

УДК 621.1

**РАСЧЕТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТЕНКИ  
ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

**Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И.**

*Белорусский национальный технический университет*

В специальных технологиях получения тонкостенных композиционных материалов значительный интерес представляют процессы нестационарного теплопереноса в многослойных стенках, имеющие нелинейный характер. При этом необходимо учитывать несимметричные условия теплообмена на поверхностях многослойной стенки, отдельные слои могут претерпевать фазовые превращения: плавление, затвердевание, сублимацию, испарение и т. д. Такие задачи приходится решать при подплавлении теплозащитных покрытий космических аппаратов, в процессах лазерной и плазменной обработки литых изделий с использованием эффекта скорост-

ного затвердевания, при получении тонкостенных литых конструкций на подвижных кристаллизаторах.

Постановка задачи состоит в следующем. Рассмотрим элемент тонкостенной плоской заготовки прямоугольного сечения. Задачу решаем в двумерной постановке, учитывая переменность теплофизических характеристик материала и нелинейные краевые условия.

В работе приведено численное решение задачи сложного теплообмена при получении пазогребневых плит в виде прямоугольного параллелепипеда в металлической форме. Ввиду двойной осевой симметрии можно ограничиться изучением тепловых процессов в плите и форме, расположенных в первой координатной четверти. При расчете учитывается зазор между формирующейся плитой и металлической формой, образованный слоем покрытия (масляной эмульсией) и газовой прослойки, обусловленной усадкой вяжущего материала и термическими деформациями металлической формы.

Пусть размеры четверти формы  $a \times b$ , а четверти плиты  $a_0 \times b_0$ .

Поле температур в плите и форме описывается дифференциальными уравнениями:

$$c_1(T_1)\rho_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial y}\right]; \quad (1)$$

$$c_2(T_2)\rho_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial y}\right], \quad (2)$$

где  $c_1, \rho_1, \lambda_1, T_1, c_2, \rho_2, \lambda_2, T_2$  – теплофизические характеристики и температуры плиты и формы соответственно.

Уравнение (1) решается в прямоугольной области ( $0 \leq x \leq a_0; 0 \leq y \leq b_0$ ), а (2) – в сложной области в виде угла, получаемой при вычитании из области ( $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$ ) области, занятой плитой.

Сформулируем граничные и контактные условия. Исходя из условий сопряжений, контактные условия ставятся на общей границе плиты и формы.

Рассматривая теплоотдачу от плиты к форме через двухслойную стенку (воздух + покрытие) по аналогии с одномерной задачей граничные условия можно записать в виде:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{[T_1(y,t) - T_2(y,t)] \left[ \frac{\lambda_B}{\delta(y,t)} + \alpha_{\text{л}}(y,t) \right] \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_B}{\delta(y,t)} + \alpha_{\text{л}}(y,t)} \quad (3)$$

при  $x = a_0$ ;  $0 \leq y \leq b_0$ ;

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \frac{[T_1(x,t) - T_2(x,t)] \left[ \frac{\lambda_B}{\delta(x,t)} + \alpha_{\text{л}}(x,t) \right] \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_B}{\delta(x,t)} + \alpha_{\text{л}}(x,t)} \quad (4)$$

при  $y = b_0$ ;  $0 \leq x \leq a_0$ ,

где  $\lambda_{\text{покр}}$ ,  $\lambda_B$  – теплопроводность покрытия и воздуха;  $\delta(x, t)$  – зазор в контакте  $y = b_0$  в момент времени  $t$ ;  $\delta(y, t)$  – зазор в контакте  $x = a_0$  в момент времени  $t$ ;

$$\alpha_{\text{л}} = \varepsilon_{1/2} \sigma (T_1 + T_{\text{покр}})(T_1^2 + T_{\text{покр}}^2), \quad (5)$$

где  $T_{\text{покр}}$  – температура поверхности покрытия, смежной с плитой, определяется следующим образом:

$$T_{\text{покр}} = \frac{T_2 \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + T_1 \left( \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_{\text{л}} \right)}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_{\text{л}}}. \quad (6)$$

Значения  $T_1$ ,  $T_2$  и  $\delta$  берутся в соответствующей точке контактной поверхности, в которой определяются  $T_{\text{покр}}$  и  $\alpha_{\text{л}}$ .

Напомним, что при записи (3) и (4) учитывали только процесс теплопроводности через покрытие и процесс теплопроводности и теплоизлучения через слой воздуха. Процессом конвекции в зазоре пренебрегаем.

Продолжим формулировку граничных условий. На осях симметрии можно записать:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 0;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Предполагая, что теплообмен с наружной поверхности формы можно представить по закону Ньютона, будем иметь:

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha (T_2 - T_{\infty}) \quad \text{при } x = a;$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \alpha(T_2 - T_\infty) \text{ при } y = b,$$

где  $T_\infty$  – температура внешней среды;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности формы.

Коэффициент  $\alpha$  определяется способом охлаждения наружной поверхности формы.

При свободном охлаждении формы в безграничном пространстве коэффициент  $\alpha$  характеризует собой теплоотдачу свободной конвекцией и излучением  $\alpha = \alpha_k + \alpha_l$ :

$$\alpha_k = f(\text{Gr}, \text{Pr});$$

$$\alpha_l = \varepsilon \sigma (T_2^2 + T_\infty^2)(T_2 + T_\infty).$$

При вынужденном охлаждении формы

$$\alpha = f(\text{Re}, \text{Pr}),$$

причем число  $\text{Re}$  определяют по толщине охлаждающей рубашки формы.

Начальные условия для уравнений (1), (2) запишутся:

$$T_1(x, y, 0) = T_{1_0};$$

$$T_2(x, y, 0) = T_{2_0},$$

где  $T_{1_0}$  – температура заливки;  $T_{2_0}$  – начальная температура равномерно прогретой формы.

Выберем в качестве характерного размера длину формы  $a$ , а в качестве характерной температуры температуру окружающей среды  $T_0 = T_\infty$ . Перепишем задачу в безразмерных переменных:

$$a^2 c_1 \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7)$$

при  $0 \leq x \leq \bar{a}_0$ ;  $0 \leq y \leq \bar{b}_0$ ;

$$a^2 c_2 \rho_2 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (8)$$

при  $0 \leq x \leq 1$ ;  $b_0 \leq y \leq \bar{b}$ ;  $\bar{a}_0 \leq x \leq 1$ ;  $0 \leq y \leq b_0$ ;

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{(u - v) \left( \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_l \right) \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_l} \quad (9)$$

при  $x = \bar{a}_0$ ;  $0 \leq y \leq \bar{b}_0$ ;

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(u-v) \left( \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_{\text{л}} \right) \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_{\text{л}}} \quad (10)$$

при  $x = b_0$ ;  $0 \leq x \leq 1$ .

В уравнениях (9), (10):  $\delta_{\text{покр}} \neq 0$ ;  $\delta \neq 0$ .

При  $\delta = 0$ ;  $\delta_{\text{покр}} \neq 0$  их следует заменить на условия соответственно:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = (u-v) \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a;$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = (u-v) \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a;$$

при  $\delta_{\text{покр}} = 0$ ;  $\delta \neq 0$ :

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = (u-v) \left( \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_{\text{л}} \right) a; \quad (11)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = (u-v) \left( \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_{\text{л}} \right) a; \quad (12)$$

наконец, при  $\delta_{\text{покр}} = 0$  и  $\delta = 0$  будем иметь:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad u = v;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad u = v.$$

В период фазового перехода уравнение (1) распадается на два, описывающие теплопроводность в жидкой и твердой фазах с добавлением условий на границе раздела фаз  $\xi$ :

$$\lambda_{1T} \text{grad}(T_1) \Big|_{\xi+0} - \lambda_{1ж} \text{grad}(T_1) \Big|_{\xi-0} = -\tilde{r} \tilde{\rho} \frac{d\xi}{dt}.$$

Вводя в рассмотрение  $\delta$ -функцию и разрывные теплофизические коэффициенты, процесс фазового перехода можно описать с помощью одного уравнения

$$\rho_1 \left[ c_1 + r \delta(T_1 - T_{\Phi}) \right] \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right), \quad (13)$$

$$\text{где } \rho_1, c_1, \lambda_1 = \begin{cases} \rho_{1T}, c_{1T}, \lambda_{1T} & \text{при } T_1 < T_\Phi; \\ \rho_{1ж}, c_{1ж}, \lambda_{1ж} & \text{при } T_1 > T_\Phi. \end{cases}$$

Решение (13) производят путем сглаживания  $\delta$ -функции и теплофизических коэффициентов, осуществляя замену фронта фазового перехода на некоторую его область ( $T_\Phi - \Delta$ ;  $T_\Phi + \Delta$ ).

Для записи конечно-разностных уравнений используем шеститочечный шаблон (рис. 1).

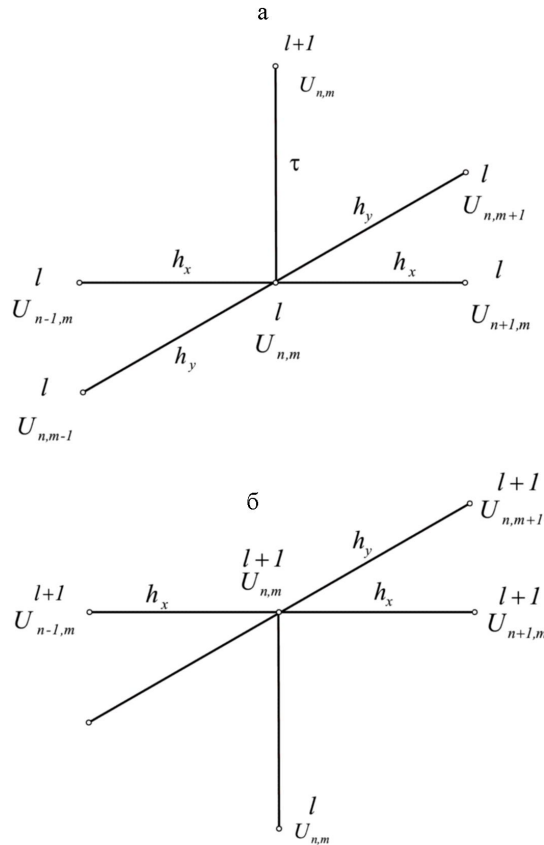


Рис. 1. а – шеститочечный шаблон по явной; б – неявной схемам

Условия на границе раздела:

$$\kappa_j = \frac{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a \left( \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_j} + \alpha_{\text{л}_j} \right)}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_{\text{в}}} + \alpha_{\text{л}_j}} \quad \text{при } \delta_{\text{покр}} \neq 0 \text{ и } \delta_{\text{в}} \neq 0; \quad (14)$$

$$\kappa_j = \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} a \quad \text{при } \delta_{\text{покр}} \neq 0, \quad \delta = 0;$$

$$\kappa_j = \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_j} + \alpha_{\text{л}_j} \quad \text{при } \delta_{\text{покр}} = 0, \quad \delta \neq 0.$$

Соответствующие формулы могут быть записаны для  $\kappa_i$ . Величины  $\alpha_{л_i}$  и  $\alpha_{л_j}$  определяются по температуре в контакте на предыдущем временном слое

$$\alpha_{л_i} = \varepsilon_{1/2} \sigma T_0^3 \left[ \left( \frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} + 1 \right)^2 + (u_{\text{покр}_i} + 1)^2 \right] \times \left( \frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} + u_{\text{покр}_i} + 2 \right), \quad (15)$$

где  $u_{\text{покр}_i}$  – безразмерная температура наружной поверхности краски;

$$u_{\text{покр}_i} = \frac{\frac{v_{i,M_2}^l + v_{i,M_2-1}^l}{2} \frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} \left( \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta_i} + \alpha_{л_i} \right)}{\frac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}} + \frac{\lambda_{\text{в}}}{\delta} + \alpha_{л_i}}. \quad (16)$$

Уравнения (15), (16) следует рассматривать как трансцендентные для определения  $\alpha_{л_i}$ ,  $u_{\text{покр}_i}$ , которые решаются методом половинного деления.

При  $\delta_{\text{покр}} = 0$  (15) необходимо заменить на

$$\alpha_{л_i} = \varepsilon_{1/2} \sigma T_0^3 \left[ \left( \frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} + 1 \right)^2 + \left( \frac{v_{i,M_2}^l + v_{i,M_2-1}^l}{2} + 1 \right)^2 \right] \times \left( \frac{u_{i,M_2}^l + u_{i,M_2-1}^l}{2} + \frac{v_{i,M_2}^l + v_{i,M_2-1}^l}{2} + 2 \right). \quad (17)$$

Выражения для вычисления  $\alpha_{л_j}$ ,  $u_{\text{покр}_j}$  составляются по аналогии с (15)–(17).

Действительные величины  $\delta_j$  и  $\delta_i$  считаются равными нулю, если соответствующие температуры плиты  $(u_{i,M_2} - u_{i,M_2-1})/2$  и  $(u_{M_1,j} + u_{M_1-1,j})/2$  больше или равны температуре затвердевания. В противном случае зазоры  $\delta_j$  и  $\delta_i$  определяются как остаточные деформации формы с использованием приведенных выше уравнений.

Аппроксимацию остальных граничных и начальных условий можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} u_{0,j}^{l+1} &= u_{-1,j}^{l+1} \quad \text{при } j = -1, 0, 1, \dots, M_2; \\ v_{0,j}^{l+1} &= v_{-1,j}^{l+1} \quad \text{при } j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{i,0}^{l+1} &= u_{i,-1}^{l+1} \quad \text{при } i = -1, 0, 1, \dots, M_1; \\ v_{i,0}^{l+1} &= v_{i,-1}^{l+1} \quad \text{при } i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1; \end{aligned} \right\}$$

$$-\lambda_{N_1-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{v_{N_1,j}^{l+1} - v_{N_1-1,j}^{l+1}}{h_1} = \alpha_j a \frac{v_{N_1,j}^{l+1} + v_{N_1-1,j}^{l+1}}{2},$$

где  $j = -1, 0, \dots, N_2$ ;

$$-\lambda_{i,N_2-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{v_{i,N_2}^{l+1} - v_{i,N_2-1}^{l+1}}{h_2} = \alpha_i a \frac{v_{i,N_2}^{l+1} + v_{i,N_2-1}^{l+1}}{2}, \quad (19)$$

где  $i = -1, 0, \dots, N_1$ ;

$$u_{i,j}^0 = u_0, \quad (20)$$

где  $i = -1, 0, \dots, M_1$ ;  $j = -1, 0, \dots, M_2$ ;

$$v_{i,j}^0 = v_0,$$

где  $i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1$ ;  $j = -1, 0, \dots, M_2$  или  $i = -1, 0, \dots, N_1$ ;  $j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2$ .

Выражения (18), (19) с учетом (20) дают  $(N_1 + 2)(N_2 + 2) + 2(M_1 + M_2)$  алгебраических линейных уравнений для определения такого же количества неизвестных значений температур в узлах сетки. На каждом временном шаге  $(\partial + 1)\tau$ ,  $l = 0, 1, \dots$  их решение производится по методу продольно-поперечных направлений.

Представленная в данной работе математическая модель процессов нестационарной теплопроводности с учетом движущегося фронта фазовых превращений в быстротвердеющем гипсовом растворе использована для численного эксперимента и анализа полей температур и температурных напряжений гипсовых плит и металлических форм в процессе производства изделий.

## ВЫВОДЫ

По результатам численного эксперимента определен характер распределения температур в сечении многослойной стенки, который определяется геометрическими соотношениями и термическим сопротивлением отдельных слоев стенки. При наличии слоя с фазовыми и химическими превращениями теплота поглощается в основном данным слоем. Температурное поле многослойной стенки в определенной степени зависит также от тепловых условий на поверхностях стенки. Из анализа температурного поля выявлена роль начальных параметров и толщин отдельных слоев стенки.



Набор материалов отдельных слоев обусловлен функциональными особенностями стенки (прочностными, термо- и жаростойкими, антикоррозионными и т. д.) и зависит от эксплуатационных свойств изделий, их служебного назначения.

Универсальность разработанной математической модели и численного метода решения позволяет рассчитывать многослойные изделия с заданными служебными характеристиками для различных отраслей народного хозяйства (энергетической, нефтехимической, машино- и приборостроительной и т. д.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е с ь м а н, Р. И. Расчеты процессов литья / Р. И. Есьман, Н. П. Жмакин, Л. И. Шуб. – Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 264 с.
2. Е с ь м а н, Р. И. Термогидравлика при бурении скважин / Р. И. Есьман. – М.: Недра, 1982. – 247 с.
3. П о л я н и н, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

Представлена кафедрой  
промышленной теплоэнергетики  
и теплотехники

Поступила 10.03.2010

УДК 536.242.08

## **ПОВЫШЕНИЕ ЭКОНОМИЧНОСТИ И ТЕМПЕРАТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ ПАРОГЕНЕРАТОРОВ ТЕПЛОВЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ**

**Докт. техн. наук КЕЛБАЛИЕВ Р. Ф., инж. РАГИМОВ Ф. А.**

*АзНИИИИ энергетики,  
Азербайджанская государственная нефтяная академия*

В современных условиях основная часть электроэнергии вырабатывается на тепловых электрических станциях. Одна из актуальных проблем при производстве электроэнергии – повышение коэффициента полезного действия ТЭС и уменьшение расхода топлива. Кардинальным средством повышения КПД ТЭС является увеличение начальных параметров пара, поступающего в турбину. В указанных условиях увеличивается термический КПД турбинной установки, соответственно повышается КПД ТЭС и уменьшается расход топлива на выработку электроэнергии.

Значительное влияние начальных и конечных параметров пара на удельную выработку электроэнергии отмечалось неоднократно. Так, из расчета экономической эффективности, проведенного в [1] для энергоблока К-800-240, видно, что удельный расход теплоты снижается при повы-