

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2026-25-3-203-211>

УДК 624.071.3

Оптимизация железобетонной прямоугольной ребристой плиты с технологическим отверстием методом послойного сканирования

Канд. техн. наук О. Л. Вербицкая¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Предлагается решение по оптимизации прямоугольной железобетонной плиты с подкрепленным ребрами технологическим отверстием. Для статического расчета использована компьютерная программа Sturm, составленная на алгоритмическом языке Pascal (Delphi). Работа посвящена разработке эффективного метода параметрической оптимизации на основе упругопластической 2D конечно-элементной модели. Нагрузка на конечно-элементную модель передается через узлы, связывающие конечные элементы. Учитывая особенности бетона, принят нелинейный составной закон деформирования конечных элементов с изменяющейся жесткостью до и после образования трещин. Учитывая это, для определения напряженно-деформированного состояния плиты используется метод приближений – метод Зейделя. В качестве целевой функции принята стоимость бетона и арматуры, затраченных на изготовление плиты. Решение задачи ограничено толщиной плиты, высотой ребра, максимальным прогибом, напряжением и изгибающим моментом. Оптимальное решение определяется в дискретном пространстве, построенном на переменных оптимизации – толщине плиты, высоте ребра и площади арматуры. Предварительно по результатам сканирования на сетке выбранного отдельного слоя, построенной на параметрах h_{pl} и h_{reb} , устанавливается «запрещенная» ограничением область пространства. На «разрешенной» части пространства выполняется поиск оптимального решения. Затем рассматривается следующий очередной слой, и в нем так же определяется оптимальное решение. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут исследованы все слои пространства поиска. Из всех найденных решений выбирается глобальный минимум целевой функции. Этот метод обеспечивает гарантию, что найденное решение является абсолютным.

Ключевые слова: оптимизация, железобетон, ребристая плита, прогиб, изгибающий момент, метод послойного сканирования, прочность, жесткость, конечные элементы, стоимость

Для цитирования: Вербицкая, О. Л. Оптимизация железобетонной прямоугольной ребристой плиты с технологическим отверстием методом послойного сканирования / О. Л. Вербицкая // *Наука и техника*. 2026. Т. 25, № 3. С. 203–211. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2026-25-3-203-211>

Optimization of a Rectangular Reinforced Concrete Ribbed Slab with a Technological Opening by the Layer-by-Layer Scanning Method

O. L. Verbitskaya¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. A solution for optimizing a rectangular reinforced concrete slab with a rib-reinforced technological opening is proposed. The static analysis was performed using the Sturm computer program, written in the Pascal (Delphi) algorithmic language. This article presents an effective method for parametric optimization using a 2D elastoplastic finite element model. The load is applied to the finite element model through the nodes connecting the elements. Considering the properties of concrete, a nonlinear constitutive law for the deformation of finite elements with changing stiffness before and after crack formation was adopted. Accordingly, the Seidel approximation method is used to determine the stress-strain state of the slab. The cost of concrete and reinforcement used in manufacturing the slab is taken as the objective function. The solution is constrained by the slab thickness, rib height, maximum deflection, stress, and bending moment. The optimal solution is determined

Адрес для переписки

Вербицкая Ольга Леонидовна
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
olverbitskaya@bntu.by

Address for correspondence

Verbitskaya Olga L.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
olverbitskaya@bntu.by

in a discrete space constructed on the optimization variables: slab thickness, rib height, and reinforcement area. Initially, based on scanning results on a grid of a selected individual layer, built on the h_{pl} and h_{reb} parameters, a “forbidden” region of the space constrained by the limits is established. The search for the optimal solution is performed on the “permitted” part of the space. Then the next subsequent layer is considered, and the optimal solution is likewise determined within it. The process continues until all layers of the search space have been examined. The global minimum of the objective function is selected from all found solutions. This method guarantees that the found solution is absolute.

Keywords: optimization, reinforced concrete, ribbed slab, deflection, bending moment, layer-by-layer scanning method, strength, stiffness, finite elements, cost

For citation: Verbitskaya, O. L. (2026) Optimization of a Rectangular Reinforced Concrete Ribbed Slab with a Technological Opening by the Layer-by-Layer Scanning Method. *Science and Technique*. 25 (3), 203–211 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2026-25-3-203-211>

Введение

Повышение экономической эффективности строительства при обеспечении надежности и долговечности конструкций остается одной из ключевых задач проектирования [1, 2]. Особую сложность представляют монолитные участки перекрытий промышленных зданий, где наличие технологических отверстий требует их локального усиления ребрами. Проектирование таких элементов традиционно ведется с запасом, что приводит к перерасходу материалов. Следовательно, актуальной является задача параметрической оптимизации геометрии и армирования ребристых плит с отверстиями, позволяющая минимизировать стоимость при соблюдении нормативных ограничений по прочности, жесткости и трещиностойкости [2].

При разработке моделей железобетонных плит, более приближенных к реальному поведению железобетона, требуется учитывать его неоднородность, нелинейность деформирования и способность к трещинообразованию. Фундаментальные основы механики железобетона и методы расчета с учетом нелинейных свойств материалов заложены в классических трудах [3, 4].

С появлением вычислительной техники метод конечных элементов (МКЭ) стал основным инструментом для подобного анализа. Теоретические основы МКЭ применительно к задачам строительной механики изложены в [5].

Задача оптимизации строительных конструкций имеет свою историю. Классические методы математического программирования, такие как метод возможных направлений, описаны в [6]. В настоящее время для сложных нелинейных задач доминируют метаэвристические алгоритмы (роя частиц, генетические), де-

монстрирующие высокую эффективность в непрерывных пространствах большой размерности [7, 8]. Однако, как показано в сравнительных исследованиях [9], для параметрической оптимизации с малым количеством дискретных переменных, определяющих технологичность конструкции (толщина, высота ребра, стандартный профиль арматуры), метод сканирования остается предпочтительным, так как гарантирует нахождение глобального оптимума. Настоящая работа развивает подходы, изложенные в [10, 11], для случая плиты с технологическим отверстием.

Таким образом, для оптимального проектирования ребристой плиты с отверстием необходима методика, сочетающая:

- 1) нелинейный статический расчет плиты с учетом стадий работы железобетона;
- 2) детерминированный алгоритм поиска глобального минимума стоимости в дискретном пространстве ключевых параметров.

Целью настоящей работы является разработка и апробация метода послойного сканирования для оптимизации ячейки плиты с технологическим отверстием, которое требует локального усиления. Для нелинейного расчета используется конечно-элементная модель, реализованная в авторской программе Sturm [11].

Методологическая основа исследования

Решение поставленной задачи основано на последовательном применении трех взаимосвязанных моделей:

- 1) расчетной модели, которая представляет собой упругопластическую конечно-элементную модель плиты, реализованную в программе Sturm [11]. Ключевым допущением является моделирование изгиба плиты и ребер в рамках

теории тонких пластин Кирхгофа–Лява. Это допущение позволяет использовать эффективные плоские изгибные конечные элементы (КЭ) для анализа преобладающего изгибного напряженно-деформированного состояния (НДС);

2) модели материала; для описания железобетона используется нелинейная составная модель деформирования, интегрированная в каждый КЭ. Модель учитывает работу сжатого бетона по нелинейной диаграмме, образование и раскрытие нормальных трещин в растянутой зоне, а также работу растянутой арматуры;

3) оптимизационной модели; на основе результатов расчета по п. 1 и 2 для множества вариантов параметров строится детерминированная модель поиска глобального минимума функции стоимости методом послойного сканирования в дискретном пространстве.

Статический расчет плиты

Рассмотрена прямоугольная железобетонная плита (рис. 1), усиленная регулярной системой ребер. Поэтому она состоит из однотипных ячеек, например с прямоугольным узором (рис. 2, 3). МКЭ-расчет на основе трехмерной моде-

ли (рис. 1) показывает, что ячейки в обширной центральной зоне плиты нагружены однотипным образом (маркер 1). Поэтому процесс оптимизации размеров и армирования рационально развернуть для отдельной ячейки. Ввиду простоты формы и однородности нагружения ячейка может быть смоделирована с помощью двумерных конечных элементов (рис. 2). Это позволяет описываемому ниже алгоритму оптимизации быстро обрабатывать большое количество расчетных точек.

После завершения оптимизации типовой ячейки вся плита (облегченная и удешевленная) может быть подвергнута трехмерному МКЭ-анализу. Отдельные нагруженные ячейки (маркер 2 на рис. 1), попавшие, например, на границы закрепления (маркер 3), могут быть специально усилены. Это мало скажется на стоимости плиты.

Расчет типовой ячейки плиты (рис. 2) в двумерной постановке выполнен методом конечных элементов [12, 13]. Конечно-элементная модель построена из прямоугольных изгибных элементов с четырьмя узлами и двенадцатью степенями свободы.

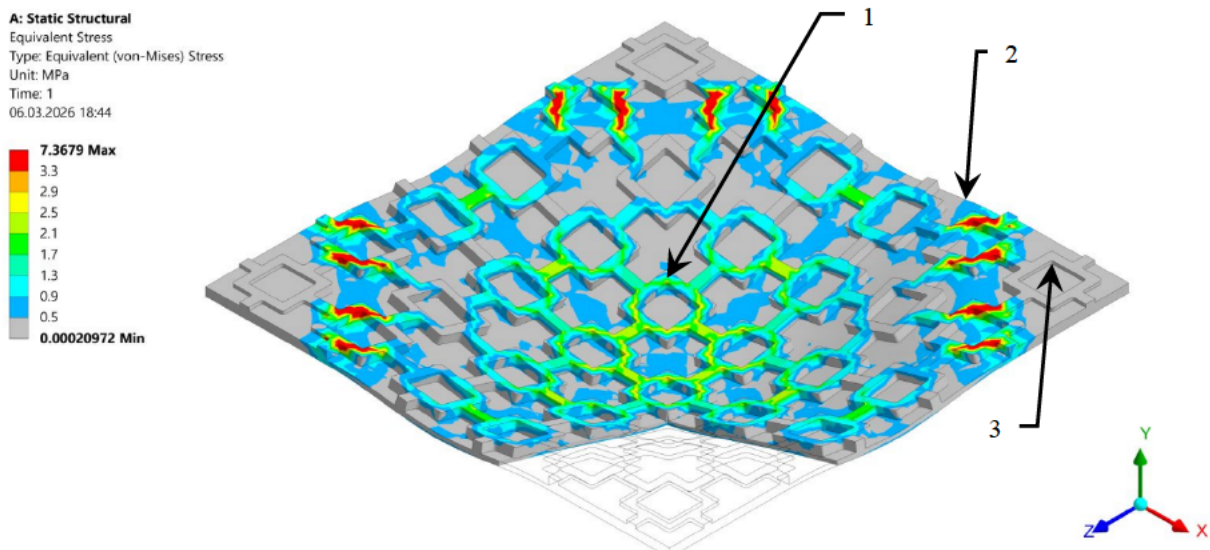


Рис. 1. 3D-модель прямоугольной железобетонной плиты и распределение в ней эквивалентных напряжений σ_e (МКЭ-расчет) под действием собственного веса: 1 – ячейка в центральной части плиты; 2 – то же на границе закрепления плиты; 3 – закрепленный угол плиты (МКЭ-модель выполнена с участием старшего преподавателя кафедры «Геотехника и строительная механика» А. Ю. Кожедуб)

Fig. 1. 3D model of a rectangular reinforced concrete slab and the distribution of equivalent stresses σ_e (FEM analysis) under self-weight: 1 – cell in the central part of the slab; 2 – cell at the slab support boundary; 3 – fixed corner of the slab (the FEM model was developed with the participation of A. Kozhedub, Senior Lecturer at the Department of Geotechnics and Structural Mechanics)

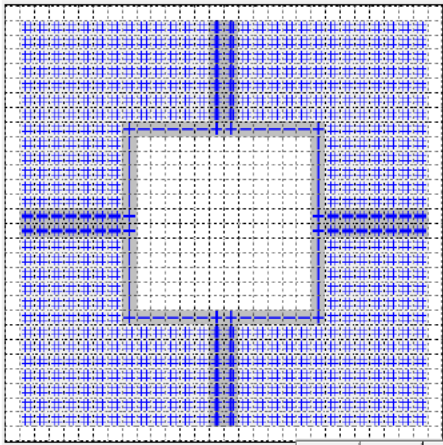


Рис. 2. Конечно-элементная модель квадратной армированной ячейки плиты с ребрами и отверстием
 Fig. 2. Finite element model of a square reinforced slab cell with ribs and an opening

Каждый конечный элемент представляет собой железобетонный элемент с рабочей растянутой арматурой и арматурной сеткой [11]. Сетка уложена по всей площади плиты, а арматура – только в ребрах плиты. Конечные элементы связаны друг с другом шарнирами только по их углам. Выбор двумерной модели на основе изгибных конечных элементов обусловлен характером работы рассматриваемой конструкции. При действии вертикальной нагрузки, равномерно распределенной в плане, основным видом напряженно-деформированного состояния плиты и подкрепляющих ее ребер является изгиб. Теория тонких пластин, реализованная в данных КЭ, адекватно описывает это состояние. Моделирование ребер повышенной толщиной элемента эквивалентно увеличению его

изгибной жесткости и корректно с точки зрения расчета общих усилий и перемещений [14, 5]. Для анализа локальных эффектов (концентрация напряжений у углов отверстия, работа на срез, сложное объемное напряженно-деформированное состояние) целесообразно применение трехмерных элементов. Однако для решения задачи параметрической оптимизации, требующей сотен и тысяч запусков расчета, применяемая двумерная модель является оптимальным компромиссом между точностью и вычислительной эффективностью. Ее адекватность для оценки интегральных характеристик (прогиб, общий изгибающий момент) подтверждается удовлетворительной верификацией. Нагрузка на плиту представляет собой вертикальные силы, приложенные в узлах модели [11].

Для обеспечения требований эксплуатационной пригодности назначены такие начальные показатели качества конструкции, чтобы с нормируемым уровнем надежности, согласно СН 2.01.01.2019 [2], исключались образование и (или) чрезмерное раскрытие трещин. Поэтому при выполнении статического расчета учитывалась нелинейность диаграммы деформирования бетона, что приводит к нелинейному закону изменения жесткости конечного элемента и к образованию трещин.

Следует отметить, что диаграмма деформирования бетона при осевом сжатии имеет криволинейное очертание. В связи с этим расчет железобетонных плит в общем случае должен выполняться с учетом нелинейности деформирования железобетона (1).

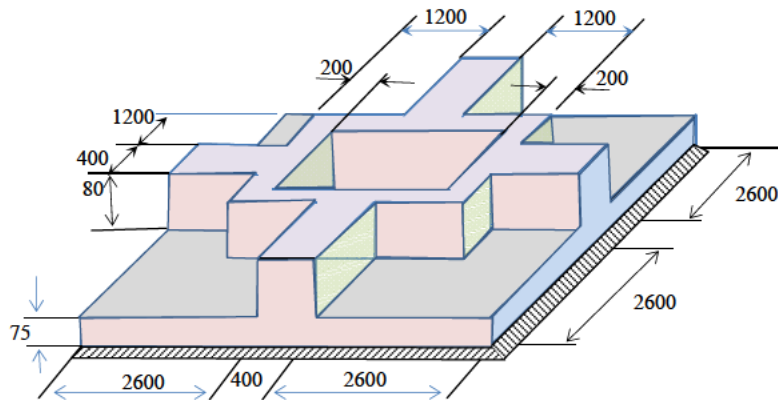


Рис. 3. Схема квадратной ячейки железобетонной плиты с отверстием и ребрами после оптимизации
 Fig. 3. Scheme of a square reinforced concrete slab cell with an opening and ribs after optimization

При изгибающих моментах M_x и M_y , меньших момента образования трещин M_{cr} , жесткость элемента B постоянная. При изгибающих моментах M_x и M_y , больших момента образования трещин M_{cr} , жесткость изменяется по гиперболическому закону [15]

$$B = \begin{cases} \frac{E_{c,eff} I_{II}}{1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{M_{cr}}{M_{Ed}} \right)^2 \left(1 - \frac{I_{II}}{I_I} \right)}, & M_{Ed} > M_{cr}; \\ E_{c,eff} I_I, & M_{Ed} \leq M_{cr}, \end{cases} \quad (1)$$

где $E_{c,eff}$ – эффективный модуль упругости бетона ($E_{c,eff} = E_{cm}$); E_{cm} – средний модуль упругости бетона; β_1 – коэффициент, принимаемый согласно указаниям СП [1]; β_2 – то же, учитывающий длительность действия нагрузки и принимаемый согласно указаниям СП [1]; M_{Ed} – расчетный изгибающий момент, вызванный действием нагрузки и установленный в результате расчета плиты; M_{cr} – момент образования трещин; I_I, I_{II} – моменты инерции сечения соответственно без трещин и с трещинами [16].

Статический расчет ячейки плиты выполняется методом итераций [17]. В первом приближении принимается, что жесткость всех конечных элементов одинаковая и соответствует нулевому напряженному состоянию. На второй и последующих итерациях жесткость каждого конечного элемента корректируется и принимается в соответствии со значениями изгибающих моментов (1), полученных в предыдущем приближении. В результате статического расчета ячейки плиты получают ее прогибы, изгибающие моменты, напряжения и ширина раскрытия трещин во всех конечных элементах. Для подтверждения корректности решения проведена верификация полученных результатов статического расчета – сравнение результатов, полученных для сплошной безреберной плиты, решения в замкнутом виде [18] и методом конечных элементов по программе Sturm, составленной на алгоритмическом объектно-ориентированном языке Delphi. Решение получено в упругой стадии деформации. Были приняты следующие данные: размеры шарнирно опертой по контуру квадратной плиты 2×2 м с толщиной 0,05 м; модуль упругости плиты $E_{cm} = 20$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,30$;

воздействие в виде равномерно распределенной нагрузки $0,5 \text{ кН/м}^2$, приложенной по всей поверхности плиты. Сравнение прогибов, полученных по программе Sturm, с известным решением показало отличие в 1,1 %. Для той же квадратной плиты значение изгибающего момента в центре, полученное в Sturm, сравнивалось с аналитическим решением по теории пластин. Расхождение не превысило 1,4 %. Поскольку в рамках принятой плоской гипотезы Кирхгофа напряжения в плите определяются через вычисленные моменты и кривизны, данное соответствие косвенно подтверждает и корректность картины напряжений. Для проверки корректности работы программы в условиях другого типа опирания выполнен расчет консольной балки, нагруженной равномерной нагрузкой. Расхождение максимального момента с известным решением менее 0,5 %, что также свидетельствует о корректности алгоритма.

Оптимизация плиты

При решении оптимизационных задач одним из самых проблемных является поиск глобального минимума целевой функции. Среди известных методов оптимизации, таких как метод градиентного спуска, не всегда гарантирован надежный результат абсолютного минимума. Его применение в пространстве, построенном на дискретных осях, затруднительно. Предлагается проводить поиск оптимального решения послойно-дискретное пространство делится на слои, каждый из которых строится на двух дискретных параметрах h_{pl} и h_{reb} и соответствующих значениям третьего параметра – площади арматуры A_s . После получения решения в каждом слое выбирается наиболее приемлемый вариант. Для уменьшения объема вычислений недопустимая область поиска в каждом слое заранее исключается. Затем последовательно переходим к поиску решения на локальной сетке следующего слоя. Конечно, время поиска в целом увеличивает, но гарантия получения глобального оптимального решения возрастает. Следует отметить, что в контексте данного метода термин «слой» имеет математический смысл и означает подпространство поиска с фиксированным значением одной из переменных (например, A_s), а не относится к конструктивным слоям армирования бетона.

Поиск решения осуществляется в пространстве, построенном на трех осях, соответствующих толщине ячейки плиты, высоте ребра и площади арматуры. Все эти параметры дискретны. Целевой функцией принята стоимость материалов, затраченных на изготовление плиты [11]:

$$C(h_{pl}, h_{reb}, A_{arm}) = C_{bet} \Delta x \Delta y (n_{pl} h_{pl} + n_{reb} h_{reb}) + C_{arm} (n_x A_{sx} \Delta x + n_y A_{sy} \Delta y) \rho, \quad (2)$$

где C_{arm} , C_{bet} – цена арматуры и бетона соответственно; h_{pl} , h_{reb} – толщина ячейки плиты и высота ребра соответственно; Δx , Δy – размеры конечного элемента в плане; n_{pl} , n_{reb} – количество конечных элементов соответственно в ячейке плиты и в ребрах; A_{sx} , A_{sy} – площадь арматуры, соответственно расположенной вдоль длины ячейки плиты и вдоль ширины плиты; n_x , n_y – количество конечных элементов, содержащих соответственно арматуру по направлениям осей X и Y ; ρ – плотность арматурной стали [11].

Оптимизация выполняется со следующими ограничениями. Ограничения по параметрам оптимизации:

$$h_{pl\min} < h_{pl} \leq h_{pl\max}; \quad h_{reb\min} < h_{reb} \leq h_{reb\max}; \quad (3)$$

$$A_{s\min} < A_s \leq A_{s\max}; \quad \rho_{l\min} \leq \rho_l < \rho_{l\max},$$

где $h_{pl\min}$, $h_{pl\max}$, $h_{reb\min}$, $h_{reb\max}$, $A_{s\min}$, $A_{s\max}$, a_{lim} , a_{max} , $\rho_{l\min}$, $\rho_{l\max}$ – минимально и максимально допустимые значения соответственно толщины ячейки плиты, высоты ребра, площади растянутой арматуры, прогиба плиты и процента армирования [11].

Оптимальное решение ограничивается:
прочностью бетона

$$f_{cd} - \sigma_c \geq 0; \quad (4)$$

прочностью арматуры

$$f_{yd} - \sigma_s \geq 0; \quad (5)$$

жесткостью плиты

$$a_{lim} - a_{max} \geq 0; \quad (6)$$

шириной раскрытия трещин

$$W_{lim} - W_k \geq 0; \quad (7)$$

процентом армирования

$$\rho_{l\min} < \rho_l \leq \rho_{l\max}, \quad (8)$$

где f_{cd} – расчетное сопротивление бетона плиты; σ_c – максимальное напряжение в бетоне; f_{yd} – расчетное сопротивление арматуры; σ_s – максимальное напряжение в арматуре; a_{lim} , a_{max} – допускаемый и максимальный прогибы плиты; W_{lim} – допускаемая ширина раскрытия трещин; W_k – расчетная ширина раскрытия трещин; $\rho_{l\min}$, $\rho_{l\max}$ – минимальный и максимальный допустимые проценты армирования КЭ; ρ_l – коэффициент армирования КЭ [11].

Пример расчета ячейки ребристой плиты выполнен по разработанной программе Sturm, составленной на алгоритмическом объектно-ориентировочном языке *Pascal*. В качестве составной части в программе Sturm используется разработанная программа *Progress*. Для расчета приняты следующие исходные данные: размеры ячейки плиты 5,6×5,6 м, ширина КЭ 200 мм, количество конечных элементов в расчетной модели 784; средняя прочность бетона на растяжение $f_{ctm} = 2,2$ МПа, толщина защитного слоя $C_o = 20$ мм. На ячейку плиты действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $P = 36$ кН/м², приложенная к фактической площади перекрытия (за вычетом технологического отверстия 2,4×2,4 м. Средний модуль упругости бетона $E_{cm} = 32$ ГПа; коэффициент Пуассона бетона $\rho_b = 0,20$, характеристическое сопротивление бетона на сжатие $f_{ck} = 20$ МПа, характеристическое сопротивление арматуры $f_{yk} = 500$ МПа. Цена бетона $C_b = 115$ руб./м³, цена арматуры $C_s = 1900$ руб./т. Допускаемая ширина раскрытия трещин $W_{lim} = 0,4$ мм, расчетное сопротивление бетона $f_{cd} = 12$ МПа; допускаемый прогиб плиты $a_{lim} = 20$ мм, расчетное сопротивление арматуры $f_{yd} = 455$ МПа.

Для выбора при оптимизации предельного изгибающего момента выполнен расчет участка плиты с ребром длиной 1400 мм, толщиной полки 75 мм, высотой и шириной ребра соответственно 155 и 200 мм. Железобетонная плита $C^{20}/_{25}$ армирована двумя стержнями 2Ø60 S500. В результате получен предельный изгибающий момент $M_{Rd} = 18,06$ кНм/м.

На рис. 4 показан слой пространства поиска оптимального решения, соответствующего ар-

матуре $A_s = 4,08 \text{ см}^2$. Точки, отмеченные кружками зеленого цвета, расположены в допустимой для поиска части слоя, ограниченно двумя границами со следующими условиями: $a_{\text{lim}} = 20 \text{ мм}$ и $M_{\text{lim}} = 18 \text{ кНм/м}$. Точка, отмеченная увеличенным кружком, является местом оптимального решения в этом рассматриваемом слое.

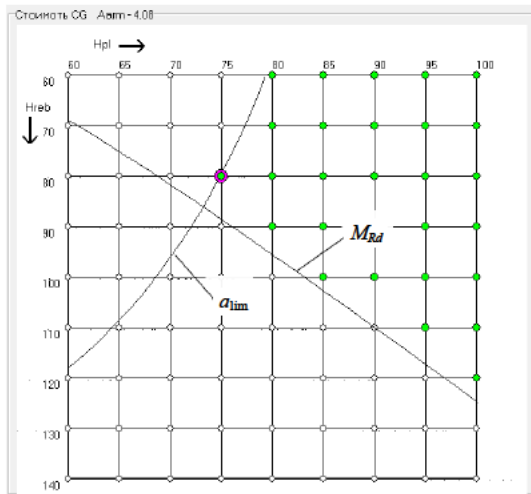


Рис. 4. Положение оптимального решения на слое, соответствующем площади арматуры $A_s = 4,08 \text{ см}^2$

Fig. 4. Position of the optimal solution on the layer corresponding to a reinforcement area of $A_s = 4,08 \text{ см}^2$

Определим оптимальные решения на всех других слоях пространства и сведем результаты в табл. 1.

Из найденного набора решения выбирается наиболее приемлемое с соответствующими параметрами оптимизационного решения. При расчете процента армирования взята в расчет площадь сечения, определяемая как тавровое сечение с высотой ребра $h_{pl} + h_{red}$ и шири-

ной условной полки $1/6nb$, где $n = 7$ – количество конечных элементов по длине ребра; $b = 200 \text{ мм}$ – размер конечного элемента.

Площадь сечения условного тавра $A_{\text{тавр}}$ при свесе b_w и процент армирования ρ равны:

$$b_w = 1/6m_{\text{реб}}b_k; A_{\text{тавр}} = (2b_w + b_k)h_{pl} + b_k h_{\text{реб}}; \rho = A_s/A_{\text{тавр}} \cdot 100, \quad (9)$$

где $m_{\text{реб}} = 7$ – количество конечных элементов вдоль ребра; $b_k = 400 \text{ мм}$ – ширина ребра тавра; b_w – свес полки условного тавра; h_{pl} , $h_{\text{реб}}$ – текущее значение толщины плиты и высоты ребра соответственно.

Если принять процент армирования ребер плиты в пределах 0,5–1,0 %, то из результатов, приведенных в табл. 1 и на рис. 4, при условии максимального прогиба не более 20 мм, видно, что наиболее приемлемым решением является решение 4 (табл. 1) со стоимостью материалов, затраченных на изготовление плиты, 427,9 руб., толщиной плиты 75 мм, высотой ребра 80 мм (без учета толщины плиты) и процентом армирования 0,62 % (рис. 3).

Полученное оптимальное решение демонстрирует характерный для эффективно спроектированных ребристых плит принцип: тонкая плита минимальной толщины, определяемой междуреберными пролетами (75 мм), сочетается с локальными ребрами значительной высоты (80 мм), обеспечивающими необходимую общую жесткость и прочность в зоне концентрации напряжений у технологического отверстия. Такое распределение материала является технологичным при монолитном бетонировании и обеспечивает минимальную стоимость конструкции.

Таблица 1

Результаты поиска глобального оптимизационного решения
Results of the search for the global optimal solution

Номер слоя	Толщина плиты h_{pl} , мм	Высота ребра $h_{\text{реб}}$, мм	Площадь арматуры A_s , см^2	Напряжения в арматуре σ , МПа	Площадь тавра $A_{\text{тавр}}$, см^2	Процент армирования ρ , %	Стоимость материала $C_{\text{пл}}$, руб.
1	80	70	1,01	349,4	1347	0,15	266,5
2	80	60	2,26	329,1	1307	0,35	329,7
3	80	60	3,08	316,5	1307	0,47	374,4
4	75	80	4,08	308,2	1320	0,62	427,9
5	75	80	5,09	294,4	1320	0,77	482,9
6	75	80	6,25	278,7	1320	0,95	546,2
7	80	60	7,60	247,4	1306	1,16	620,9
8	75	70	9,82	219,5	1280	1,53	735,9

ВЫВОДЫ

1. Для выполнения статического расчета ячейки ребристой железобетонной плиты с отверстием использована численная модель, построенная из изгибных прямоугольных конечных элементов, реализованных в программе Sturm. Предусмотрена возможность учета нелинейного закона деформирования железобетона, образования и раскрытия трещин.

2. Поставлена и решена задача оптимизации с использованием послойного сканирования. В качестве целевой функции принята стоимость материалов, затраченных на изготовление плиты. Обеспечено получение глобального минимума целевой функции и параметров оптимизации в дискретном пространстве, построенном на осях h_{pl} (толщина плиты), h_{reb} (высота ребра) и A_s (площадь арматуры). Плита армирована сеткой, которая не учитывается как параметр оптимизации. Оптимизация выполняется при соблюдении ограничений по жесткости $a_{lim} > a_l$, по прочности $M_{xlim} > M_{Ed}$ и процента армирования $\rho_{lmin} < \rho_l \leq \rho_{lmax}$.

3. Эффективность предложенного метода послойного сканирования подтверждается его способностью гарантированно находить глобальный минимум целевой функции в дискретном пространстве параметров, что обеспечивает экономически оптимальное решение при соблюдении всех нормативных ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бетонные и железобетонные конструкции: СП 5.03.01–2020. Введ. 16.09.2020. Минск: Минстройархитектуры, 2020. 238 с.
2. Основы проектирования строительных конструкций: СН 2.01.01-2019. Введ. 16.12.2019. Минск: Минстройархитектуры, 2020. 84 с.
3. Гвоздев, А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / А. А. Гвоздев. М.: Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1949. 276 с.
4. Мурашев, В. И. Железобетонные конструкции. Общий курс: учеб. для вузов / В. И. Мурашев, Э. Е. Сигалов, В. Н. Байков; под ред. В. И. Мурашева. М.: Стройиздат, 1991. 767 с.
5. Зенкевич, О. К. Метод конечных элементов / О. К. Зенкевич, Р. Тейлор; пер. с англ. под ред. Б. Е. Победри. 5-е изд., испр. М.: Мир, 2005. Т. 1: Основы метода. 436 с.
6. Арора, Дж. Введение в оптимальное проектирование / Дж. Арора; пер. с англ. В. Б. Смолова, В. В. Трофимова; под ред. В. Б. Смолова. М.: Мир, 1990. 639 с.
7. Kaveh, A. A Novel Meta-Heuristic Optimization Algorithm: Thermal Exchange Optimization / A. Kaveh, A. Dadras // Advances in Engineering Software. 2017. Vol. 110. P. 69–84. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2017.03.014>
8. Bekdaş, G. Generation of Sustainable Models with Multi-Objective Optimum Design of Reinforced Concrete (RC) Structures / G. Bekdaş, S. M. Nigdeli // Structures. 2022. Vol. 40. P. 223–236. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.04.020>
9. Öztürk, H. T. The Effectiveness of Metaheuristic Algorithms Modified with Fitness Distance Balance (FDB) Method on RC Slab Bridge Superstructure Optimization / H. T. Öztürk // Iranian Journal of Science and Technology – Transactions of Civil Engineering. 2024. Vol. 48, No 6. P. 4423–4442. <https://doi.org/10.1007/s40996-024-01488-5>.
10. Вербицкая, О. Л. Оптимизация многослойной плиты на упругом основании методом сокращения ресурсов / О. Л. Вербицкая, Л. И. Шевчук // Дорожное строительство и его инженерное обеспечение: материалы Междунар. науч.-техн. конф. / редкол. С. Е. Кравченко (гл. ред.) [и др.]. Минск: БНТУ, 2020. С. 286–289.
11. Вербицкая, О. Л. Оптимизация прямоугольных шарнирно опертых железобетонных гладких и ребристых плит методом сокращения ресурсов / О. Л. Вербицкая, Л. И. Шевчук // Наука и техника. 2022. Т. 21, № 2. С. 129–133. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-2-129-133>
12. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович; пер. с серб. Ю. Н. Зуева; под ред. В. Ш. Барбакадзе. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.
13. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А. С. Городецкий, В. И. Заварицкий, А. А. Рассказов, А. И. Лантух-Лященко; под общ. ред. А. С. Городецкого. М.: Транспорт, 1981. 143 с.
14. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966. 636 с.
15. Вербицкая, О. Л. Оптимизация физически нелинейных прямоугольных пластин кусочно-постоянного сечения: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Вербицкая Ольга Леонидовна; Белорус. нац. техн. ун-т. Минск, 2011. 22 с.
16. Вербицкая, О. Л. Пример аппроксимации расчетных моментов и прогибов прямоугольной железобетонной плиты / О. Л. Вербицкая // Дорожное строительство и его инженерное обеспечение: материалы Междунар. науч.-техн. конф. / редкол. С. Е. Кравченко (гл. ред.) [и др.]; сост. В. А. Ходяков. Минск: БНТУ, 2021. С. 231–234. URL: <https://rep.bntu.by/handle/data/108482>
17. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. М.: Наука, Главная редакция физ.-техн. лит., 1978. 592 с.
18. Биргер, И. А. Прочность, устойчивость, колебания: справ. / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 832 с.

Поступила 10.12.2025

Подписана в печать 22.04.2026

Опубликована онлайн 29.05.2026

REFERENCES

1. SP [Rules of Construction] 5.03.01–2020. *Concrete and Reinforced Concrete Structures*. Minsk, Ministry of Architecture and Construction, 2020. 238 (in Russian).
2. SN 2.01.01-2019. *Fundamentals of Designing Building Structures*. Minsk, Ministry of Architecture and Construction, 2020. 84 (in Russian).
3. Gvozdev A. A. (1949) *Calculation of the Load-Bearing Capacity of Structures Using the Limit Equilibrium Method*. Moscow, State Publishing House of Literature on Construction and Architecture. 276 (in Russian).
4. Murashev V. I., Sigalov E. E., Baykov V. N. (1991) *Reinforced Concrete Structures. General Course*. Moscow, Stroyizdat Publ. 767 (in Russian).
5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. (2000) *The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis*. Oxford, Butterworth-Heinemann.
6. Arora J. S. (1989) *Introduction to Optimum Design*. McGraw-Hill. 625.
7. Kaveh A., Dadras A. (2017) A Novel Meta-Heuristic Optimization Algorithm: Thermal Exchange Optimization. *Advances in Engineering Software*, 110, 69–84. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2017.03.014>
8. Bekdaş G., Nigdeli S. M. (2022) Generation of Sustainable Models with Multi-Objective Optimum Design of Reinforced Concrete (RC) Structures. *Structures*, 40, 223–236. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.04.020>
9. Öztürk H. T. (2024) The Effectiveness of Metaheuristic Algorithms Modified with Fitness Distance Balance (FDB) Method on RC Slab Bridge Superstructure Optimization. *Iranian Journal of Science and Technology – Transactions of Civil Engineering*, 48 (6), 4423–4442. <https://doi.org/10.1007/s40996-024-01488-5>
10. Verbitskaya O. L., Shevchuk L. I. (2020) Optimization of a Multilayer Slab on an Elastic Foundation by the Method of Resource Reduction. *Road Construction and Its Engineering Support: Proceedings of International Scientific and Technical Conference*. Minsk, Belarusian National Technical University, 286–289 (in Russian).
11. Verbitskaya O. L., Shevchuk L. I. (2022) Optimization of Rectangular Articulated Reinforced Concrete Smooth and Ribbed Slabs Using Resource Reduction Method. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 21 (2), 129–133 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-2-129-133>
12. Sekulovic M. (1977) *The Finite Element Method*. New York, McGraw-Hill. 787.
13. Gorodetskii A. S., Zavaritskii V. I., Rasskazov A. A., Lantukh-Lyashchenko A. I. (1981) *Finite Element Method in the Design of Transport Structures*. Moscow, Transport Publ. 143 (in Russian).
14. Timoshenko S. P., Voynovsky-Kruger S. (1966) *Plates and Shells*. Moscow, Nauka Publ. 636 (in Russian).
15. Verbitskaya O. L. (2011) *Optimization of Physically Non-linear Rectangular Plates of Piecewise Constant Cross-Section [Dissertation]*. Minsk, Belarusian National Technical University (in Russian).
16. Verbitskaya O. L. (2021) An Example of Approximation of the Calculated Moments and Deflections of a Rectangular Reinforced Concrete Slab. *Road Construction and Its Engineering Support: Proceedings of International Scientific and Technical Conference*. Minsk, Belarusian National Technical University, 231–234 (in Russian).
17. Samarsky A. A., Nikolaev E. S. (1978) *Methods for Solving Grid Equations*. Moscow, Nauka Publ., Main Editorial Office for Physical and Technical Literature. 592 (in Russian).
18. Birger I. A., Panovko Ya. G. (1968) *Strength, Stability, Vibrations: Handbook*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 832 (in Russian).

Received: 10.12.2025

Accepted: 22.04.2026

Published online: 29.05.2026