УДК 536.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ

Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И., канд. техн. наук ШУБ Л. И.

Белорусский национальный технический университет

В ряде энергетических и неэнергетических технологий в качестве теплоносителей используются жидкости, обладающие энергоаккумулирующими свойствами. К ним относятся: жидкие металлы и сплавы, применяемые в системах охлаждения в качестве жидкометаллических и промежуточных теплоносителей при передаче тепловой энергии в энергетических устройствах и системах, а также в качестве композиционных материалов на основе алюминия в технологиях производства водорода, в процессах получения аморфных и композиционных материалов в технологиях сверхбыстрой кристаллизации и т. д.

В работе предложена математическая модель тепломассопереноса в жидкостях, движущихся в металлических каналах, с учетом физических и химических превращений и изменений теплофизических и гидродинамических свойств веществ в процессах транспортировки по трубам и каналам.

При постановке задачи предполагаем, что вязкость не является постоянной величиной, изменяется во времени и зависит от температуры и координат. Изменение вязкости в алюминиевых сплавах при решении задач численными методами учитывается аппроксимирующими зависимостями вязкости от температуры, полученными на основании экспериментальных данных.

Математическая модель включает в себя замкнутую систему дифференциальных уравнений энергии, неразрывности, движения теплоносителей.

Дифференциальные уравнения движения жидкости выводятся исходя из основных законов сохранения: закона сохранения количества движения, закона сохранения массы, закона сохранения энергии [1, 2]. Законы сохранения применимы к массе жидкости m, заключенной в произвольно выделенном из всей жидкости объеме V в момент времени t.

Уравнение неразрывности выводят из закона сохранения массы: масса жидкости m, первоначально занимающая произвольный объем V, с течением времени не изменяется

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Масса жидкости в объеме $Vm = \int \rho dV$ может измениться во времени за счет изменений плотности ρ и объема V, выражающихся формулами $\int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ и $\int\limits_S \rho \upsilon_n dS$ соответственно, где S – площадь поверхности, ограничивающей объем V; υ_n – скорость перемещений элемента поверхности dS по нормали.

Подставляя эти выражения в уравнение, выражающее закон сохранения массы, получаем

$$\int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_S \rho \upsilon_n dS = 0.$$

Заменяя поверхностный интеграл на объемный по формуле Остроградского – Гаусса $\int\limits_S \rho \upsilon_n dS = \int\limits_V \operatorname{div} \rho \boldsymbol{\upsilon} dV,$ получаем

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \boldsymbol{\upsilon} \right) dV = 0.$$

Окончательно получаем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \boldsymbol{\upsilon} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение количества движения выводится из закона сохранения количества движения, который формулируется так: изменение количества движения жидкости m в объеме V за единицу времени равняется сумме всех внешних сил, приложенных к объему V:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i,$$

где $\mathbf{K} = \int_V \rho \boldsymbol{\upsilon} dV$ – вектор количества движения выделенной массы жидкости; $\mathbf{F}_i$ – внешние силы, приложенные к массе m.

Производная по времени от **K** находится по аналогии с производной от массы

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho \boldsymbol{\upsilon}}{\partial t} dV + \int_S \rho \boldsymbol{\upsilon} \upsilon_n dV + \int_S \rho \boldsymbol{\upsilon} \upsilon_n dS =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial \rho \boldsymbol{\upsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \boldsymbol{\upsilon} \upsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \boldsymbol{\upsilon} \upsilon_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \boldsymbol{\upsilon} \upsilon_z) \right] dV.$$

Внешние силы складываются из объемных F_V и поверхностных сил давления F_p и трения F_τ. Как и ранее, обозначим: **F** – удельная массовая сила; p – давление; $\boldsymbol{\tau}_n$ – касательное напряжение, действующее на элементе dS поверхности площадью S, окружающей произвольный объем V. Тогда указанные силы могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{F}_V = \int_V \rho \mathbf{F} dV; \quad \mathbf{F}_P = -\int_S p\mathbf{n} dS; \quad \mathbf{F}_\tau = \int_S \boldsymbol{\tau}_n dS.$$

Подставляя полученные выражения в уравнения, выражающие закон сохранения количества движения, находим

$$\int_V \frac{\partial \rho \boldsymbol{\upsilon}}{\partial t} dV + \int_S \rho \upsilon_n \boldsymbol{\upsilon} dS = \int_V \rho \mathbf{F} dV - \int_S p\mathbf{n} dS + \int_S \boldsymbol{\tau}_n dS. \qquad (2)$$

Уравнение энергии выводится из закона сохранения энергии, согласно которому изменение полной энергии выделенной массы жидкости за единицу времени равняется работе всех внешних сил, приложенных к ней, плюс количество подведенной теплоты Q вследствие теплопроводности, излучения или химических реакций.

Полная энергия E выделенного элемента жидкости складывается из внутренней и кинетической энергии. Внутренняя U_0 и кинетическая энергии единичной массы жидкости соответственно равны $c_V T$ и $\upsilon^2/2$. Тогда полная энергия E жидкости массой m, заключенной в объеме V:

$$E = \int_V \rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)dV.$$

Математическая запись закона сохранения энергии имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \sum L_i + Q.$$

Суммарная работа внешних сил $\sum_i L_i$ складывается из работы сил давления $\int_S p(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\upsilon})dS$, сил трения $\int_S (\boldsymbol{\tau}_n\cdot\boldsymbol{\upsilon})dS$ и массовых сил $\int_V \rho(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\upsilon})dV$, где «$\cdot$» означает скалярное произведение. Обозначая через q_n количество теплоты, проходящей через единичную площадь поверхности S, запишем выражение для количества теплоты Q, получаемой массой m за единицу времени, в виде $Q = \int_S q_n dS$.

Находя производную

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)dV + \int_S \rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)\upsilon_n dS =$$

$$= \int_S \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right) + \mathrm{div}\left[\rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)\right]\boldsymbol{\upsilon}dS$$

и учитывая выражение для отдельных видов механической и тепловой энергии, в соответствии с законом сохранения энергии получаем

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)dV + \int_S \rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)\upsilon_n dS =$$

$$= -\int_S \rho(\mathbf{n}\boldsymbol{\upsilon})dS + \int_S (\boldsymbol{\tau}_n\boldsymbol{\upsilon})dS + \int_V \rho(\mathbf{F}\boldsymbol{\upsilon})dV + \int_S q_n dS.$$

Преобразуя поверхностные интегралы в объемные, получаем с учетом произвола объема V уравнение энергии в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right) + \mathrm{div}\left[\rho\left(U_0 + \frac{\upsilon^2}{2}\right)\boldsymbol{\upsilon}\right] =$$

$$= -\mathrm{div}p\boldsymbol{\upsilon} + \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\tau}_x\boldsymbol{\upsilon}) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{\tau}_y\boldsymbol{\upsilon}) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\tau}_z\boldsymbol{\upsilon}) + \rho(\mathbf{F}\boldsymbol{\upsilon}) + \mathrm{div}\mathbf{q}.$$

Левая часть записанного уравнения с учетом (1) может быть представлена как полная производная от полной энергии в виде $\rho dE/dt$, и тогда уравнение энергии примет вид

$$\rho\frac{d}{dt}\left(U_0+\frac{\upsilon^2}{2}\right)=-\mathrm{div}p\boldsymbol{\upsilon}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{\tau}_x\boldsymbol{\upsilon}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{\tau}_y\boldsymbol{\upsilon}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{\tau}_z\boldsymbol{\upsilon}\right)+\rho\left(\mathbf{F}\boldsymbol{\upsilon}\right)+\mathrm{div}\mathbf{q}. \quad (3)$$

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение Навье–Стокса. В случае несжимаемой жидкости ρ = const, и уравнение неразрывности упрощается

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\upsilon}=0$$

или в проекции на оси координат

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=0.$$

Если предположить, что вязкость μ по всему объему постоянна, что справедливо для изотермического ламинарного течения, то получаем уравнения движения:

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\left(\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial\upsilon_y}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2\upsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_y}{\partial z^2}\right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial\upsilon_z}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_z}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\upsilon\left(\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial z^2}\right).$$

Уравнения (4) называются уравнениями Навье–Стокса.

Запишем также уравнения Навье–Стокса и энергии в пренебрежении диссипацией в цилиндрических координатах $r\varphi z$ для осесимметричного течения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r\upsilon_r}{\partial r}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial\upsilon_r}{\partial t}+\upsilon_r\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_r}{\partial z}-\frac{\upsilon_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\upsilon_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial z^2}-\frac{\upsilon_r}{r^2}\right];$$

$$\frac{\partial\upsilon_z}{\partial t}+\upsilon_r\frac{\partial\upsilon_z}{\partial r}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\upsilon_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial z^2}\right]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial\upsilon_\varphi}{\partial t}+\upsilon_r\frac{\partial\upsilon_\varphi}{\partial r}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_\varphi}{\partial z}+\frac{\upsilon_r\upsilon_\varphi}{\tau}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\upsilon_\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\upsilon_\varphi}{\partial z^2}-\frac{\upsilon_\varphi}{r^2}\right];$$

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\upsilon_r\frac{\partial T}{\partial r}+\upsilon_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

При отсутствии конвективного переноса теплоты, связанного с движением среды, составляющие скорости равны нулю, а уравнения энергии сводятся к уравнениям теплопроводности:

- в декартовых координатах

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right); \tag{6}$$

- в цилиндрических координатах

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{7}$$

В качестве начальных условий должны быть заданы распределенные значения гидродинамических параметров в момент времени $t = 0$. По пространственным координатам уравнения имеют второй порядок относительно каждой составляющей скорости и температуры. Для определенности задачи на всех границах должны быть заданы либо компоненты скорости и температура, либо их градиенты (соответственно напряжения и тепловые потоки). Поле давления обычно рассчитывается с точностью до аддитивной составляющей. Часто вместо проекции скорости на границах задают нормальную и две касательные составляющие скорости (в плоском течении – одну касательную скорость).

На твердых поверхностях задается равенство нулю нормальной (условия непротекания) и касательных (условие прилипания) составляющих скорости. На свободной поверхности обычно известны напряжения. На входной границе, через которую жидкость втекает в рассматриваемую область, как правило, известны или определяются по заданному расходу распределенные значения скорости из соотношений, полученных из уравнений движения. На выходной границе области чаще всего становятся «мягкие» граничные условия, которые получаются путем применения экстрополяционных зависимостей. Можно сказать, что динамические граничные условия сводятся к заданию либо граничных составляющих скорости υ_n и υ_τ, либо производных, что равносильно заданию составляющих тензора напряжений.

Граничные условия по температуре для жидкого потока ставятся в зависимости от условий теплообмена. Наиболее точный способ состоит в равенстве температур и тепловых потоков на контактных поверхностях:

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_f = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_\omega, \quad T_f = T_\omega,$$

где индекс f – поток теплоты и температура жидкости, индекс ω – соответствующие величины для твердого тела. Эти граничные условия требуют совместного решения уравнений переноса теплоты в жидкости и в телах, ограничивающих поток жидкости.

Раздельное рассмотрение уравнений энергии в жидкости и в твердом теле производится при граничных условиях первого, второго и третьего родов.

Граничное условие первого рода состоит в задании температуры на контактной поверхности $T_f = T_\omega = f(t)$, граничное условие второго рода – в задании поверхностного теплового потока

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_f = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_\omega = q_\omega(t), \qquad (8)$$

где q_ω – тепловой поток, которым обмениваются между собой жидкости и твердое тело.

Граничные условия третьего рода характеризуют теплообмен между жидкостью и твердым телом

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_f = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_\omega = \alpha\left(T_\omega - T_{f\infty}\right), \qquad (9)$$

где α – коэффициент теплоотдачи; $T_{f\infty}$ – температура жидкости в точке, достаточно далеко удаленной от поверхности ω.

В приведенных соотношениях производные берутся со знаком «плюс», если направление внешней нормали к поверхности противоположно направлению теплового потока, знак «минус» – в противном случае.

Численным методом проведен расчет затвердевания и охлаждения движущегося расплава в полости цилиндрической формы заданной геометрии [3]. Расчеты выполнены для двумерной модели с учетом переменной вязкости металла как функции температуры $\mu = f(T)$ во всей области течения. В качестве искомых (зависимых) параметров выбраны составляющие скорости u и v (в продольном и поперечном направлениях), давление в потоке p, функции тока ψ, температуры T в потоке, затвердевшей корке металла, форме.

ВЫВОДЫ

Предлагается математическая модель движущихся теплоносителей в нестационарных полях давлений, скоростей и температур.

Проведен анализ краевых условий первого, второго и третьего родов. Установлено, что динамические граничные условия сводятся к заданию либо граничных составляющих скорости, либо производных, равнозначных заданию составляющих тензора напряжений. Для определения задачи на всех границах должны быть заданы или компоненты скорости и температура, или их градиенты (соответственно напряжения и тепловые потоки).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков, А. В. Тепломассообмен: справ. / А. В. Лыков. – М.: Энергоатомиздат, 1972.
2. Расчеты процессов литья / Р. И. Есьман [и др.]. – Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 264 с.

3. А н а л и з решения сопряженной задачи тепломассопереноса при формировании тонкостенных литых заготовок / Р. И. Есьман, Л. И. Шуб // Энергетика… (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2009. – № 5. – С. 58–65.

Представлена кафедрой ПТЭ и ТТ Поступила 28.09.2010