

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ КАК ИНСТРУМЕНТ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ АВТОМАТИЗАЦИИ

Трутнева А. С., студент

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Научный руководитель: ассистент Скуратова Д. А.

Аннотация. Рассматривается применение последовательного критерия отношения правдоподобия (SPRT, Вальд, 1947) для сокращения среднего объема выборки (Average Sample Number, ASN) при статистическом контроле качества в энергетике. На примере биномиальной модели брака фотоэлектрических элементов показано, как ASN зависит от: расстояния между гипотезами $|p_1 - p_0|$, допустимых ошибок I и II рода (α, β), и наличия пространственной/временной корреляции. Предложена двухэтапная модификация SPRT для коррелированных данных. Результаты подтверждают: SPRT минимизирует ASN при фиксированных α, β и обеспечивает до 50 % экономии ресурсов по сравнению с фиксированными планами.

Постановка задачи.

Пусть контроль качества партии элементов (например, фотоэлектрических модулей) сводится к проверке двух простых гипотез о доле брака p :

$$H_0: p = p_0 = 0,05, H_1: p = p_1 = 0,10,$$

с уровнями ошибок:

$$\alpha = P(\text{отклонить } H_0 | H_0) = 0,05, \beta = P(\text{принять } H_0 | H_1) = 0,01.$$

Цель – минимизировать ожидаемое число наблюдений ANS, необходимое для принятия решения.

Метод: SPRT-Вальда.

Пусть $x_i \in \{0,1\}$ – индикатор брака i -го элемента, $f(x_i|p) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$. После n наблюдений логарифм отношения правдоподобия:

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(x_i|p_1)}{f(x_i|p_0)} = n \ln \frac{p_1}{p_0} + S_n \ln \frac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)},$$

где $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$.

Решение принимается по правилу:

$$\begin{cases} \lambda_n \leq A \Rightarrow \text{принять } H_0, \\ \lambda_n \geq B \Rightarrow \text{принять } H_1, \\ A < \lambda_n < B \Rightarrow \text{продолжить,} \end{cases}$$

где границы по Вальду-АПП (с допущением $\alpha, \beta \ll 1$):

$$A \approx \ln \left(\frac{\beta}{1-\alpha} \right), \quad B \approx \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right).$$

Для приведенных параметров:

$$A \approx \ln\left(\frac{0,10}{0,95}\right) \approx -2.25, B \approx \ln\left(\frac{0,90}{0,05}\right) \approx 2.89.$$

Анализ ASN.

Точное выражение для $ASN(p)$ при биномиальных данных [3]:

$$ASN(p) = \mathbb{E}_p[T] \approx \frac{(1 - \alpha) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + \alpha \ln \frac{\beta}{1 - \alpha}}{D(p||p_0)} \quad \text{при } p = p_0,$$

где $D(p||q) = p \ln \frac{p}{q} + (1 - p) \ln \frac{1-p}{1-q}$ – дивергенция Кульбака–Лейблера.

При $(p = p_0 = 0.05)$: $(D(p_0||p_1) \approx 0.0063) \rightarrow (ASN(p_0) \approx 26)$. Для фиксированного плана Неймана–Пирсона с теми же α, β требуется $n \approx 54$ [2]. Экономия – до 52 %.

Выводы.

1. SPRT Вальда минимизирует ASN при фиксированных α, β и обеспечивает экономию до 50 % по сравнению с планами фиксированного объема.

2. Эффективность метода возрастает с увеличением различимости гипотез $|p_1 - p_0|$ и при адекватном выборе α, β на основе экономико-статистического баланса затрат/риск.

3. Для коррелированных данных необходима предварительная оценка зависимости и переход к независимым кластерам.

4. Внедрение SPRT в энергетике (контроль солнечных панелей, топливных элементов, ветрогенераторов) позволяет сократить время и стоимость испытаний, ускорить принятие решений и повысить рентабельность.

Список использованных источников

1. Вальд, А. Последовательный статистический анализ / А. Вальд. – М. : Наука, 1964. – 380 с.
2. Харин, А. Ю. Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез / А. Ю. Харин // Вестник Бел. гос. ун-та. – Сер. 1: физ., мат., инф. – 2002. – № 1. – С. 92–96.
3. Харин, А. Ю. Робастность байесовских и последовательных статистических решающих правил / А. Ю. Харин. – Мн. : БГУ, 2013. – 207 с.
4. Ширяев, А. Н. Статистический последовательный анализ / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1976. – 272 с.
5. Handbook on sequential analysis / eds.: B. Ghosh, P. K. Sen. – New York : Marcel Dekker, 1991. – 820 p.