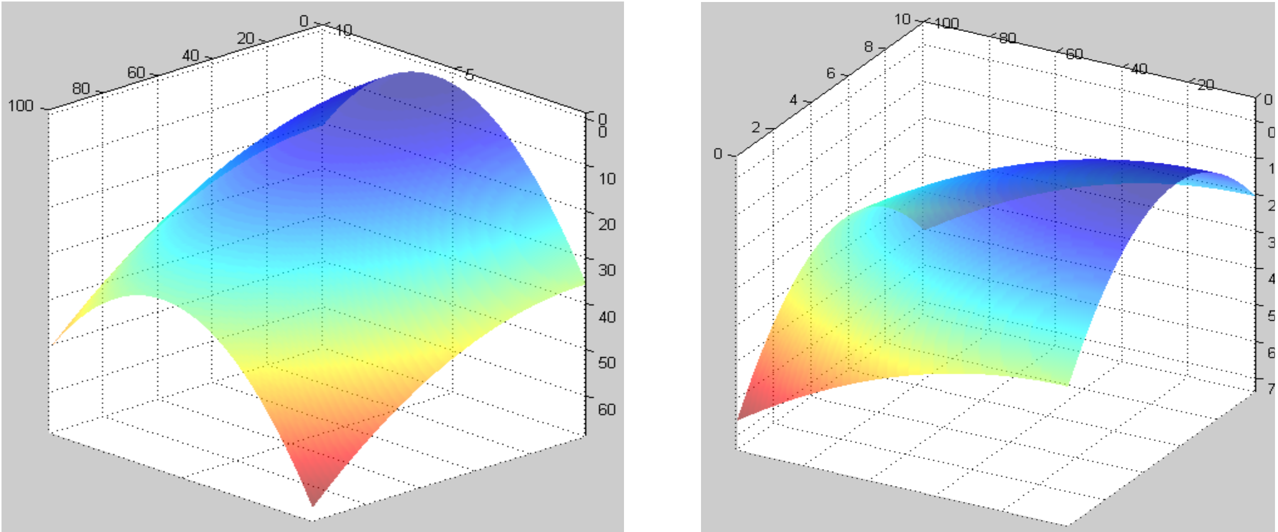

Рисунок 1. Кузовная поверхность (передняя часть кузова).

Методика моделирования и построения поверхности позволит снизить энергозатраты на производственное оборудование при изготовлении кузовных поверхностей.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.2, Наука, М., 1970.
2. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования, Наука, М., 1987.

УДК 519.245

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Белая О. В., Жидиков Г. А.
Научный руководитель – Метельский А. В., д. ф.-м. н., профессор.

Сущность метода Монте-Карло [1] состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой исследуемой величины. Для этого выбирают случайную величину U с известным законом распределения, математическое ожидание которой равно a

$$\mathrm{M}(U) = a.$$

Производят n независимых испытаний, в результате которых получают n значений случайной величины U. Вычисляют выборочную среднюю

$$\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n}$$

и принимают $\bar{u}$ в качестве оценки (приближённого значения) a^* искомой величины a

$$a \approx a^* = \bar{u}.$$

Покажем, как с помощью метода Монте-Карло можно определить число π. Способ определения числа π был предложен Бюффоном еще в 1777 году. Суть метода заключалась в бросании иглы длиной L на плоскость, расчерченную параллельными прямыми и расположенными на расстоянии r друг от друга. Необходимо, чтобы выполнялось условие: $r > L$.

Пользуясь геометрическим определением находим, что вероятность пересечения иглой прямых будет равна

$$p - \frac{2L}{r\pi}.$$

А поскольку согласно теореме Бернулли относительная частота пересечений m/n примерно равна этой вероятности, для приближенного вычисления числа π имеем формулу

$$\pi = \frac{2L}{r}\frac{n}{m}.$$

При увеличении количества испытаний точность получаемого результата будет увеличиваться.

Рассмотрим вычисление определенного интеграла с помощью метода Монте-Карло. Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_0^2 (4 - x^2)dx.$$

Построим график функции $y = 4 - x^2$ и ограничим полученную параболу прямоугольником с основанием [0;2] и высотой равной 4. Согласно равномерному распределению случайным образом внутри прямоугольника выберем n точек (рис.1).

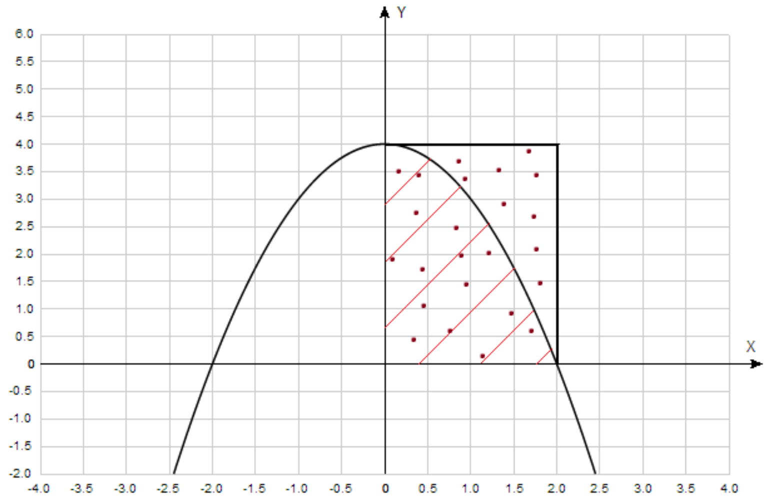

Рисунок 1. Вычисление определенного интеграла методом Монте-Карло через площадь.

С одной стороны, вероятность попадания точки в область ниже параболы равна отношению площади части параболы к площади прямоугольника:

$$p = \frac{S_{\text{пар}}}{S_{\text{прям}}} = \frac{S_{\text{пар}}}{8}.$$

С другой стороны, эта вероятность равна отношению числа точек, лежащих ниже параболы m, к числу всех расставленных точек n: $p = \frac{m}{n}$.

Таким образом: $S_{\text{пар}} = \frac{8m}{n}$. Следовательно, интеграл $\int_0^2 (4 - x^2)dx = \frac{8m}{n}$.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно также вычислить через математическое ожидание.

Рассмотрим случайную величину U, равномерно распределённую на отрезке интегрирования $[a;b]$. Математическое ожидание случайной величины $f(U)$ выражается формулой

$$Mf(U) = \int_a^b f(x)p(x)dx,$$

где $p(x)$ – плотность распределения случайной величины u, равная

$$p(x) = \frac{1}{b - a}$$

на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$Mf(U) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

и следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)Mf(U).$$

Математическое ожидание случайной величины *f(U)* можно оценить, смоделировав эту случайную величину и рассчитав выборочную среднюю.

Итак, для реализации метода Монте-Карло наудачу выбираем *n* точек, равномерно распределённых на [*a;b*], для каждой точки u_iвычисляем $f(u_i)$. В итоге получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i).$$

Для неравномерного распределения с плотностью $p(x)$ имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)}p(x)\,dx = M\tilde{f}(u_i),$$

где $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$.

Затем находим выборочную среднюю: $M\tilde{f}(u_i) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u_i)}{p(u_i)}$.

На рис.2 представлена программа, подготовленная в пакете «Mathematica», для вычисления несобственного интеграла $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}\sin x}{(1+\sqrt{x})}dx$ с помощью нормально распределенной случайной величины *U*.

```
n = 100 000;
ndist = NormalDistribution[0, 1];
x = Table[0, {n}];
RandomNormal[μ_, σ_] := Random[NormalDistribution[μ, σ]];
RandomNormal[0, 1];
For[i = 0, i < n,
  x[[i]] = RandomNormal[0, 1];

  i++;
 ];
P[x_] := PDF[ndist, x];
For[i = 0, i < n,

  If[x[[i]] >= 0, g[x_] := e^(-x^2) Sin[x] / (1 + √x), g[x[[i]]] := 0];

  i++;
 ];
â = (1/n Sum[g[x[[i]]] / P[x[[i]]], {i, 1, n}]);
a = N[Integrate[e^(-t^2) Sin[t] / (1 + √t), {t, 0, ∞}]];
Print["Приближенное значение интеграла:   ", â];
Print["Значение, вычисленное Mathematica: ", a];
Print["Погрешность:                       ", Abs[â - a]];
Null

 Приближенное значение интеграла:   0.229641
 Значение, вычисленное Mathematica: 0.231223
 Погрешность:                       0.00158145
```

Рисунок 2. Программа вычисления несобственного интеграламетодом Монте-Карло.

Литература

1. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1968.

УДК 629.110.321.012

ПОСТРОЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Стефкин В.С.
Научный руководитель – Рейзина Г.Н., д. т. н., профессор

Из множества задач, возникающих при исследованиях существующих процессов и создания новых, можно выделить три весьма распространенных вида: выявление количественных зависимостей между параметрами (факторами) процесса, отыскание оптимальных условий протекания процесса, отыскание оптимальных условий протекания процесса, выбор оптимальных параметров.