

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО  
ТВЕРДОГО ТЕЛА  
DEFORMATION  
IN SOLID MECHANICS

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-25-2-117-121>

УДК 539.3

## Численно-аналитический подход при решении контактных задач для упругих оснований сложного очертания

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

**Реферат.** Предлагается численное решение контактной задачи для штампа, расположенного на упругом основании в виде полуплоскости ломаного очертания. Определение контактных напряжений выполняется способом Б. Н. Жемочкина. Однако коэффициенты метода сил в разрешающих уравнениях смешанного метода определяются вариационно-разностным методом. С этой целью расчетная область упругого основания разбивается на прямоугольные ячейки разной площади и для каждой ячейки определяется энергия деформаций. Функционал полной энергии упругого основания и приложенной внешней нагрузки получается суммированием энергий деформаций каждой ячейки и работы внешних сил и является квадратичной функцией узловых перемещений расчетной области упругого основания. Дифференцирование функционала полной энергии по каждому из узловых перемещений позволяет сформировать систему линейных алгебраических уравнений, решением которой являются узловые перемещения. Для формирования матрицы перемещений центров участков способа Б. Н. Жемочкина внешняя единичная нагрузка задавалась в виде двух сил, приложенных к границе каждого из них. Это позволило получить симметричную относительно главной диагонали матрицу в уравнениях метода сил смешанного метода. Таким образом была сформирована система уравнений способа Б. Н. Жемочкина для расчета штампа, приложенного к границе полуплоскости, при его поступательном перемещении. После решения системы уравнений способа Б. Н. Жемочкина находились усилия в связях на контакте штампа и упругого основания, линейное перемещение штампа. Это позволило определить распределение контактных напряжений и положение внешней силы, вызывающей поступательное перемещение штампа.

**Ключевые слова:** контактные напряжения, штамп, упругое основание, способ Б. Н. Жемочкина

**Для цитирования:** Босаков, С. В. Численно-аналитический подход при решении контактных задач для упругих оснований сложного очертания / С. В. Босаков // *Наука и техника*. 2025. Т. 25, № 2. С. 117–121. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-25-2-117-121>

## Numerical-Analytical Approach to Solving Contact Problems for Elastic Foundations of Complex Shapes

S. V. Bosakov<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** A numerical solution is proposed for a contact problem for a stamp located on an elastic foundation in the form of a half-plane with a broken shape. Contact stresses are determined using B. N. Zhemochkin's method. However, the coefficients of the force method in the resolving equations of the mixed method are determined using a variational-difference

---

**Адрес для переписки**

Босаков Сергей Викторович  
Белорусский национальный технический университет  
просп. Независимости, 65,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 293-93-04  
vm3\_ftk@bntu.by

---

**Address for correspondence**

Bosakov Siarhei V.  
Belarusian National Technical University  
65, Nezavisimosty Ave.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 293-93-04  
vm3\_ftk@bntu.by

method. For this purpose, the computational domain of the elastic foundation is divided into rectangular cells of varying areas and the strain energy is determined for each cell. The functional of the total energy of the elastic foundation and the applied external load is obtained by summing the strain energies of each cell and the work of external forces and is a quadratic function of the nodal displacements of the computational domain of the elastic foundation. Differentiating the total energy functional with respect to each nodal displacement allows us to form a system of linear algebraic equations whose solutions are the nodal displacements. To form the displacement matrix of the section centers using B. N. Zhemochkin's method, the external unit load was specified as two forces applied to the boundary of each section. This allowed us to obtain a matrix symmetrical with respect to the main diagonal in the equations of the mixed method of forces. Thus, a system of equations was formed for the method of B. N. Zhemochkin for calculating a stamp applied to the boundary of a half-plane during its translational movement. After solving the system of equations of B. N. Zhemochkin's method, the forces in the contact constraints between the stamp and the elastic foundation and the linear displacement of the stamp, were found. This allowed us to determine the distribution of contact stresses and the position of the external force causing the translational movement of the stamp.

**Keywords:** contact stresses, stamp, elastic foundation, B. N. Zhemochkin's method

**For citation:** Bosakov S. V. (2026) Numerical-Analytical Approach to Solving Contact Problems for Elastic Foundations of Complex Shapes. *Science and Technique*. 25 (2), 117–121 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-25-2-117-121>

### Введение

Как известно [1], способ Б. Н. Жемочкина контактную задачу расчета балки на упругом основании сводит к расчету статически неопределимой балки на упруго-податливых опорах, которая решается смешанным методом строительной механики [2]. Коэффициенты при неизвестных методах сил разрешающих уравнений способа Б. Н. Жемочкина зависят от деформаций изгиба балки с введенным защемлением и перемещений упругого основания. Для упругих оснований в виде упругих полуплоскости, полосы, клина и других задача определения перемещений не вызывает затруднений [3, 4]. Однако при определении перемещений упругого основания сложной формы или ломаного очертания от действия единичной силы, равномерно распределенной по участку Б. Н. Жемочкина, возникают серьезные математические трудности. Ниже предлагается определять перемещения границы упругого основания от действия единичной силы вариационно-разностным методом [5]. Это позволяет сформировать си-

стему уравнений способа Б. Н. Жемочкина и решить поставленную задачу.

### Теоретическая часть

Рассмотрим конечно-разностные формулы [6] для нахождения линейных и угловых деформаций в центре прямоугольной ячейки (рис. 1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} + \frac{u_4 - u_3}{\Delta x} \right); \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_3 - v_1}{\Delta y} + \frac{v_4 - v_2}{\Delta y} \right); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_3 - u_1}{\Delta y} + \frac{u_4 - u_2}{\Delta y} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{v_2 - v_1}{\Delta x} + \frac{v_4 - v_3}{\Delta x} \right), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  – линейные перемещения узлов прямоугольной ячейки в направлении осей координат (рис. 1).

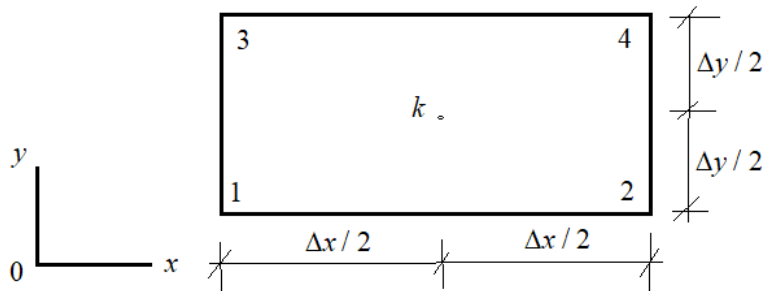


Рис. 1. К определению деформаций в прямоугольной ячейке  
Fig. 1. To determine deformations in a rectangular cell

Энергия деформаций в ячейке определяется следующим образом [7, 8]:

$$\Phi_k = \Delta x \Delta y \left[ \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + \frac{G}{2} \gamma_{xy}^2 \right];$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$
(2)

где  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона упругого основания.

Энергия деформации всего упругого основания находится суммированием (2) по всем ячейкам сетки, разбитой на основании. Для полной потенциальной энергии основания и действующей на основание внешней нагрузки нужно к сумме (2) добавить работу внешних сил на перемещениях упругого основания, взятую с отрицательным знаком [9].

**Пример расчета.** Рассмотрим задачу о давлении вертикального штампа на границу ломаной полуплоскости (рис. 2).

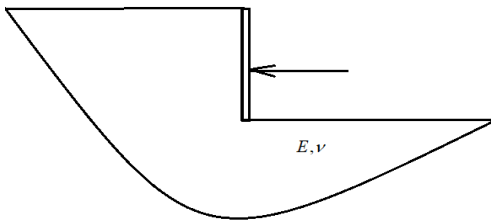


Рис. 2. Давление штампа на границу полуплоскости ломаного очертания

Fig. 2. Stamp pressure on the boundary of a half-plane of a broken outline

Принятая разбивка расчетной области на элементарные прямоугольные ячейки приведена на рис. 3. На границе расчетной области горизонтальные и вертикальные перемещения приравнивались нулю.

Из рис. 3 видно, что контактная зона штампа разбивалась на шесть участков способа Б. Н. Жемочкина. Для каждой ячейки по (2) определялась энергия деформации и суммировалась для ячеек всей расчетной области. Внешняя нагрузка в виде двух сил по 1/2 прикладывалась к соседним узлам каждого из шести участков способа Б. Н. Жемочкина на контактной площади штампа. Таким образом был получен функционал полной потенциальной энергии упругого основания и действующей на основание внешней нагрузки. Полученный функционал дифференцировался по каждому из узловых перемещений принятой расчетной области, и производная приравнивалась нулю. Образованная система линейных алгебраических уравнений решалась, и находились перемещения узлов расчетной области. На рис. 4 показаны полученные таким образом графики горизонтальных перемещений центров шести участков способа Б. Н. Жемочкина при длине штампа 6 м и коэффициенте Пуассона упругого основания 0,35 от действия суммарной единичной горизонтальной силы.

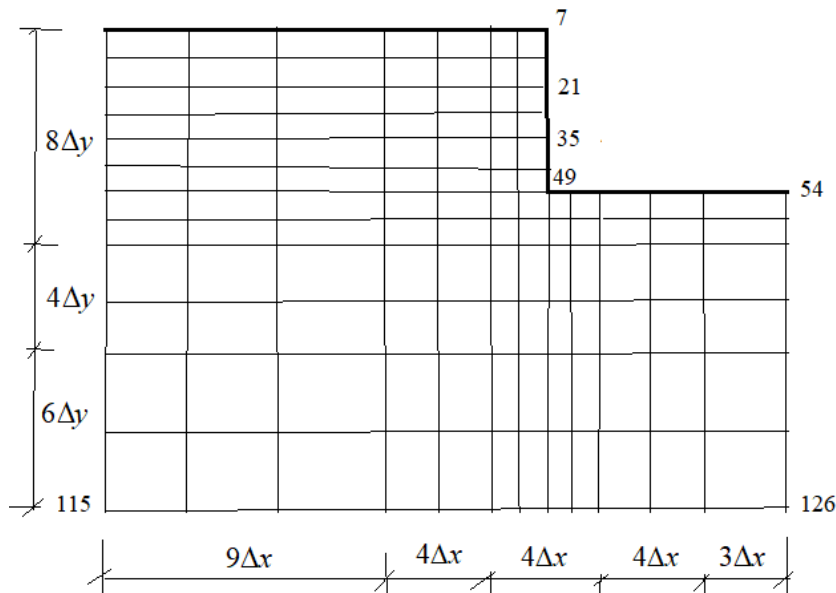


Рис. 3. Принятая сетка на расчетной области упругого основания

Fig. 3. Adopted grid on the calculation domain of the elastic foundation

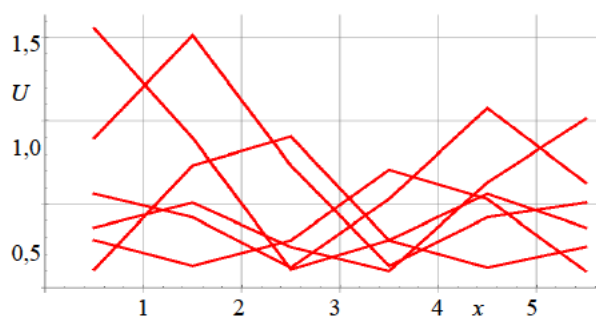


Рис. 4. Графики горизонтальных перемещений середины шести участков способа Б. Н. Жемочкина

Fig. 4. Graphs of horizontal displacements of the centers of six sections of the B. N. Zhemochkin method

Таким образом была сформирована матрица перемещений (табл. 1).

Таблица 1

1,5531	0,8966	0,1090	0,2851	0,5627	0,3610
0,8966	1,5113	0,7325	0,1304	0,4219	0,5093
0,1090	0,7325	0,9050	0,2835	0,1198	0,2441
0,2851	0,1304	0,2835	0,7066	0,5314	0,0991
0,5627	0,4219	0,1198	0,5314	1,0762	0,6298
0,3610	0,5093	0,2441	0,0991	0,6298	1,0112

Рассмотрим поступательное перемещение штампа. Данные табл. 1 позволяют сформировать систему уравнений смешанного метода для определения контактных напряжений и перемещения штампа. На рис. 5 приведена эпюра контактных напряжений под штампом при его поступательном перемещении. Расстояние от узла 7 (рис. 3) до точки приложения горизонтальной силы 3,46 м. Отметим появление зон растягивающих напряжений в зоне контакта штампа и упругого основания.

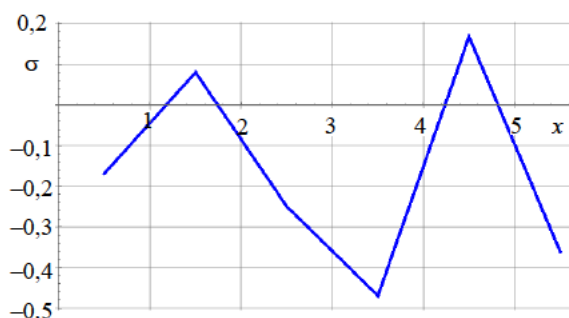


Рис. 5. Распределение контактных напряжений под штампом при его поступательном перемещении при действии единичной силы

Fig. 5. Distribution of contact stresses under a stamp during its translational movement under the action of a single force

Указанный подход ранее был реализован при решении контактной задачи для фундаментной балки [10], расположенной на дне котлована (рис. 6).

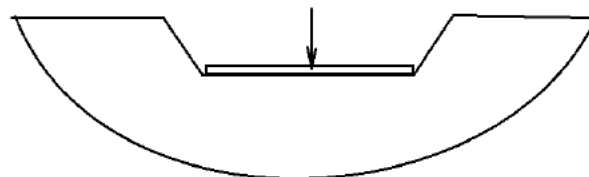


Рис. 6. Фундаментная балка на дне котлована

Fig. 6. Foundation beam at the bottom of the pit

### ВЫВОДЫ

1. Совместное применение вариационно-разностного метода и способа Б. Н. Жемочкина позволяет численно решать контактные задачи для упругих оснований любого очертания.

2. При расчете балки конечной изгибной жесткости в системе уравнений способа Б. Н. Жемочкина в коэффициенты при неизвестных усилиях в связях между балкой и основанием необходимо добавить слагаемые, учитывающие деформации изгиба в основной системе смешанного метода.

3. Предлагаемый подход несложно обобщить для расчета конструкций в условиях пространственной контактной задачи в прямоугольной и цилиндрической системах координат. Однако при этом значительно возрастает размерность решаемых задач.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. М.: Госстройиздат, 1962. 239 с.
2. Рабинович, И. М. Курс строительной механики стержневых систем. Часть II: Статически неопределимые системы / И. М. Рабинович. М.: Стройиздат, 1954. 544 с.
3. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
4. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Справочник по теории упругости (для инженеров строителей) / А. Ф. Рябов, П. М. Варвак, В.Д. Шевченко.

- ко [и др.]; ред. П. М. Варвак, А. Ф. Рябов. Киев: Наук. думка, 1971. 412 с.
6. Коллатц, Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений / Л. Коллатц. М.: Иностранная лит., 1953. 459 с.
  7. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1975. 576 с.
  8. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности. / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.
  9. Михлин, С. Г. Прямые методы в математической физике / С. Г. Михлин. М.: Гостехиздат, 1950. 428 с.
  10. Босаков, С. В. Совместное применение вариационно-разностного метода и способа Б. Н. Жемочкина при решении контактных задач для упругих оснований сложного очертания / С. В. Босаков // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 6 (299). С. 2–6. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.6.2.6>
- Поступила 12.12.2025  
Подписана в печать 17.02.2026  
Опубликована онлайн 31.03.2026

## REFERENCES

1. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculating Foundation Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Gosstroyizdat Publ. 239 (in Russian).
2. Rabinovich I. M. (1954) *Course in Structural Mechanics. Part II. Statically Indeterminate Systems*. Moscow, Stroyizdat Publ. 544 (in Russian).

3. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on an Elastic Foundation*. Moscow, Stroyizdat Publ. 679 (in Russian).
4. Vorovich I. I., Aleksandrov V. M., Babeshko V. A. (1974) *Non-Classical Mixed Problems of Elasticity Theory*. Moscow, Nauka Publ. 456 (in Russian).
5. Ryabov A. F., Varvak P. M., Shevchenko V. D., Piskunov V. G., Abovskii N. P., Petrov Yu. P., Maslennikov A. M., Lisitsin B. M., Dubinskii A. M., Dekhtyar' A. S. (1971) *Handbook of Elasticity Theory (for Civil Engineers)*. Kiev, Naukova Dumka Publ. 412 (in Russian).
6. Collatz L. (1960) *The Numerical Treatment of Differential Equations*. Springer Berlin, Heidelberg. 568. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05500-7>
7. Timoshenko S.P., Goodier J. (1975) *Elasticity Theory*. Moscow, Nauka Publ. 576 (in Russian).
8. Aleksandrov A. V., Potapov V. D. (1990) *Fundamentals of Elasticity and Plasticity Theory*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400. (in Russian).
9. Mikhlin S. G. (1950) *Direct Methods in Mathematical Physics*. Moscow, Gostekhizdat Publ. 428 (in Russian).
10. Bosakov S. V. (2021) Combined Application of the Variational-Difference Method and the Method of B.N. Zhemochkin in Solving Contact Problems for Elastic Foundations of Complex Shape. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (6), 2–6 (in Russian). <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.6.2.6>

Received: 12.12.2025

Accepted: 17.02.2026

Published online: 31.03.2026