

## РАСЧЕТ НАГРЕВА МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛ

Докт. техн. наук, проф. **ЕСЬМАН Р. И.**

*Белорусский национальный технический университет*

Современные многослойные материалы составляют широкую гамму изделий, которые используют в своем составе волокнистые, полимерные материалы, включающие неорганические и органические наполнители, углеродные волокна и углекомпози́ты, углепластики, силиконовые и фторкаучуковые композиты, металло- и стеклокерамические теплоизоляционные материалы, ткани на кремниевой основе и др. Особое место в ряду многослойных строительных материалов занимают сухие смеси и новые технологии получения гипскартонных и гипсоволокнистых изделий со специальными свойствами.

Технологии получения многослойных материалов включают в себя процессы нагревания, термообработки и сушки изделий. При разработке математических моделей термообработки изделий необходимо учитывать теплофизические особенности процесса нестационарного теплообмена в многослойной стенке. Отдельные слои могут претерпевать фазовые или химические превращения (отвердевания терморезактивных смол, гипсовых наполнителей, кристаллизации, спекания, диссоциации, испарения или конденсации в пористых теплозащитных материалах и т. д.). В данной работе анализ теплопереноса проводится с учетом фазовых превращений в отдельных слоях и зависимостей их теплофизических характеристик от температуры.

Определяем распределение температуры при нагреве многослойных тел прямоугольного сечения для каждого момента времени. В этих условиях температурное поле многослойной стенки описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений переноса теплоты (ввиду нелинейности потоков теплоты и граничных условий) с соответствующими краевыми условиями. Изменение температуры по сечению (вдоль координат  $x$ ,  $y$ ) в любой момент времени для каждого слоя многослойной стенки определяется из решения системы дифференциальных уравнений теплопроводности

$$c_i(T_i)\rho_i(T_i)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i(x,y,t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i(x,y,t)}{\partial y}\right], \quad (1)$$

где  $i$  – индекс, определяющий принадлежность уравнения и параметров к различным слоям многослойной стенки,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $c_i(T_i)$  – удельная теплоемкость  $i$ -го слоя как функция температуры;  $\rho_i(T_i)$  – плотность материала  $i$ -го слоя как функция температуры;  $\lambda_i(T_i)$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя как функция температуры.

В качестве примера введем следующие обозначения по слоям: 1 – металлическая или металлокерамическая матрица; 2 – неметаллическое покрытие (керамика, стекло- или базальтоволокнистые материалы); 3 – слой,

в котором происходят фазовые или химические превращения (термо-реактивные смолы, гипс); 4, 5 – неметаллические слои со специальными свойствами (углепластик, армированный углерод, термостойкие покрытия и т. д.). Количество и материалы слоев могут быть различными в соответствии со служебными характеристиками и функциональными особенностями многослойной стенки.

На границах слоев теплофизические параметры как температурные функции терпят разрыв. В этом случае система дифференциальных уравнений (1) может быть сведена к одному уравнению теплопроводности с разрывными коэффициентами, записанному в следующем виде:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y}\right]. \quad (1^*)$$

Уравнение (1\*) определено в области:  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ .

Граничные условия для дифференциального уравнения (1\*) запишем:

$$\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_{i-1}\left(T_{i-1}\frac{\partial T_{i-1}}{\partial x}\right), \quad x = x_i; \quad (2)$$

$$\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_{i-1}\left(T_{i-1}\frac{\partial T_{i-1}}{\partial y}\right), \quad y = y_i;$$

$$T_i = T_{i-1}. \quad (3)$$

Условия сопряжения (2), (3) определены на общих границах слоев.

В соответствии с условием задачи принимаем, что теплообмен на внешней поверхности многослойной стенки происходит по закону Ньютона – Рихмана. Тогда с учетом симметричной модели граничные условия представим следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha(T - T_c) \quad \text{при } x = a; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha(T - T_c) \quad \text{при } y = b. \quad (5)$$

Начальные условия имеют вид

$$T_i(x, y, 0) = T_{i_0} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Для слоя 3 решается задача с фазовыми превращениями с подвижной границей фаз. На границе раздела фаз (в слое 3) запишем условия фазового перехода [1]:

$$T'_3 = T''_3 = T_\phi(\xi, t);$$

$$\lambda'_3 \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial x} - \lambda''_3 \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial x} = \rho_3 r \frac{d\xi}{dt} \quad \text{при } x = \xi;$$

$$\lambda_3' \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial y} - \lambda_3'' \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial y} = \rho_3 r \frac{d\xi}{dt} \text{ при } y = \xi,$$

где  $T_\phi$  – температура фронта фазовых превращений;  $\rho_3$  – плотность материала;  $r$  – удельная теплота фазового перехода.

Линейный источник при координате  $x = \xi$  представим с помощью  $\delta$ -функции Дирака. При этом воспользуемся основным свойством  $\delta$ -функции [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - \xi)dx = f(\xi).$$

Для решения задачи фазового перехода (задачи Стефана) применяется метод сглаживания:  $\delta$ -функция заменяется  $\delta$ -образной функцией  $\delta(T - T_\phi, \Delta)$ , отличной от нуля лишь на интервале  $(T_\phi - \Delta, T_\phi + \Delta)$  и удовлетворяющей условию нормировки:

$$\int_{T_\phi - \Delta}^{T_\phi + \Delta} \delta(T - T_\phi, \Delta) dT = 1.$$

В период фазового перехода уравнение (1\*) распадается на два, описывающие теплопроводности в жидкой и твердой фазах с добавлением условий на границе раздела фаз  $\xi$ .

Сглаживая на интервале  $(T_\phi - \Delta, T_\phi + \Delta)$  функции  $\delta_3'(T)$ ,  $\delta_3''(T)$ ,  $c_3''(T)$ ,  $\lambda_3'(T)$ ,  $\lambda_3''(T)$ , например при линейной зависимости между значениями в твердой фазе при  $T < T_\phi - \Delta$  и в жидкой фазе при  $T > T_\phi + \Delta$ , получим квазилинейное уравнение, по форме совпадающее с дифференциальным уравнением (1\*). Для решения полученного квазилинейного уравнения можно использовать разностные методы.

Из граничных условий (2) видно, что температурные функции на границе слоев не имеют разрывов, а претерпевают разрыв первые производные. Этот факт дает возможность рассматривать систему сопряженных тел как стенку с теплофизическими свойствами, зависящими от координаты и температуры и терпящими разрыв на границе слоев.

Учитывая это обстоятельство, а также вводя безразмерные переменные, перепишем систему дифференциальных уравнений и краевые условия в безразмерных переменных:

$$a^2 c_i \rho_i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \text{ при } 0 \leq x \leq \bar{a}_0; \quad 0 \leq y \leq \bar{b}_0; \quad (7)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} \text{ при } x = \bar{a}_0; \quad 0 \leq y \leq \bar{b}_0; \quad (8)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y} \text{ при } x = b_0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; \quad (11)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha a v \text{ при } x = 1; \quad (12)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha a v \text{ при } y = \bar{b}; \quad (13)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = u_0 \text{ при } t = 0; \\ v = v_0 \text{ при } t = 0; \end{array} \right\} \quad (14)$$

где  $u$  и  $v$  – безразмерные температуры.

Условия сопряжения:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad u = v; \quad (15)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad u = v.$$

Введем общую прямоугольную сетку, равномерную по каждой из осей, причем предположим, что контактные поверхности  $x = \bar{a}_0$  и  $y = \bar{b}_0$  лежат на узлах сетки. Пусть  $N_1$  и  $N_2$  – число узлов по горизонтали и вертикали соответственно, тогда шаг по горизонтали  $h_1 = 1/N_1$ , а по вертикали –  $h_2 = \bar{b}/N_2$ .

Предположим, что горизонтальная строка узлов на контактной поверхности имеет номер  $M_1$ , а вертикальный столбец –  $M_2$ . Будем решать задачу на фиктивной сетке с узлами:

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)h_1; \quad y_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)h_2$$

при  $i = -1, 0, \dots, N_1$ ;  $j = -1, 0, \dots, N_2$ .

Неявные конечно-разностные уравнения, соответствующие выражениям (7)–(15), на узлах фиктивной сетки на шеститочечном шаблоне [1] в момент времени  $t = (l+1)\tau$  имеют вид:

$$\begin{aligned} a^2 c_{i,j}^{(1)} \rho_{i,j}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j}^l}{\tau} = & \frac{1}{h_1} \left( \lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{i+1,j}^{l+1} - u_{i,j}^{l+1}}{h_1} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i-1,j}^{l+1}}{h_1} \right) + \\ & + \frac{1}{h_2} \left( \lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,j+1}^{l+1} - u_{i,j}^{l+1}}{h_2} - \lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{l+1} - u_{i,j-1}^{l+1}}{h_1} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, M_1 - 1$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, M_2 - 1$ ;  $l = 0, 1, 2, \dots$ ;

$$a^2 c_{i,j}^{(2)} \rho_{i,j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,j}^l}{\tau} = \frac{1}{h_1} \left( \lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i+1,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,j}^{l+1}}{h_1} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{i-1,j}^{l+1}}{h_1} \right) + \frac{1}{h_2} \left( \lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,j+1}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,j}^{l+1}}{h_2} - \lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,j-1}^{l+1}}{h_2} \right),$$

где

$$\left. \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1; \\ j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2, \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1 - 1; \\ j = 0, 1, 2, \dots, M_2 - 1, \end{array} \right\} l = 0, 1, 2;$$

$$\begin{aligned} -\lambda_{M_1-\frac{1}{2},j}^{(1)} \frac{u_{M_1,j}^{l+1} - u_{M_1,j-1}^{l+1}}{h_1} &= -\lambda_{M_1-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{M_1,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{M_1-1,j}^{l+1}}{h_1} = \\ &= \kappa_j \left( \frac{u_{M_1,j}^{l+1} + u_{M_1,j-1}^{l+1}}{2} - \frac{\mathbf{v}_{M_1,j}^{l+1} + \mathbf{v}_{M_1-1,j}^{l+1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $j = -1, 0, 1, \dots, M_2 - 1$ ;

$$\begin{aligned} -\lambda_{i,M_2-\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{u_{i,M_2}^{l+1} - u_{i,M_2-1}^{l+1}}{h_2} &= -\lambda_{i,M_2-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,M_2}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,M_2-1}^{l+1}}{h_2} = \\ &= \kappa_i \left( \frac{u_{i,M_2}^{l+1} + u_{i,M_2-1}^{l+1}}{2} - \frac{\mathbf{v}_{i,M_2}^{l+1} + \mathbf{v}_{i,M_2-1}^{l+1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $i = -1, 0, 1, \dots, M_1 - 1$ .

Аппроксимацию остальных граничных и начальных условий запишем:

$$\left. \begin{array}{l} u_{0,j}^{l+1} = u_{-1,j}^{l+1} \quad \text{при } j = -1, 0, 1, \dots, M_2; \\ \mathbf{v}_{0,j}^{l+1} = \mathbf{v}_{-1,j}^{l+1} \quad \text{при } j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2; \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_{i,0}^{l+1} = u_{i,-1}^{l+1} \quad \text{при } i = -1, 0, 1, \dots, M_1; \\ \mathbf{v}_{i,0}^{l+1} = \mathbf{v}_{i,-1}^{l+1} \quad \text{при } i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1; \end{array} \right\}$$

$$-\lambda_{N_1-\frac{1}{2},j}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{N_1,j}^{l+1} - \mathbf{v}_{N_1-1,j}^{l+1}}{h_1} = \alpha_j a \frac{\mathbf{v}_{N_1,j}^{l+1} + \mathbf{v}_{N_1-1,j}^{l+1}}{2},$$

где  $j = -1, 0, \dots, N_2$ ;

$$-\lambda_{i,N_2-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{\mathbf{v}_{i,N_2}^{l+1} - \mathbf{v}_{i,N_2-1}^{l+1}}{h_2} = \alpha_i a \frac{\mathbf{v}_{i,N_2}^{l+1} + \mathbf{v}_{i,N_2-1}^{l+1}}{2}, \quad (20)$$

где  $i = -1, 0, \dots, N_1$ ;

$$u_{i,j}^0 = u_0, \quad (21)$$

где  $i = -1, 0, \dots, M_1$ ;  $j = -1, 0, \dots, M_2$ ;

$$v_{i,j}^0 = v_0,$$

где  $i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1; j = -1, 0, \dots, M_2$  или  $i = -1, 0, \dots, N_1; j = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2$ .

Выражения (16)–(20) с учетом (21) дают  $(N_1 + 2)(N_2 + 2) + 2(M_1 + M_2)$  алгебраических линейных уравнений для определения такого же количества неизвестных значений температур в узлах сетки. На каждом временном шаге  $(\delta + 1)\tau$ ,  $l = 0, 1, \dots$  решение их производится по методу продольно-поперечных направлений.

## ВЫВОДЫ

В работе излагается методика численного решения задачи нагрева многослойных тел. Учитывается переменность теплофизических характеристик сопряженных слоев, их зависимость от температуры, а также перемещения фронта фазовых превращений в одном из слоев изделия. Эти обстоятельства делают задачу нестационарной теплопроводности нелинейной.

В процессе фазового перехода дифференциальное уравнение теплопроводности распадается на два уравнения, описывающих теплопроводность в жидкой и твердой фазах с добавлением условий на границе раздела фаз (задача Стефана). Вследствие введения в расчетную схему  $\delta$ -функции Дирака решение задачи сводится к расчету квазилинейного уравнения теплопроводности численными методами. Для конечно-разностной аппроксимации производных на сетке вдоль каждого из направлений  $x$  и  $y$  используется шеститочечный шаблон [1]. В результате задача сводится к итерационной системе алгебраических уравнений.

Представленная методика позволяет рассчитывать многослойные изделия с заданными служебными характеристиками для различных отраслей народного хозяйства (энергетической, нефтехимической, машино- и приборостроительной и т. д.). Такие изделия являются результатом комбинированного сочетания отдельных компонентов и слоев с различными свойствами. Многослойные изделия имеют характеристики, отличающиеся от свойств составляющих, что позволяет получать изделия со специальными свойствами, повышенным качеством и эксплуатационными характеристиками.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е с ь м а н, Р. И. Расчеты процессов литья / Р. И. Есьман, Н. П. Жмакин, Л. И. Шуб. – Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 264 с.

Представлена кафедрой ПТЭ и ТТ

Поступила 29.12.2009