УДК 658.512.22.011.56

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Напрасников В.В.[1], Бородуля А.В.[1], Полозков Ю.В.[1], Соловьев А Н.[2]

1) Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь;
2) Крымский федеральный университет
Симферополь, Российская Федерация.

Целью настоящей работы является создание программной реализации одного из способов учета кинематических граничных условий при решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая возникает в задаче расчета конструкций методом конечных элементов в случае статических нагружений и тестирование соответствующей процедуры.

Для тестирования используем пример стержня, подверженного растяжению – сжатию, конечно-элементная схема которого представлена на рисунке 1. В схему включены два конечных элемента и три узла (узлы на рисунке отображены черными кружками и расположены на концах конечных элементов).

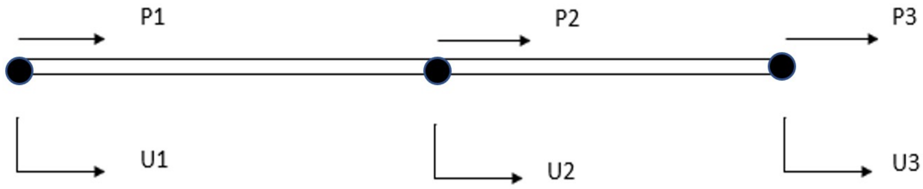

Рисунок 1. Расчетная конечно-элементная схема

В схеме присутствуют три степени свободы, перемещения по которым обозначены как U_1, U_2, U_3, а приложенные по этим степеням свободы силы обозначены как P_1, P_2, P_3. Стрелками указаны положительные направления для этих величин.

Тогда при упрощенных предположениях результирующая СЛАУ, полученная после рассылки компонентов матриц жесткостей отдельных элементов на соответствующие места в глобальную матицу жесткостей, будет иметь вид

$$K\vec{U} = \vec{U}, \text{ где } K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}, \ \vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что определитель матрицы левой части СЛАУ равен нулю $\det(K) = 0$. Это означает, что пока конструкция не закреплена она может перемещаться как жесткое целое под действием внешних нагрузок.

На рисунке 2 представлен вид программной реализации процедуры этого метода в среде MATHCAD.

$$ORIGIN := 1$$

Способ аппроксимации учета граничных условий

$$\mathrm{boundCond3}(A,B,ind,val) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\mathrm{rows}(ind) \\ \quad \left| \begin{array}{l} A_{ind_i, ind_i} \leftarrow A_{ind_i, ind_i} \cdot 10^6 \\ B_{(ind_i)} \leftarrow A_{ind_i, ind_i} \cdot val_i \end{array} \right. \\ \mathrm{lsolve}(A,B) \end{array} \right.$$

Рисунок 2. Программная реализация метода в среде MATHCAD.

Рассмотрим в качестве тестов три случая, когда некоторые компоненты вектора перемещений заданы, что соответствует закреплению конструкции, и при этом известны компоненты вектора нагрузок, которые подберем так, чтобы можно было предвидеть перемещения узлов по соответствующим степеням свободы.

Случай 1. $U_3 = -1$ $\quad P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \quad P_3 = 0$

В этом случае в решении значения оставшихся переменных должны быть $U_1 = -1$, $\quad U_2 = -1$.

Результаты тестирования представлены на рисунке 3.

Исходная матрица коэффициенов СЛАУ
из МКЭ старжни 2 элемента
растяжение-сжатие

Вектор правой
части

$$K := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |K| = 0 \qquad P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Индексы известных переменных U_i $\quad$ Известные значения переменных U_i

$$ind := (3) \qquad val := (-1)$$

$$U := \mathrm{boundCond3}(K,P,ind,val) \qquad U = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad K \cdot U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3. Результаты тестирования для случая 1.

Случай 2. $U_2 = 0$ $\quad P_1 = -1 \quad P_2 = 0 \quad P_3 = 1$

В этом случае в решении значения оставшихся переменных должны быть

$U_1 = -1$, $U_3 = 1$.

Результаты тестирования представлены на рисунке 4.

Исходная матрица коэффициенов СЛАУ из МКЭ старжни 2 элемента растяжение-сжатие

Вектор правой части

$$K := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |K| = 0 \qquad P := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Индексы известных переменных U_i

Известные значения переменных U_i

$$ind := (2) \qquad val := (0)$$

$$U := boundCond3(K, P, ind, val) \qquad U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad K \cdot U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 4. Результаты тестирования для случая 2.

Случай 4. $U_1 = 0$ $\quad P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \quad P_3 = 1$

В этом случае в решении значения оставшихся переменных должны быть

$U_2 = 1$, $U_3 = 2$.

Результаты тестирования представлены на рисунке 5.

Исходная матрица коэффициенов СЛАУ из МКЭ старжни 2 элемента растяжение-сжатие

Вектор правой части

$$K := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |K| = 0 \qquad P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Индексы известных переменных U_i

Известные значения переменных U_i

$$ind := (1) \qquad val := (0)$$

$$U := boundCond3(K, P, ind, val) \qquad U = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{-6} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad K \cdot U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 5. Результаты тестирования для случая 3.

Вывод. Во всех случаях численные решения соответствуют ожидаемым результатам, что дает уверенность в адекватности реализации метода.