, M_\gamma, M_\theta$ и, считая известной матрицу d жесткостей, запишем:

$$\begin{aligned} P_k &= d_{11}\lambda_k + d_{12}\lambda_n + d_{13}\lambda_z + d_{14}\gamma + d_{15}\theta; \\ P_n &= d_{21}\lambda_k + d_{22}\lambda_n + d_{23}\lambda_z + d_{24}\gamma + d_{25}\theta; \\ P_z &= d_{31}\lambda_k + d_{32}\lambda_n + d_{33}\lambda_z + d_{34}\gamma + d_{35}\theta; \\ M'_\gamma &= d_{41}\lambda_k + d_{42}\lambda_n + d_{43}\lambda_z + d_{44}\gamma + d_{45}\theta; \\ M'_\theta &= d_{51}\lambda_k + d_{52}\lambda_n + d_{53}\lambda_z + d_{54}\gamma + d_{55}\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

где d_{ij} – элементы матрицы жесткости;

P_k, P_n, P_z – проекции равнодействующей упругих сил на соответствующие оси;

M'_y, M'_θ – проекции момента упругих сил на плоскость дороги и плоскость, перпендикулярную ободу.

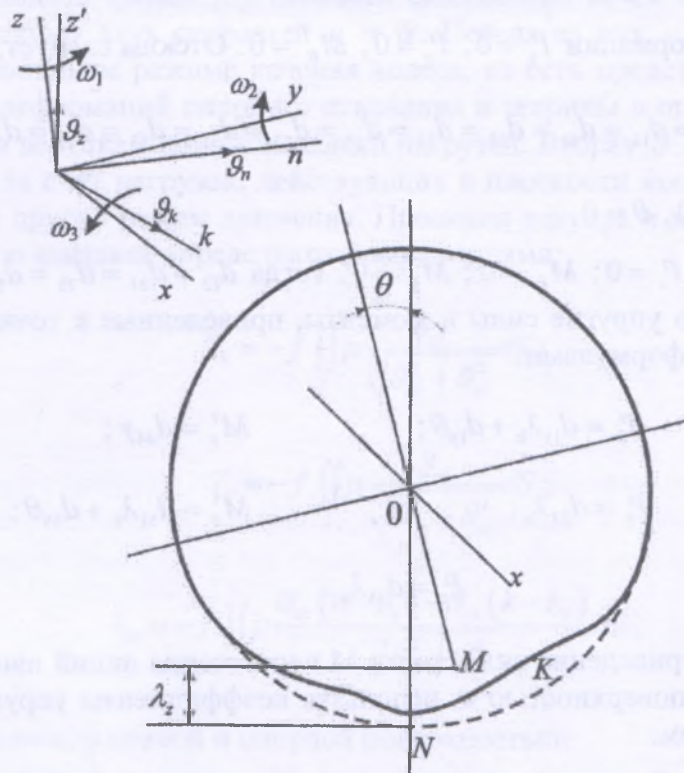


Рисунок 1 – Деформация экваториальной линии шины

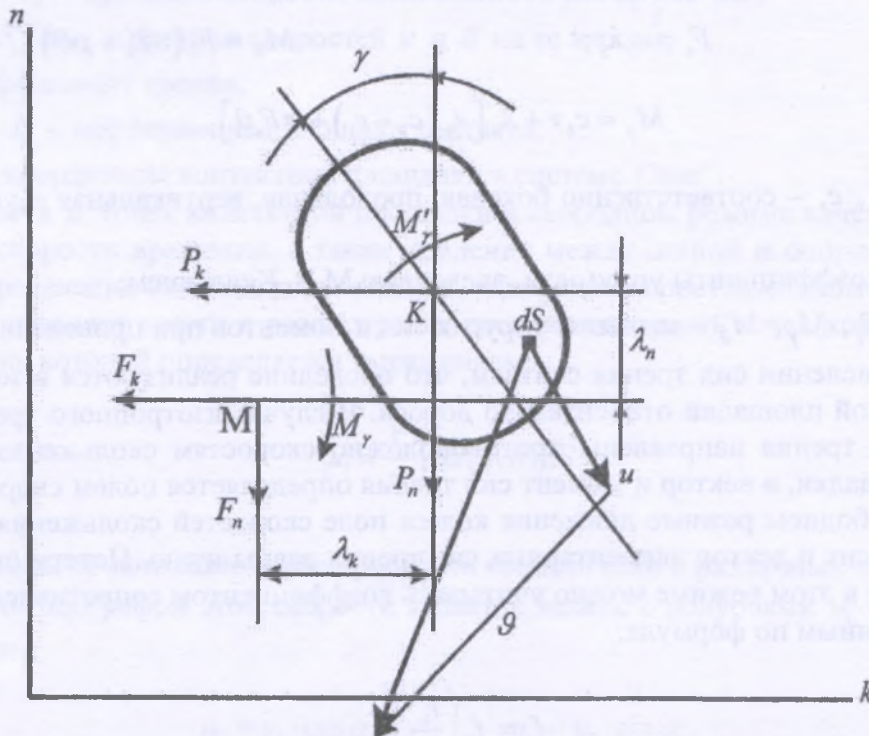


Рисунок 2 – Деформация контактной площадки в плоскости дороги

Так как по условию упругие силы потенциальны, то $d_{ik} = d_{ki}$. Рассуждая теперь аналогично [2], рассмотрим частные случаи деформации шины и определим нагрузки в таких ситуациях:

$$1. \lambda_k = 0, \lambda_n = 0, \theta = 0.$$

При такой деформации $P_k = 0, P_n = 0, M_\theta' = 0$. Отсюда следует, что:

$$d_{31} = d_{13} = d_{14} = d_{41} = d_{32} = d_{23} = d_{24} = d_{42} = d_{35} = d_{53} = d_{45} = d_{54} = 0. \quad (2)$$

$$2. \lambda_k = 0, \gamma = 0, \theta = 0.$$

В этом случае $P_k = 0; M_\theta' = 0; M_\gamma' = 0$. Тогда $d_{12} = d_{21} = d_{25} = d_{52} = d_{34} = d_{43} = 0$.

С учетом этого упругие силы и моменты, приведенные к точке К (центру контакта), определяются формулами:

$$\begin{aligned} P_k &= d_{11}\lambda_k + d_{15}\theta; & M_\gamma' &= d_{44}\gamma; \\ P_n &= d_{22}\lambda_n; & M_\theta' &= d_{51}\lambda_k + d_{55}\theta; \\ P_z &= d_{33}\lambda_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Осуществляя приведение сил в точке М пересечения линий наибольшего наклона колеса с опорной поверхностью и, используя коэффициенты упругости, введенные М.В. Келдышем, имеем:

$$\begin{aligned} F_k &= c_1\lambda_k + \sigma F_z\theta; & F_n &= c_2\lambda_n; \\ F_z &= c_3\lambda_z; & M_\theta &= F_z(\sigma\lambda_k + \rho\theta); \\ M_\gamma &= c_4\gamma + \lambda_n[\lambda_k(c_2 - c_1) + \sigma F_z\theta], \end{aligned} \quad (4)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – соответственно боковая, продольная, вертикальная и угловая жесткости шины;

σ, ρ – коэффициенты упругости, введенные М.В. Келдышем;

$F_k, F_n, F_z, M_\gamma, M_\theta$ – значения упругих сил и моментов при приведении к точке М.

При вычислении сил трения считаем, что последние реализуются в зоне скольжения контактной площадки относительно дороги. В случае изотропного трения элементарные силы трения направлены противоположно скоростям скольжения точек контактной площадки, а вектор и момент сил трения определяется полем скоростей скольжения. В свободном режиме движения колеса поле скоростей скольжения таково, что главный момент и вектор элементарных сил трения равны нулю. Потери энергии колеса на качение в этом режиме можно учитывать коэффициентом сопротивления качению [4], определенным по формуле:

$$f_c = f_0 \left(\frac{r_k^0}{r_k^c} \right)^2, \quad (5)$$

где f_0 – коэффициент сопротивления качению колеса в ведомом режиме;

r_k^0, r_k^c – радиусы качения в ведомом и свободном режимах.

Для вычисления проекций вектора и момента элементарных сил трения представим, используя модель трения [5], скорости скольжения точек контактной площадки (рисунок 2) как сумму двух скоростей u и \mathcal{G} . Первая из них u – скорость, которую имеет точка в свободном режиме качения колеса, то есть представляющая собой разность скоростей деформаций опорного основания и ширины в опорной плоскости под действием только вертикальной сжимающей нагрузки. Вторая \mathcal{G} есть скорость, приобретаемая точкой за счет нагрузок, действующих в плоскости контакта и вызывающих переход колеса в другой режим движения. Проекции вектора и момент сил трения относительно центра контакта определяются выражениями:

$$T_k = -f \iint_S p \frac{\mathcal{G}_{ck}}{\sqrt{\mathcal{G}_{ck}^2 + \mathcal{G}_{cn}^2}} dS;$$

$$T_n = -f \iint_S p \frac{\mathcal{G}_{cn}}{\sqrt{\mathcal{G}_{ck}^2 + \mathcal{G}_{cn}^2}} dS; \quad (6)$$

$$L_k = -f \iint_S p \frac{\mathcal{G}_{ck}(n - n_k) - \mathcal{G}_{cn}(k - k_k)}{\sqrt{\mathcal{G}_{ck}^2 + \mathcal{G}_{cn}^2}} dS,$$

где p – давление между шиной и опорной поверхностью;

$\mathcal{G}_{cn} = \mathcal{G}_n + u_n$ – проекция скорости скольжения точки на ось On ;

$\mathcal{G}_{ck} = \mathcal{G}_k + u_k$ – проекция скорости скольжения точки на ось Ok ;

$\mathcal{G}_n, u_n, \mathcal{G}_k, u_k$ – проекция скоростей u и \mathcal{G} на те же оси;

f – коэффициент трения;

$dS = d_n \cdot d_k$ – дифференциал площади контакта;

n и k – координаты контактной площадки в системе $Oknz'$.

Скорости u точек контактной площадки в свободном режиме качения являются функциями скорости вращения, а также давления между шиной и опорной поверхностью. Из определения этого режима следует, что поле скоростей скольжения симметрично. Это позволяет ввести в рассмотрение среднюю скорость точек контактной площадки, модуль которой определяется выражением:

$$|u| = \frac{1}{S} \iint_S |u(k, n)| dS. \quad (7)$$

Принимая во внимание неоднородность свойств шин в различных направлениях, положим, что годографом этой скорости является эллипс с полуосями u_1 и u_2 , уравнения которого:

$$u_k = u_1 \cdot \cos \alpha; \quad u_n = u_2 \cdot \sin \alpha, \quad (8)$$

и осредним функции, стоящие в числителе и знаменателе подынтегральных выражений (7) по углу α :

$$\begin{aligned} g_{ck} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{ck} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g_k + u_1 \cos \alpha) d\alpha = g_k; \\ g_{cn} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{cn} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g_n + u_2 \sin \alpha) d\alpha = g_n; \\ \sqrt{g_{cn}^2 + g_{ck}^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} (g_{cn}^2 + g_{ck}^2) d\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(g_k + u_1 \cos \alpha)^2 + (g_n + u_2 \sin \alpha)^2] d\alpha} = \\ &= \sqrt{g_k^2 + g_n^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя модель трения скольжения [6], а также, учитывая обновление контактирующих сред в процессе движения колеса, примем, что средние относительные скорости u_1 и u_2 пропорциональны среднему давлению в контакте. Тогда в первом приближении:

$$u_1 = k_1 \cdot P_z \cdot \omega_3; \quad u_2 = k_2 \cdot P_z \cdot \omega_3, \quad (10)$$

где k_1, k_2 – коэффициенты пропорциональности;

P_z – нормальная нагрузка на пятно контакта.

Предположение о пропорциональности скоростей u_1 и u_2 среднему давлению нормальной к опорной поверхности нагрузке справедливо, если контактирующие материалы подчиняются закону Гука и имеют разные по величине коэффициенты Пуассона, и требует экспериментального определения коэффициентов k_1 и k_2 . Как показано далее, эта гипотеза хорошо согласуется с экспериментальными данными по определению радиуса качения колеса при действии тягового усилия.

Перепишем теперь (6) с учетом полученных осредненных значений скоростей скольжения:

$$\begin{aligned} T_k &= -f \iint_S p \frac{g_k}{\sqrt{g_k^2 + g_n^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}} dS; \\ T_n &= -f \iint_S p \frac{g_n}{\sqrt{g_k^2 + g_n^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}} dS; \end{aligned} \quad (11)$$

$$L_k = -f \iint_S p \frac{g_k(n - n_k) - g_n(k - k_k)}{\sqrt{g_k^2 + g_n^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}} dS.$$

Вычисление интегралов (11) возможно при известном распределении скоростей \mathcal{G} и u всех точек контактной площадки шины. Свойства этих интегралов, называемых функциями трения, изучены в математической теории трения [3]. В практических приложениях обычно пользуются их приближенными значениями, которые вычисляются по средним значениям давления в пятне контакта и скорости скольжения его центра [7, 8]:

$$\begin{aligned}
 T_k &= -f \cdot P_z \frac{\mathcal{G}_k}{\sqrt{\mathcal{G}_{kk}^2 + \mathcal{G}_k^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}}; \\
 T_n &= -f \cdot P_z \frac{\mathcal{G}_n}{\sqrt{\mathcal{G}_{kn}^2 + \mathcal{G}_{kn}^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}}; \\
 L_k &= -f \cdot P_z \frac{r_a^2 \cdot \omega_k^2}{\sqrt{\mathcal{G}_{kk}^2 + \mathcal{G}_{kn}^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}},
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где r_a – статистический радиус трения;

ω_k – угловая скорость контактной площадки;

\mathcal{G}_{kn} , \mathcal{G}_{kk} – проекции скорости скольжения центра контактной площадки.

Контактная площадка колеса скользит по опорной поверхности с поворотом только при криволинейном движении колеса. В этом случае угловую скорость ω_k поворота контактной площадки можно представить как сумму (рисунок 1) переносной угловой скорости ω_1 и скорости $\dot{\gamma}$ – поворота контактной площадки относительно обода колеса:

$$\omega_k = \omega_1 + \dot{\gamma}.$$

Поворот контактной площадки относительно обода начинается раньше ее соприкосновения с опорной поверхностью. В связи с этим среднее значение угловой скорости поворота можно принять пропорциональным углу поворота γ , т.е. принять $\dot{\gamma} = k \cdot \gamma$.

Статистический радиус трения определяется как отношение момента трения при повороте контактной площадки относительно центра давления к нормальной нагрузке, умноженной на коэффициент трения $r_a = \frac{L_k}{f \cdot P_z}$, где L_k – момент трения при повороте колеса относительно центра контакта.

Полученные соотношения (12) совместно с (3) позволяют составить уравнения равновесия контактной площадки шины. Эти уравнения в отличие от уравнений неголономных связей катящейся шины дают возможность применять для моделирования колесных машин уравнения движения голономных систем во всех режимах движения.

Рассмотрим некоторые частные режимы движения колеса и покажем, что разработанная модель хорошо согласуется с наиболее известными и применяемыми в инженерных расчетах зависимостями.

Пусть колесо движется прямолинейно при небольшой величине тяговой силы. Тогда $T_k = 0$, $L_k = 0$, $\omega_k = 0$, $\mathcal{G}_{kk} = 0$, а величина продольной силы трения по (12):

$$T_n = -f \cdot P_z \frac{\mathcal{G}_n}{\sqrt{\mathcal{G}_{kn}^2 + \frac{1}{2} k_2^2 P_z^2 \omega_3^2}}. \quad (13)$$

Скорость скольжения центра контакта:

$$\mathcal{G}_{kn} = \mathcal{G}_{On} - \omega_3 r_k^c, \quad (14)$$

где r_k – радиус качения колеса.

Выражения для вычисления T_n принимает вид:

$$T_n = -f \cdot P_z \frac{\omega_3 (r_k - r_k^c)}{\sqrt{\omega_3^2 (r_k - r_k^c)^2 + \frac{1}{2} k_2^2 P_z^2 \omega_3^2}}. \quad (15)$$

Разложив выражение для T_n в ряд по степеням разности $r_k - r_k^c$ и, ограничившись первым членом, получим:

$$T_n \approx -f \frac{\sqrt{2} (r_k - r_k^c)}{k_2}. \quad (16)$$

При небольшой величине тяговой нагрузки радиус качения определяется по известной формуле академика Е.А. Чудакова:

$$r_k = r_k^c - c_\lambda T_n,$$

где $c_\lambda = \frac{T_n}{c_2 \cdot \lambda_n}$ – коэффициент пропорциональности. Из (16):

$$r_k = r_k^c - \frac{k_2}{f \sqrt{2}} T_n.$$

Сравнивая два последних соотношения, находим:

$$k_2 = c_\lambda f \sqrt{2}. \quad (17)$$

Последняя зависимость позволяет определить величину k_2 по накопленным экспериментальным значениям c_λ и f .

Рассмотрим теперь качение колеса с малым углом увода при отсутствии тяговой силы. Такое движение обычно имитируется на стендах для испытания шин и определя-

ется условиями $\omega_k = 0$, $\vartheta_n = 0$. Согласно (12) поперечная сила в этом случае определяется формулой:

$$T_k = -f \cdot P_z \frac{\vartheta_k}{\sqrt{\vartheta_k^2 + \frac{1}{2} k_1^2 P_z^2 \omega_3^2}}. \quad (18)$$

Боковая скорость центра контакта:

$$\vartheta_k = \vartheta_{Ok}.$$

При малых углах ввода:

$$\vartheta_{Ok} = \vartheta_{On} \gamma,$$

$$T_k = -f \cdot P_z \frac{\omega_3 r_k \gamma}{\sqrt{\omega_3^2 r_k^2 \gamma^2 + \frac{1}{2} (k_1^2 \omega_3^2 P_z^2)}}. \quad (19)$$

Разлагая это выражение по степеням γ и пренебрегая членами второго порядка малости, имеем:

$$T_k = -f \frac{r_k \gamma \sqrt{2}}{k_1}. \quad (20)$$

С другой стороны, по гипотезе Рокара:

$$T_k = -k_y \gamma,$$

где k_y – коэффициент сопротивления боковому уводу.

Отсюда:

$$k_1 = \frac{f r_k \sqrt{2}}{k_y}. \quad (21)$$

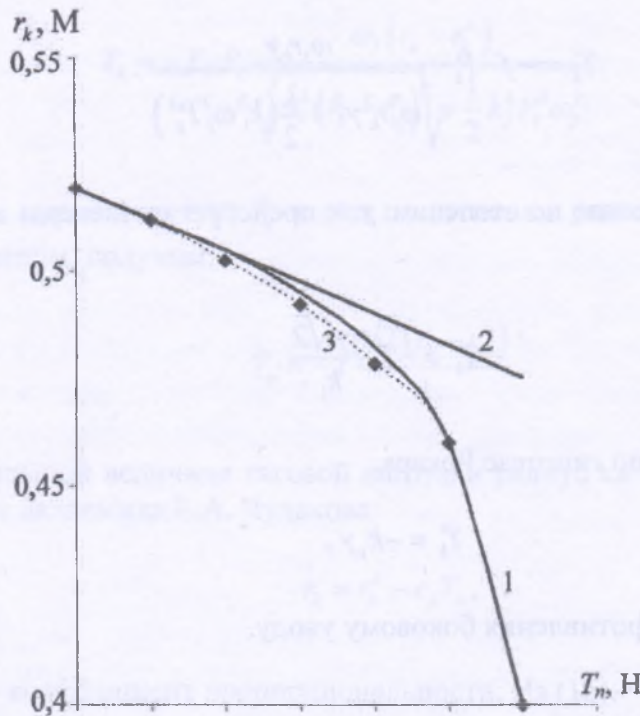
Формулы (17) и (21) позволяют вычислить коэффициенты k_1 и k_2 по значениям c_λ , r_k , k_y , определяемым экспериментально и получившим широкое применение в практических расчетах.

Отметим также хорошее совпадение зависимости (15) с экспериментальными данными по измерению радиуса качения колеса, приведенными в [1]. Преобразуем формулу (15), разрешив ее относительно r_k :

$$r_k = r_k^c - \frac{T_n k_2 P_z}{\sqrt{2 \cdot (f^2 P_z^2 - T_n^2)}} \quad (22)$$

Для определения коэффициентов f и k_2 воспользуемся методикой, предложенной в работе [6]. Обработка экспериментальных данных, приведенных в [1], дала следующие значения этих коэффициентов: $f = 0,866$; $k_2 = 0,4745 \cdot 10^{-5}$.

На основании этих данных по формуле (22) построен график зависимости радиуса качения от тяговой нагрузки для шины 12.00-18 при внутреннем давлении воздуха $P_n = 275$ кПа, вертикальной нагрузке $P_z = 275$ кПа, радиусе свободного качения $r_k^c = 0,52$ м (рисунок 3). На этом рисунке приведены также экспериментальные данные и прямая (2), построенная по формуле Е.А. Чудакова [1]. Численное сравнение экспериментальных и расчетных данных не приводим, так как относительная погрешность не превышает 4 %.



1 – формула (22); 2 – формула Е.А. Чудакова; 3 – экспериментальные данные [1]

Рисунок 3 – Зависимость радиуса качения шины 12.00-18 от тягового усилия

Выводы

В предлагаемой модели работы колеса охвачены едиными зависимостями все ситуации взаимодействия с опорной поверхностью от режима свободного качения до полного буксования. Это дает возможность моделировать движение колесных машин в единой системе уравнений во всем диапазоне изменения тяговых нагрузок. Упругие силы в пневматической шине моделируются по способу М.В. Келдыша, т.е. линейной моделью. В ряде случаев, например, для шин низкого давления, этого недостаточно. Предлагаемый подход не исключает применения нелинейных упругих моделей в таких случаях.

Список использованных источников

1. Динамика системы дорога – шина – водитель / А.А. Хачатуров [и др.]; под общ. ред. А.А. Хачатурова. – М.: Машиностроение, 1976. – 535 с.
 2. **Келдыш, М.В.** Шимми переднего колеса трехколесного шасси / М.В. Келдыш // Тр ЦАГИ. – 1945. – № 564. – 33 с.
 3. **Опейко, Ф.А.** Колесный и гусеничный ход / Ф.А. Опейко. – Минск: АСХН БССР, 1960. – 228 с.
 4. **Петрушов, В.А.** Сопротивление качению автомобилей и автопоездов / В.А. Петрушев, С.А. Шуклин, В.В. Московкин. – М.: Машиностроение, 1975. – 235 с.
 5. **Опейко, Ф.А.** Модель трения покоя / Ф.А. Опейко // Труды Института торфа АН БССР. – 1985. – Т.6. – С. 511-520.
 6. **Казаченко, Г.В.** О силе трения при плоском контакте трущихся тел / Г.В. Казаченко // Горная механика. – 2006. – № 4. – С. 69-73.
 7. **Давыдик, И.И.** Исследование поворота гусеничного хода: дис. ... канд. техн. наук / И.И. Давыдик. – Минск, 1970. – 211 с.
 8. **Казаченко, Г.В.** Исследование поворота колесных машин с бортовой схемой управления: дис. ... канд. техн. наук / Г.В. Казаченко. – Минск: 1982. – 203 с.
-

Kazachenko G.V.

Tire motion on small deformed support surface

Approach to tire motion simulation based on shaping of force function after the manner of the academician M.V. Keldysh and as for dissipative function – on the base of friction theory of the professor F.A. Opeyko is proposed. The received correlations are analyzed in the most frequently occurring modes of curvilinear deviation motion and rectilinear motion by traction load action. It is shown that the shaped model of tire motion is well co-ordinated with the experiments which results are given in the books on specialized subjects.

Поступила в редакцию 22.08.2011 г.