

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2026-25-2-122-131>

УДК 624.131

## Оценка микроконтактной прочности частиц в плотных песчаных грунтах

Докт. техн. наук, доц. В. Г. Барсуков<sup>1)</sup>, канд. техн. наук, доц. Е. А. Евсева<sup>2)</sup>,  
студ. А. В. Ткач<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Гродно, Республика Беларусь),

<sup>2)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

**Реферат.** Цель работы – установление силового диапазона применимости контактной теории Герца в механике плотных песчаных грунтов на основе разработки и апробации методики расчетной оценки микроконтактной прочности минеральных частиц. Выполнен силовой анализ упругого контакта частиц грунта внутри элементарной ячейки, моделируемых микросферами с диаметром, равным среднему диаметру частиц рассматриваемого фракционного состава. Характер упаковки частиц в элементарной ячейке принят в виде объемно-центрированного куба. Фрикционное взаимодействие между частицами описывали законом трения Амонтона–Кулона. Параметры контактного взаимодействия определяли с использованием формул Герца с учетом отличия показателей механических свойств поверхностного слоя от аналогичных показателей стандартных образцов. Предложена модель перехода от нагрузок в единичной ячейке к номинальному давлению на массив грунта. Расчетное усилие, действующее на частицу, определяли как произведение номинального давления в массиве частиц на площадь сечения элементарной ячейки. Приведены аналитические зависимости для расчета усилий, возникающих в зоне контакта частиц, а также максимальных давлений на площадках контакта. Произведена оценка внешних давлений на массив грунта, при которых эквивалентные микроконтактные давления, рассчитываемые по второй теории прочности, достигают предела прочности на сжатие материала поверхностного слоя минеральных частиц. Предложено рассматривать эти давления как ограничение на возможность применения теории Герца к решению контактных задач в песчаных грунтах. Результаты исследований могут быть использованы в учебном процессе при подготовке специалистов строительных и химико-технологических специальностей, а также в научно-исследовательской практике.

**Ключевые слова:** минеральная частица, объемно-центрированная кубическая упаковка, контактные давления, расчетная оценка

**Для цитирования:** Барсуков, В. Г. Оценка микроконтактной прочности частиц в плотных песчаных грунтах / В. Г. Барсуков, Е. А. Евсева, А. В. Ткач // *Наука и техника*. 2026, Т 25, № 2. С. 122–131, <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2026-25-2-122-131>

## Assessing the Microcontact Strength of Particles in Dense Sandy Soils

V. G. Barsukov<sup>1)</sup>, E. A. Evseeva<sup>2)</sup>, A. V. Tkach<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Yanka Kupala State University of Grodno (Grodno, Republic of Belarus),

<sup>2)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The objective of this study is to establish the force range of applicability of the Hertz's contact theory in the mechanics of dense sandy soils by developing and testing a methodology for calculating the microcontact strength of mineral particles. A force analysis of the elastic contact of soil particles within a unit cell modeled by microspheres with a diameter equal to the average diameter of particles of the fractional composition under consideration was performed. The particle packing in the unit cell was assumed to be a body-centered cube. The frictional interaction between the particles was described by the Amontons-Coulomb friction law. Contact interaction parameters were determined using Hertz formulas, taking into account the difference in the mechanical properties of the surface layer from similar indicators of standard samples. A model for converting loads in a single cell to the nominal pressure on the soil mass is proposed. The calculated force

### Адрес для переписки

Евсева Елена Анатольевна  
Белорусский национальный технический университет  
пр. Независимости, 65,  
20113, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: + 375 17 239-93-04  
vm3\_ftk@bntu.by

### Address for correspondence

Evseeva Elena A.  
Belarusian National Technical University  
65, Nezavisimosty Ave.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Тел.: + 375 17 239-93-04  
vm3\_ftk@bntu.by

acting on a particle was determined as the product of the nominal pressure in the particle mass and the cross-sectional area of the unit cell. Analytical relationships are provided for calculating the forces arising in the particle contact zone, as well as the maximum pressures at the contact areas. An assessment was made of the external pressures on the soil mass at which the equivalent microcontact pressures, calculated using the second theory of strength, reach the compressive strength limit of the material of the surface layer of mineral particles. It is proposed to consider these pressures as a limitation on the applicability of Hertz's theory to solving contact problems in sandy soils. The research results can be used in educational programs for training specialists in construction and chemical engineering specialties, as well as in scientific research practice.

**Keywords:** mineral particle, body-centered cubic packing, contact pressures, estimated value

**For citation:** Barsukov, V.G. Evseeva E. A., Tkach A. V. (2026) Assessing the Microcontact Strength of Particles in Dense Sandy Soils. *Science and Technique*. 25 (2), 122–131 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2026-25-2-122-131>

## Введение

Поведение песчаных грунтов под нагрузкой представляет повышенный интерес для специалистов в области строительства зданий и сооружений, мостов и тоннелей, автомобильных и железных дорог, в гидротехническом строительстве [1–3]. Механика таких материалов интенсивно развивается на основе преимущественно макромеханического подхода, основанного на адаптации решений теории упругости и пластичности изотропных тел к массивам минеральных частиц [1, 2, 4, 5]. Изложены также теоретические основы статистической механики грунтов как дискретных сред [6]. При этом исследуется поведение зернистой среды, а не отдельных ее зерен. Однако, несмотря на достигнутый прогресс, ряд вопросов остается недостаточно изученным. В частности, в научно-технической литературе фрагментарно представлены сведения о параметрах микроконтактного взаимодействия частиц в песчаных грунтах [2, 7].

Анализ результатов исследований в смежных областях науки и техники – теории трения в дисперсных материалах [8–12] посвящен преимущественно объяснению изменения закономерностей трения частиц между собой в сыпучих средах и о стенки деформирующего инструмента под действием внешних нагрузок без обобщения на массивы минеральных частиц. Разработаны также методики определения параметров напряженного состояния металлических деталей в зоне фрикционного контакта металла с абразивными частицами [13, 14]. Вместе с тем в ряде задач механики грунтов отсутствует удовлетворительная математическая постановка, что обусловлено сложностью этих задач [15]. Исследования по многим направлениям находятся в стадии разработки

и апробации методов математического моделирования и расчета [6, 7]. Например, в работе [16] предложена простейшая модель микроконтактного взаимодействия сферических частиц при простой кубической упаковке. Однако такая схема излишне упрощена, поскольку предполагает «лобовой» контакт только одной пары частиц. Полученные расчетные значения контактных напряжений завышены и могут рассматриваться как верхняя оценка возможного уровня напряжений. Более сложный вариант, учитывающий шероховатость поверхности частиц, предложен в [7]. Показано, что с ростом напряжения неровности сглаживаются и контакт начинает соответствовать теории Герца, при этом образуются новые точки контакта. Рассмотрены пески с плотной упаковкой частиц, где объем каждой поры меньше размера частицы, а коэффициент пористости практически не меняется с увеличением напряжения до момента течения. Однако методика расчета сложна, причем не определены силовые границы применимости предложенной расчетной модели. В [2] на основе решения Герца описаны деформации, которые получит массив, сложенный шарами в плотной упаковке, при действии на него распределенной нагрузки, передаваемой через жесткий штамп. В качестве примера произведен расчет для случая, когда шары имеют одинаковый радиус и одинаковые показатели механических свойств (модули упругости и коэффициенты Пуассона). В результате получены величины осадки и горизонтального смещения крупнообломочного грунта без нарушения структуры. Показано, что величина напряжений на контактах во много раз превосходит значения общих средних эффективных напряжений. Однако предложенные расчетные схемы сложны для практического использования. Кроме того, не определен сило-

вой диапазон применимости предложенной расчетной модели, основанной на контактной теории Герца.

Вместе с тем логика исследований предполагает необходимость создания многоуровневой системы, в которой осуществляется взаимообусловленный переход от микроконтактного взаимодействия к макромеханическому поведению грунта с установлением границ перехода от упругого контакта к неупругому.

Цель работы – установление силового диапазона применимости контактной теории Герца в механике плотных песчаных грунтов на основе разработки и апробации методики расчетной оценки микроконтактной прочности минеральных частиц.

### Методика исследований

Исследования производились в несколько этапов. На первом этапе обоснован выбор расчетной схемы в виде объемно-центрированной упаковки сферических частиц равного диаметра. Определены геометрические параметры ненагруженной кубической ячейки, включая размеры сторон и диагоналей элементарного кубика, а также характеристические зазоры между модельными сферическими частицами. На втором этапе произведен силовой анализ контактного взаимодействия центральной сферы с боковыми с учетом трения между сферическими частицами. На третьем этапе с использованием формул Герца получены аналитические зависимости для расчета максимальных и средних контактных давлений, выполнено теоретическое обоснование выбора значений показателей механических и фрикционных свойств порвнхосносных слоев минеральных частиц.

Эквивалентные напряжения в наиболее нагруженной точке контакта рассчитывали по теории максимальных деформаций. Заключительный этап включал расчетную оценку влияния внешнего давления, действующего на массив частиц грунта, коэффициента внутреннего трения в грунтах, а также показателей механических свойств минеральных частиц скелета грунта (модуля упругости и коэффициента Пуассона) на величину предельных номинальных давлений в грунтах, приводящих к потере микроконтактной прочности.

### Разработка и обоснование расчетной модели деформирования плотных песчаных грунтов

Поскольку в процессе выветривания разрушению в первую очередь подвергаются острые ребра и углы и частицы приобретают окатанную форму [17] (рис. 1), при выборе расчетной модели исходили из предпосылки, что для исследования напряженно-деформированного состояния песчаный грунт может быть заменен зернистой средой, состоящей из частиц среднего эффективного размера [6].

Так, для эквивалентной зернистой среды, состоящей из частиц среднего размера, передача усилий от каждой частицы осуществляется в среднем на две частицы в плоской и на четыре частицы в пространственной задаче [6]. Применительно к плотным песчаным грунтам принята расчетная модель в виде элементарного объемно-центрированного куба из сфер одинакового размера  $d$  (рис. 2), в вершинах граней которого (точки  $A, B, C, D, A', B', C', D'$ ) и в центре куба (точка  $O$ ) расположены центры модельных микросфер.

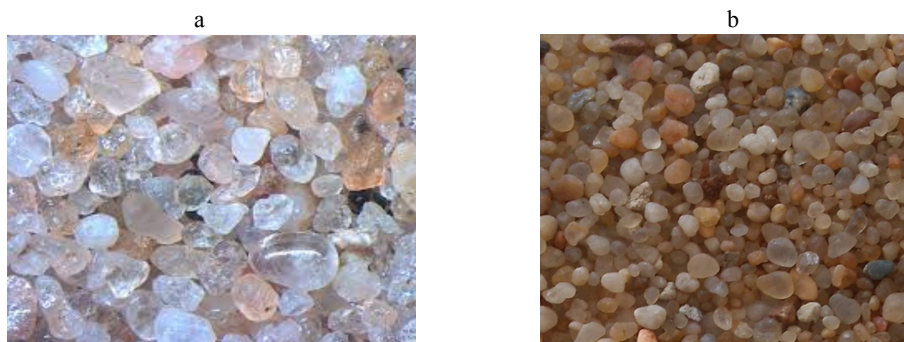


Рис. 1. Общий вид частиц: а – песчаного промытого грунта; б – кварцевого песка

Fig. 1. General view of particles: a – washed sandy soil; b – quartz sand

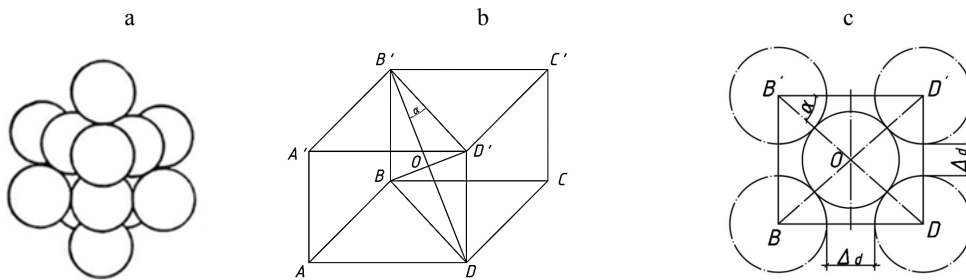


Рис. 2. Схематическое изображение модельных сфер (а) и элементарной объемно-центрированной кубической ячейки (b) с сечением диагональной плоскостью (с)

Fig. 2. Schematic representation of model spheres (a) and an elementary body-centered cubic cell (b) with a cross-section by a diagonal plane (c)

Геометрические параметры ячейки определяли из следующих соображений. Если обозначить размер стороны куба  $b$ , то размер диагонали  $B'D$  (или любой другой диагонали) для боковых граней равен

$$B'D = \sqrt{2}b. \quad (1)$$

Диагональ  $B'D$  элементарного куба как гипотенуза прямоугольного треугольника  $B'DB$  может быть вычислена по формуле

$$B'D = \sqrt{(BD)^2 + (B'B)^2} = b\sqrt{3}. \quad (2)$$

Однако при плотной объемно-центрированной кубической упаковке центральная сфера контактирует с угловыми, в связи с чем длина диагонали куба составит (рис. 2b)

$$B'D = 2d. \quad (3)$$

Совместное решение зависимостей (2) и (3) дает размер  $b$  стороны элементарной кубической ячейки

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}}d \approx 1,15d. \quad (4)$$

Угол  $\alpha$  связан с диагональю боковой грани  $DD'$  и диагональю  $B'D$  куба следующей зависимостью:

$$\sin \alpha = \frac{DD'}{B'D} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что этот угол составляет  $35^\circ 26'$ .

Произведем анализ силового взаимодействия сфер в элементарной ячейке (рис. 3а). Для большей наглядности на рис. 3а приведена только нижняя часть элементарной ячейки в диагональном сечении куба.

Центральная сфера прижимается к четырем нижним расчетным усилием  $F_e$ , равным произведению внешнего среднего давления  $p$  на номинальную площадь боковой грани:

$$F_e = pb^2 = \frac{4}{3}d^2p. \quad (6)$$

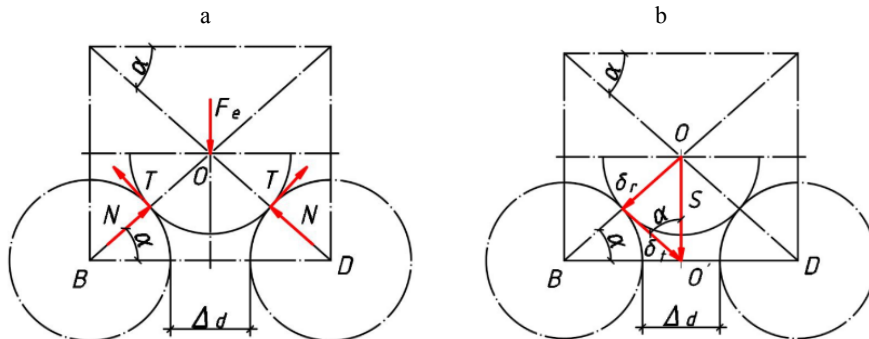


Рис. 3. Схемы: а – сил, действующих на частицы; б – микроконтактных деформаций

Fig. 3. Diagrams: a – forces acting on particles; b – micro-contact deformations

В зоне контакта сфер действуют нормальные усилия  $N$  взаимного прижатия сфер и касательные  $T$  силы трения. При расчетах принята взаимосвязь нормальных  $N$  и касательных  $T$  сил трения в форме закона Амонтона–Кулона [1, 2]

$$T = \operatorname{tg}\varphi N, \quad (7)$$

где  $\varphi$  – угол внутреннего трения в массиве грунта.

Из условия равновесия (сумма проекций всех сил на вертикальную ось равна нулю) можно записать

$$4Ns\sin\alpha + 4Nt\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha = F_e. \quad (8)$$

Входящий в (8)  $\cos\alpha$  найдем по формуле

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (9)$$

С учетом (5), (6) и (9) для усилия прижатия частиц в элементарной ячейке после преобразований можно получить следующее выражение:

$$N = \frac{F_e}{4(\sin\alpha + \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha)} = \frac{pd^2}{\sqrt{3}(1 + \operatorname{tg}\varphi\sqrt{2})}. \quad (10)$$

Аналитическая зависимость (10) позволяет определять параметры напряженно-деформированного состояния элементов модельной ячейки с использованием формул Герца. При упругом контакте сферических частиц радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , механические свойства которых характеризуются модулями упругости  $E_1$  и  $E_2$  и коэффициентами Пуассона  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , формула Герца для расчета максимальных контактных давлений  $p_0$  имеет вид [18, 19]

$$p_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{6FE_{\text{np}}^2}{R_{\text{np}}^2}}, \quad (11)$$

где приведенный модуль упругости  $E_{\text{np}}$  и приведенный радиус  $R_{\text{np}}$  вычисляются по формулам:

$$\frac{1}{E_{\text{np}}} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}; \quad (12)$$

$$\frac{1}{R_{\text{np}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (13)$$

Для контакта сферических частиц одинакового диаметра  $d$  из одного и того же материала приведенный модуль упругости  $E_{\text{np}}$  и приведенный радиус  $R_{\text{np}}$  могут быть определены при помощи следующих аналитических зависимостей:

$$E_{\text{np}} = \frac{E}{2(1 - \nu^2)}; \quad (14)$$

$$R_{\text{np}} = \frac{d}{4}, \quad (15)$$

где  $E$ ,  $\nu$  – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала частицы.

Подставив вместо  $F$  значение  $N$  из (10) в (11), с учетом (14) и (15) для расчета максимальных микроконтактных давлений получаем

$$p_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}E^2 p}{(1 + f\sqrt{2})(1 - \nu^2)^2}}. \quad (16)$$

Необходимо учитывать, что процесс деформирования частиц является многостадийным (рис. 4). Вначале материал деформируется упруго (рис. 4а), а после достижения наибольшими контактными давлениями величины разрушающих давлений произойдет зарождение зоны хрупкого смятия и поверхностного растрескивания материала. В дальнейшем зона смятия и растрескивания развивается (рис. 4б) и увеличивается в размерах.

Поскольку минеральные частицы хрупкие, а зона контакта находится в условиях трехстороннего сжатия, для расчетной оценки предельного состояния принята вторая теория прочности (теория максимальных деформаций). Эквивалентные напряжения  $\sigma_{\text{эkv}}$ , согласно этой теории [19, 20], приравниваются к пределу прочности частиц на сжатие  $\sigma_{\text{uc}}$

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{uc}}, \quad (17)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , – соответственно первое второе и третье главные напряжения.

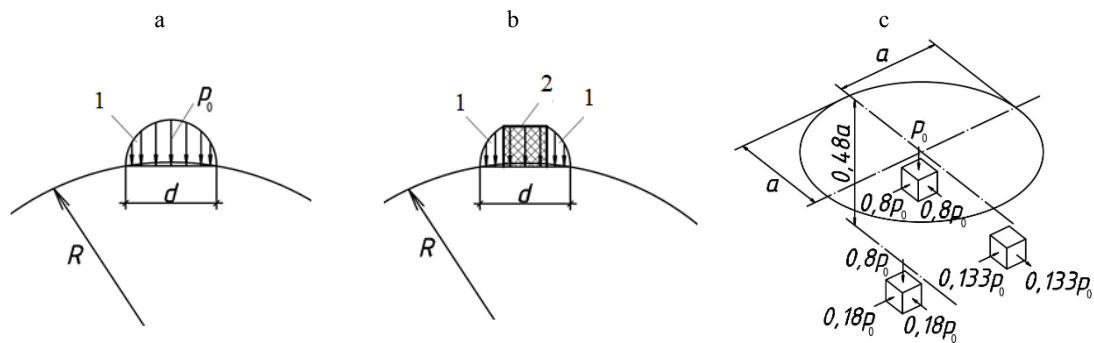


Рис. 4. Схематическое изображение стадий деформирования (а, б) и распределения напряжений при контактном взаимодействии частиц: а – упругий контакт; б – то же с неупругим смятием; с – распределение напряжений при упругом контакте; 1 – область упругого контакта; 2 – то же хрупкого смятия и растрескивания

Fig. 4. Schematic representation of the stages of deformation (a, b) and stress distribution during contact interaction of particles: a – elastic contact, b – elastic contact with inelastic crumpling; c – stress distribution during elastic contact; 1 – elastic contact region; 2 – area of brittle crumpling and cracking

В механике грунтов принято считать главные напряжения сжимающими [1, 2, 5]. Размер  $a$  на рис. 4б обозначает радиус пятна контакта, определяемый по соответствующей формуле Герца [18, 19]. Приняв для оценочных расчетов значение коэффициента Пуассона  $\nu$  равным 0,3, можно воспользоваться распределением контактных напряжений, приведенным на рис. 4в [18, 19]. Из рисунка видно, что в центре пятна контакта главное напряжение  $\sigma_1$  равно  $p_0$ , а  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  равны  $0,8p_0$ . Подставив эти значения в формулу (17) и решив полученное выражение относительно  $p_0$ , получаем

$$p_0 = \frac{\sigma_{uc}}{0,52} = 1,92\sigma_{uc}. \quad (18)$$

Совместное решение (16) и (18) приводит к следующей аналитической зависимости для расчета критического значения номинального давления  $p_{кр}$ , соответствующего условию зарождения в наиболее нагруженной точке микрореконтактного смятия поверхности минеральных частиц:

$$p_{кр} = \frac{27(1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \sqrt{2})(1 - \nu^2)^2 \sigma_{uc}^3}{\sqrt{3}E^2} = 15,6(1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \sqrt{2})(1 - \nu^2)^2 \frac{\sigma_{uc}^3}{E^2}. \quad (19)$$

Аналитическая зависимость (19) позволяют производить расчетную оценку предельных контактных давлений, ограничивающих зону применимости формул Герца. Как видно из (19),

критическое давление в зоне контакта не зависит от диаметра минеральных частиц, но нелинейно зависит от предела прочности материала на сжатие  $\sigma_{uc}$ , коэффициента трения  $\operatorname{tg}\varphi$ , а также показателей механических свойств ( $E$ ,  $\nu$ ) минеральных частиц.

### Результаты исследований и их обсуждение

Для практического использования аналитической зависимости (19) необходимо знать значения показателей физико-механических и фрикционных свойств минеральных частиц, что применительно к грунтам представляет собой сложную и не вполне разработанную научно-техническую проблему. Если для песчаных грунтов коэффициент поперечной деформации известен и приблизительно постоянен ( $\mu = 0,3$ ) [1, 2], то имеющиеся в литературе и интернет-источниках данные по фрикционным и механическим свойствам песчаных грунтов и входящих в их состав минеральных частиц являются фрагментарными и характеризуются большим разбросом значений. Так, величина коэффициента внутреннего трения  $f$ , равного тангенсу угла трения  $\varphi$  ( $f = \operatorname{tg}\varphi$ ), зависит от влажности и крупности песка (табл. 1) [1, 2, 21, 22].

Значения показателей механических свойств минералов имеют еще больший диапазон изменения, что обусловлено колебаниями их состава и микропористости. Приводимые в научно-технической и справочной литературе данные относятся к блочным, монолитным горным породам (табл. 2).

Ориентировочные значения параметров трения песчаных грунтов различной влажности  
Approximate values of friction parameters of sandy soils of different moisture contents

Тип песка	Параметры трения при влажности грунта					
	сухой		влажный		мокрый	
	φ, град	tgφ	φ, град	tgφ	φ, град	tgφ
Крупный	30–35	0,58–0,70	32–40	0,63–0,84	25–27	0,47–0,51
Средний	28–30	0,53–0,58	35	0,70	25	0,47
Мелкий	25	0,47	30–35	0,58–0,70	15–20	0,27–0,36
Гравий	35–40	0,70–0,84	35	0,70	30	0,58

Таблица 2

Ориентировочные значения показателей механических свойств минералов песчаных грунтов [23, 24]

Approximate values of mechanical properties of minerals in sandy soils [23, 24]

Материал	Модуль упругости $E$ , ГПа	Коэффициент Пуассона $\nu$	Предел прочности при сжатии $\sigma_{сж}$ , МПа
Песчаник кварцитовый	18–68	0,20–0,29	70–90
Гранит	21–70	0,26–0,27	120–260
Мрамор	23–95	0,27–0,30	100–180

Известно, что песчаные грунты состоят из выветренных и измельченных под действием климатических факторов зерен горных массивов. При этом поверхностные слои минеральных частиц вследствие выветривания (эрозии) и связанных с ним динамических, термоциклических, влажностных, коррозионно-химических и других воздействий имеют значения показателей деформационно-прочностных свойств минеральных частиц скелета грунта, заметно отличающиеся в сторону снижения от приводимых в справочной литературе аналогичных показателей соответствующих монолитных горных массивов. Так, анализ показывает, что на поверхности минеральных частиц имеются микролунки (кратеры, углубления) (рис. 5) [1] и микротрещины [17], а реальный контакт частиц является микропористым.

Попытки использования моделей в виде сферических частиц с шероховатой поверхностью [7, 11] значительно усложняют расчетную схему, причем точность расчетов от этого не увеличивается, поскольку нет оснований утверждать, что входящие в расчетные формулы значения показателей механических свойств

поверхностного слоя с микрошероховатостями и микротрещинами равны аналогичным показателям стандартных блочных образцов. В связи с изложенным на современном этапе развития механики грунтов расчеты контактных напряжений и деформаций могут быть выполнены только в приближенной, оценочной постановке. При таком подходе удобно использовать вместо модуля упругости  $E$  блочного материала уменьшенный по величине условный, «контактный» модуль, учитывающий микропористость поверхностного слоя в зоне контакта. Например, в работе [5] предлагают для оценочных расчетов принимать значение модуля упругости  $E = 20$  ГПа, или на уровне аналогичного показателя для бетонов.

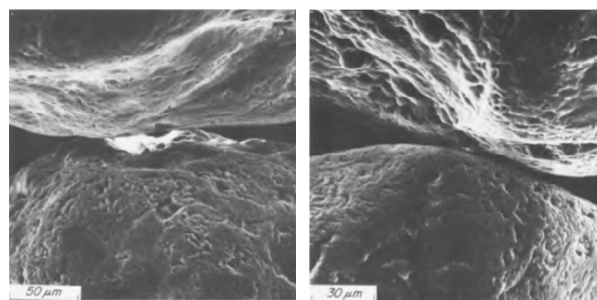


Рис. 5. Микрофотографии контакта зерен кварцевого песка [1]

Fig. 5. Micrographs of contact between quartz sand grains [1]

Поскольку контакт является микропористым, а контактные напряжения и деформации концентрируются в тонком приповерхностном слое, свойства которого отличаются от свойств материала в блоке, для оценочных расчетов в данной работе в качестве «контактного модуля» приняты минимальные значения этих показателей из табл. 2, которые соответствуют максимальной пористости материала в блоке. Пре-

дел прочности  $\sigma_{ис}$  принят в диапазоне от минимального значения до увеличенного на 20 МПа, а коэффициент Пуассона – в диапазоне от  $\nu = 0,15$  до  $\nu = 0,30$ . В табл. 3 приведены рассчитанные оценочные значения критических контактных давлений  $p_{кр}$  для широкого диапазона изменения коэффициента трения  $tg\phi$  при коэффициенте Пуассона минеральной частицы  $\nu = 0,25$ .

Таблица 3

**Влияние коэффициента трения  $tg\phi$  и модуля контактной упругости  $E$  на критические контактные давления  $p_{кр}$  для плотных песчаных грунтов**  
**Influence of the friction coefficient  $tg\phi$  and the particle elastic modulus  $E$  on the critical contact pressures  $p_{кр}$  for dense sandy soils**

Модуль упругости $E$ материала частиц, ГПа	$\sigma_{ис}$ , МПа	$p_{кр}$ , кПа, при коэффициенте трения $tg\phi$			
		0,5	0,6	0,7	0,8
18	70	24,8	26,8	28,9	30,9
	80	36,9	40,0	43,0	46,1
	90	52,7	57,0	61,4	65,7
21	120	91,7	99,3	106,9	114,5
	130	116,5	126,1	135,8	145,4
	140	145,8	157,9	170,0	182,1
23	100	42,3	47,9	51,6	55,2
	110	56,2	63,7	68,6	73,5
	120	73,0	82,8	89,1	95,5

В табл. 4 приведены данные о совместном влиянии модуля контактной упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  материала частиц на величину критических контактных давлений. Расчет выполнен для значения коэффициента трения  $tg\phi = 0,7$ , что соответствует влажным пескам в табл. 1.

Из табл. 3 и 4 видно, что критические значения контактных давлений возрастают с увеличением коэффициента внутреннего трения  $tg\phi$  и снижаются с уменьшением значения модуля упругости  $E$  материала поверхностного слоя минеральной частицы. При этом увеличение коэффициента Пуассона материала минеральных частиц скелета грунта приводит к некоторому уменьшению критических контактных давлений. Однако наибольший вклад в изменение этих давлений оказывает изменение контактной прочности частиц грунта.

Анализ показывает, что полученные расчетные значения критических контактных давлений грунтов близки к опубликованным резуль-

татам экспериментальных исследований по критическому давлению для зоны структурной прочности грунтов.

Таблица 4

**Влияние коэффициента Пуассона  $\nu$  и модуля упругости частиц  $E$  на критические контактные давления  $p_{кр}$  плотных песчаных грунтов**  
**Influence of Poisson's ratio  $\nu$  and the particle elastic modulus  $E$  on the critical contact pressures for dense sandy soils**

Модуль упругости $E$ материала частиц, ГПа	$\sigma_{ис}$ , МПа	$p_{кр}$ , кПа, при коэффициенте Пуассона $\nu$			
		0,15	0,20	0,25	0,30
18	70	31,4	30,3	28,9	27,2
	80	46,8	45,1	43,0	40,5
	90	66,7	64,3	61,4	57,8
21	120	116,2	112,1	106,9	100,7
	130	147,6	142,4	135,8	127,9
	140	184,8	178,2	170,0	160,2
23	100	56,1	54,1	51,6	48,6
	110	74,5	71,9	68,8	64,6
	120	96,9	93,4	89,1	84,2

Представленные в таблицах данные характеризуют появление критического предельного состояния только в одной точке для каждой пары контактирующих минеральных частиц – в центре пятна касания, где действуют максимальные контактные давления. Развитие зоны предельного состояния внутри пятна касания представляет собой отдельную задачу механики микроконтактных взаимодействий.

Кроме того, представленные в таблицах результаты расчетов получены для массивов частиц одинакового диаметра. В полидисперсных системах, содержащих широкий спектр минеральных частиц, возможно перераспределение нагрузки между крупными и более мелкими частицами. В этом случае будет наблюдаться спектр усилий контакта и критических контактных давлений, ограничивающих область применения контактной теории Герца в механике плотных песчаных грунтов, что также представляет собой самостоятельную задачу механики микроконтактных взаимодействий.

**ВЫВОДЫ**

1. Разработана методика расчетной оценки микроконтактных давлений в плотных песча-

ных грунтах, основанная на применении контактной теории Герца и предложенного варианта учета снижения показателей механических свойств поверхностного слоя минеральных частиц в сравнении с аналогичными показателями стандартных блочных образцов горных пород.

2. С использованием критерия разрушения, основанного на теории максимальных деформаций (вторая теория прочности), предложена аналитическая зависимость для расчетной оценки критических внешних давлений, действующих на массив грунта, и приводящих к зарождению точек локального смятия на пятне контакта частиц. Эти критические давления предложено считать в качестве ограничивающих область применения контактной теории Герца для песчаных грунтов.

3. На примере ряда разновидностей минеральных частиц выполнена расчетная оценка критических значений предельных давлений с позиций зарождения точек локального смятия частиц на пятне контакта, подтвердившая согласование расчетных значений с современными представлениями о макромеханическом поведении песчаных грунтов.

4. Рассмотренная модель микроконтактного взаимодействия и полученные на ее основе результаты являются приближенными. Они позволяют осуществлять только первичную оценку уровня возникающих контактных давлений и силового диапазона применения формулы Герца для анализа напряженно-деформированного состояния в зоне контакта минеральных частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Terzaghi, K. Soil Mechanics in Engineering Practice / K. Terzaghi, B. R. Peck, C. Mesri. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1996. 533 p.
2. Тер-Мартirosян, З. Г. Механика грунтов / З. Г. Тер-Мартirosян. М.: АСВ, 2009. 550 с.
3. Справочник по механике и динамике грунтов / В. Б. Швец, Л. К. Гинзбург, В. М. Гольдштейн [и др.]; под ред. В. Б. Швеца. К.: Будивельник, 1987. 232 с.
4. Ishibashi, I. Soil Mechanics Fundamentals / I. Ishibashi, H. Hazarika. London, New York: CRC Press Taylor & Francis Group. 2010. 321 p. <https://doi.org/10.1201/b16655>
5. Verruijt, A. Soil Mechanics / A. Verruijt. Delft: Delft University of Technology. 2001. 336 p.
6. Кандауров, И. И. Механика зернистых сред и ее применение в строительстве / И. И. Кандауров. М.: Стройиздат, 1966. 319 с.
7. McDowell, G. R. Micro Mechanics of Elastic Soil / G. R. McDowell, M. D. Bolton // Soils and Foundations. 2001. Vol. 41, No 46. P. 147–152. [https://doi.org/10.3208/sandf.41.6\\_147](https://doi.org/10.3208/sandf.41.6_147)
8. Барсуков, В. Г. Трибомеханика дисперсных материалов. Технологические приложения / В. Г. Барсуков, Б. Крунич. Гродно: ГрГУ. 2004. 260 с.
9. Adams, M. J. A Contact Mechanics Approach to the Prediction of the Wall Friction of Powders / M. J. Adams, B. J. Briscoe, L. Pope // Tribology in Particulate Technology / ed. by B. J. Briscoe, M. J. Adams. Bristol and Philadelphia: Adam Higler, 1987. P. 8–22.
10. Kendall, K. Relevance of Contact Mechanics to Powders – Elasticity, Friction and Agglomerate Strength / K. Kendall // Tribology in Particulate Technology / ed. by B. J. Briscoe, M. J. Adams. Bristol and Philadelphia: Adam Higler, 1987. P. 110–111.
11. Webster, M. N. A Numerical Model for Elastic Frictionless Contact of Real Rough Surfaces / M. N. Webster, R. S. Sayles // Journal of Tribology. 1986. Vol. 108, No 3. P. 314–320. <https://doi.org/10.1115/1.3261185>
12. Tüzün, U. Effect of Consolidation and Yield History on the Measured Angles of Friction of Particulate Solids / U. Tüzün // Tribology in Particulate Technology / ed. by B. J. Briscoe, M. J. Adams. Bristol and Philadelphia: Adam Higler, 1987. P. 38–62.
13. Крунич, Б. Моделирование микроконтактных взаимодействий при газоабразивном изнашивании сталей с учетом деформационного упрочнения / Б. Крунич, В. Г. Барсуков, А. И. Свириденко // Трение и износ. 2019. Т. 40, № 6. С. 644–653.
14. Крунич, Б. Моделирование микроконтактных взаимодействий при скольжении твердых частиц вдоль радиальных лопастей турбомашин / Б. Крунич, В. Г. Барсуков, М. А. Илькевич // Трение и износ. 2022. Т. 43, № 2. С. 141–149. <https://doi.org/10.32864/0202-4977-2022-43-2-141-149>
15. Гольдштейн, М. Н. Механические свойства грунтов / М. Н. Гольдштейн. М.: Стройиздат, 1971. 367 с.
16. Ткач, А. В. Микроконтактные взаимодействия в массиве минеральных частиц / А. В. Ткач // Новые технологии и материалы, автоматизация производства (НТиМАП-2025): сб. ст. / Брестский государственный технический университет. Брест: Изд-во БрГТУ, 2025. С. 353–356.
17. Потапов, А. Д. Песчаные грунты / А. Д. Потапов, Н. А. Платов, М. Д. Лебедева. М.: АСВ. 2009. 256 с.
18. Jonson, K. L. Contact Mechanics / K. L. Jonson. Cambridge University Press, 1985. 414 p.
19. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; отв. ред. Г. С. Писаренко. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Наук. думка. 1988. 736 с.
20. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокоров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев [и др.]. Минск: Наука и техника, 1988. 464 с.
21. Енохович, А. С. Справочник по физике / А. С. Енохович. М.: Просвещение. 1990. 384 с.

22. Любимов, Н. И. Справочник по физико-механическим параметрам горных пород рудных районов / Н. И. Любимов, Л. И. Носенко. М.: Недра. 1978. 285 с.
23. Корсаков, А. К. Структурная геология / А. К. Корсаков. М.: КДУ. 2009. 328 с.
24. Bowles, J. E. *Foundation Analysis and Design* / J. E. Bowles. 5<sup>th</sup> ed. New York.: McGraw-Hill. 1996. 1241 p.

Поступила 20.11.2025

Подписана в печать 27.01.2026

Опубликована онлайн 31.03.2026

#### REFERENCES

1. Terzaghi K., Peck B.R., Mesri C. (1996) *Soil Mechanics in Engineering Practice*. New York, John Wiley & Sons, Inc. 533.
2. Ter-Martirosyan Z. G. (2009) *Soil Mechanics*. Moscow, ACV Publ. 550 (in Russian).
3. Shvets V. B., Ginzburg L. K., Gol'dshtein V. M., Kapuchtin V. K., Feklin V. I., Shvets N. S. (1987) *Handbook of Soil Mechanics and Dynamics*. Kiev, Budivel'nik Publ. 232 (in Russian).
4. Ishibashi I., Hazarika H. (2010) *Soil Mechanics Fundamentals*. New York, CRC Press Taylor & Francis Group. 2010. 321. <https://doi.org/10.1201/b16655>
5. Verruijt A. (2001) *Soil Mechanics*. Delft, Delft University of Technology. 336 p.
6. Kandaurov I. I. (1966) *Mechanics of Grain Media and Its Application in Construction*. Moscow, Stroyizdat Publ. 319 (in Russian).
7. McDowell G. R., Bolton M. D. (2001) Micromechanics of Elastic Soil. *Soils and Foundations*, 41 (46), 147–152. [https://doi.org/10.3208/sandf.41.6\\_147](https://doi.org/10.3208/sandf.41.6_147)
8. Barsukov V. G., Krupich B. (2004) *Tribomechanics of Dispersed Materials. Technological Applications*. Grodno, Grodno State University. 260 (in Russian).
9. Adams M. J., Briscoe B. J., Pope L. (1987) A Contact Mechanics Approach to the Prediction of the Wall Friction of Powders. Briscoe B. J., Adams M. J. (eds.) *Tribology in Particulate Technology*. Bristol and Philadelphia, Adam Higler, 8–22.
10. Kendall K. (1987) Relevance of Contact Mechanics to Powders – Elasticity, Friction and Agglomerate Strength. Briscoe B. J., Adams M. J. (eds.) *Tribology in Particulate Technology*. Bristol and Philadelphia, Adam Higler, 110–111.
11. Webster M. N., Sayles R. S. (1986) A Numerical Model for Elastic Frictionless Contact of Real Rough Surfaces. *Trans. Journal of Tribology*, 108 (3), 314–320. <https://doi.org/10.1115/1.3261185>
12. Tüzün U. (1987) Effect of Consolidation and Yield History on the Measured Angles of Friction of Particulate Solids. Briscoe B. J., Adams M. J. (eds.) *Tribology in Particulate Technology*. Bristol and Philadelphia, Adam Higler, 38–62.
13. Krupich B., Barsukov V. G., Sviridenok A. I. (2019) Simulation of Microcontact Interactions during Gas-Abrasive Wearing of Steels with Allowance for Strain Hardening. *Journal of Friction and Wear*, 40 (6), 488–494. <https://doi.org/10.3103/s106836661906014x>
14. Krupicz B., Barsukov V. G., Ilkevich M. A. (2022) Simulation of Micro Contact Interactions in Sliding of Solid Particles along the Radial Blades of Turbo Machines. *Journal of Friction and Wear*, 43 (2), 95–101. <https://doi.org/10.3103/s1068366622020064>
15. Goldstein M. N. (1971) *Mechanical Properties of Soils*. Moscow, Stroyizdat Publ. 367 (in Russian).
16. Tkach A. V. (2025) Microcontact Interactions in an Array of Mineral Particles. *Novye Tekhnologii i Materialy, Avtomatizatsiya Proizvodstva (NTiMAP-2025): sb. st. [New Technologies and Materials, Automation of Production – NT&MAP-2025: Collection of articles]* Brest: Publishing House of Brest State Technical University, 353–356 (in Russian).
17. Potapov A. D., Platov N. A., Lebedeva M. D. (2009) *Sandy Soils*. Moscow, ASV Publ. 256 (in Russian).
18. Jonson K. L. (1985) *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. 414 (in Russian).
19. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveyev V. V. (1988) *Handbook of Strength of Materials*. 2<sup>nd</sup> ed. Kiev, Naukova Dumka Publ. 736 (in Russian).
20. Vinokurov E. F., Balykin M. K., Golubev I. A., Zayats V. N., Makaruk P. N. (1988) *Handbook on Strength of Materials*. Minsk, Nauka i Tekhnika Publ. 464 (in Russian).
21. Enokhovich A. S. (1990) *Physics Handbook*. Moscow, Prosveshchenie Publ. 384 (in Russian).
22. Lyubimov N. I., Nosenko L. I. (1978) *Handbook of Physical and Mechanical Parameters of Rocks in Ore Regions*. Moscow, Nedra Publ. 285 (in Russian).
23. Korsakov A. K. (2009) *Structural Geology*. Moscow, Publishing House “KDU”. 328 (in Russian).
24. Bowles J. E. (1996) *Foundation Analysis and Design*. 5<sup>th</sup> ed. New York, McGraw-Hill. 1241.

Received: 20.11.2025

Accepted: 27.01.2026

Published online: 31.03.2026