

Министерство высшего и среднего специального образования БССР

**БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

На правах рукописи

Инженер В.Я.Рубенчик

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ У ОСНОВАНИЯ ЗУБЬЕВ
(05-161. "Машиноведение и детали машин")
Диссертация написана на русском языке**

**А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук**

М и н с к — 1971

Работа выполнена на кафедре "Теоретическая механика" Белорусского ордена Трудового Красного Знамени политехнического института и в ОГК Минского ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции тракторного завода.

Научный руководитель - доктор технических наук,
профессор Г.К.Татур.

Официальные оппоненты: доктор технических наук,
профессор В.Г.Устинович;
кандидат технических наук,
доцент А.Ф.Анищенко.

Будущее предприятие - Всесоюзный научно-исследовательский институт по нормализации в машиностроении (ВНИИНАШ), г.Москва.

Автореферат разослан "1" декабрь 1971 г.

Защита диссертации состоится " " _____ 197 г.
на заседании Объединенного Совета по присуждению ученых степеней по механико-технологическим, машиностроительным и торфяным специальностям при Белорусском ордена Трудового Красного Знамени политехническом институте.

Отзывы (в 2-х экземплярах) просим направлять по адресу: г.Минск-27, Ленинский проспект, 65, Белорусский политехнический институт. Ученому секретарю Совета.

Дата защиты будет объявлена в газете "Вечерний Минск".

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке БПИ.

Ученый секретарь Совета,
кандидат технических наук, доцент

Н.В.КИСЛОВ

В В Е Д Е Н И Е

В директивах XXIV съезда КПСС указывается на необходимость повышения производительности труда за счет увеличения единичной мощности агрегатов. Ставятся серьезные задачи по экономии материалов.

Проектирование новых мощных машин при минимальном их весе требует весьма точного определения напряжений в деталях и элементах конструкций. Актуальными являются расчеты в упругой зоне, поскольку большинство поломок связано с усталостными явлениями.

Зубчатые передачи принадлежат к числу наиболее ответственных элементов машин, и развитие методов их расчета связано с работами А.И.Петрусевича, В.И.Кудрявцева, И.С.Цитовича, В.Д.Устиненко, К.И.Заблонского, Я.Г.Кистьяна, Г.И.Скундина, И.Н.Френкеля и многих других.

Основная тема настоящей работы — расчет напряжений при изгибе зубьев (плоский случай), причем исследования охватывают как приближенный подход с привлечением некоторых допущений, так и строгий расчет методом теории упругости. Методы теории упругости сложны, и впредь до полного их освоения (например, в виде стандартных программ для ЭЦВМ) приближенные методы не теряют актуальности.

Предлагаемый в работе приближенный расчет зубьев восходит к работам А.В.Верховского, В.Д.Андожского и др., а именно к разработанному ими методу ломаных сечений, широко применяемому, но недостаточно точному. Этот метод связан, в основном, с двумя допущениями: неискривление прямых нормалей к контуру зуба (плоские участки ломаных сечений) и равенство нулю нормальных напряжений на наклонных площадках в точке пересечения с осью зуба. Последнее допущение нарушает условия равновесия (автором был выполнен специальный эксперимент для иллюстрации сказанного), и построение статически уравновешенной системы напряжений составило первоочередную задачу исследования (§§ 8, II).

Гипотеза о неискривлении плоских участков ломаных сечений принимается к аналогичным гипотезам в теории стержней, прямых и кри-

вых. Попытки обобщений привели к энергетической интерпретации этих гипотез и, далее, к энергетическому построению основных технических теорий расчета упругих элементов. Соответствующие материалы в силу их общего характера вынесены во вводную главу (§ 1). Ряд частных примеров, имеющих косвенное отношение к основной теме рассмотрен в главе 2 (§§ 3+6). Энергетический подход оказался весьма плодотворным как по части формализации расчетов (теорема о минимуме, - § 1), так и по части поиска уточнений в необходимых случаях, в том числе и для зубьев (§ 12). В развитом виде (применение теории изопериметрических задач) используемый способ расчетов примыкает к общим вариационным методам.

Простейший расчет зубьев, рекомендуемый в работе (§ 15), связан с предположением об опасной точке (§ 13) и гиперболическим законом распределения напряжений (§ 9), который свойственен также методу ломаных сечений. Необходимые геометрические расчеты пояснены в § 10.

Что касается строгого расчета напряжений в зубьях, то здесь известны работы В.Л.Устиненко, А.Г.Угодчикова и А.М.Кузнецова, Г.Нейбера, Т.Аида и И.Тераути. Использовался метод конформного отображения, созданный Г.В.Колосовым и Н.И.Мусхелишвили. Этот метод сводит задачу теории упругости для плоской области к более общей задаче отыскания функции комплексной переменной, осуществляющей конформное преобразование стандартной области в виде круга или полуплоскости в заданную.

В работах В.Л.Устиненко применялась отображающая функция некоторого специального вида, и ее коэффициенты определялись путем подбора. В работах А.Г.Угодчикова и А.М.Кузнецова отображающая функция искалась в общем виде с помощью электромоделирования на токопроводящей бумаге и тригонометрической интерполяции на ЭЦВМ.

В настоящей работе (§ 16) разработан способ и освоены вычисления на ЭЦВМ коэффициентов отображающей функции в форме В.Л.Устиненко. Помимо самостоятельного значения, эта часть работы позволяет получить материалы для оценки отдельных допущений приближенного метода. В § 17 решена по методу конформного отображения одна специальная задача - расчет зуба на растянутом основании.

Экспериментальная часть работы, выполненная поляризационно-оптическим методом, касалась общей постановки задачи об изгибе зуба. Выяснялся вопрос о возможности построения расчетов напряжений в зубьях без учета тех или других условий на достаточно большой

глубине под зубом (§ 7).

В приложении представлен материал, касающийся задачи о кручении применительно к зубчатому (шлицевому) валу. Для этой задачи известно применение метода конформного отображения, а также метода сеток (конечных разностей). В работе составлено интегральное уравнение Фредгольма относительно напряжений у поверхности, численное решение которого не представило затруднений. По мнению автора, метод уравнений Фредгольма является наиболее соответствующим целям технических расчетов и современному состоянию вычислительной техники. В этой связи уместно отметить, что для плоской задачи теории упругости также известны способы перехода к уравнениям Фредгольма (минуя конформное отображение), и, по мнению академика Н.И. Мусхелишвили, они являются перспективными для численных расчетов.

Г Л А В А I

ОБЩИЙ ОБЗОР и ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

§ I. Энергетическое представление основных теорий расчета упругих элементов

В вариационном энергетическом методе теории упругости используется принцип минимума потенциальной энергии деформации на возможных без нарушения условий равновесия вариациях напряженного состояния (принцип Кастильяно). Последний имеет силу для случаев, когда на поверхности упругой детали заданы нагрузки, но не перемещения. В том числе на некоторых участках, на которых предполагается соединение с абсолютно жесткими соседними деталями, нагрузка может быть задана интегрально.

В реферируемой работе для построения технических теорий расчета упругих элементов вводятся гипотезы (вместо гипотез о неискривлении), упрощающие принцип Кастильяно, а именно минимизируется лишь часть потенциальной энергии, связанная с определенными видами напряжений.

Для построения расчетов в простейших случаях используется специально доказываемая теорема о минимуме, согласно которой минимум квадратичного функционала

$$W = \int_S F(s) \sigma^2 ds, \quad F(s) \geq 0,$$

при условиях вида

$$\int_S f_i(s) \sigma ds = A_i, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa. \quad (I)$$

достигается функцией

$$\sigma = \frac{1}{F(s)} \sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i f_i(s),$$

коэффициенты λ_i которой определяются условиями (I).

Чтобы построить элементарный расчет стержней, достаточно написать условия равновесия по осевой силе и изгибающим моментам в двух плоскостях:

$$\int_S \sigma ds = P, \quad \int_S z \sigma ds = M_y, \quad \int_S y \sigma ds = M_z. \quad (2)$$

и, минимизируя энергию лишь нормальных напряжений на площадках поперечных сечений (допущение), т.е. $W = \frac{dx}{2E} \int \sigma^2 ds$, получить на основании теоремы о минимуме:

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y.$$

При соответствующем выборе положения координатных осей, т.е. при ортогонализации, решение представляется в традиционной форме.

Степенная деформация тонкостенных стержней (без учета чистого кручения) рассматривается по той же схеме и при том же допущении. К трем условиям равновесия (2) добавляется четвертое — по бимоменту

$$\int \omega \sigma ds = x M_x,$$

где ω — секториальная координата, и решение устанавливается в форме

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 z + \lambda_3 y + \lambda_4 \omega.$$

С помощью дальнейшей ортогонализации может быть построена известная теория. Для относительно длинных стержней уместным может оказаться учет чистого кручения, выполняемый по известной схеме, а для относительно коротких степенных стержней уточнение следует искать прежде всего путем учета энергии секториальных касательных напряжений τ . Такое уточнение оказывается возможным при допущении об идентичности распределения напряжений τ во всех поперечных сечениях стержня. Дело сводится к минимизации функционала следующего вида

$$W = \int_{S_1}^{S_2} (\varphi'^2 + K^2 \tau^2) ds,$$

где $K = \frac{1}{r} \sqrt{6(1+\mu)}$, l — длина стержня, μ — коэф. Пуассона, при условии

$$\varphi(S_1) = \varphi(S_2) = 0, \int_{S_1}^{S_2} r \tau ds = M_x, \int_{S_1}^{S_2} \tau \cos \alpha ds = P_y, \int_{S_1}^{S_2} \tau \sin \alpha ds = P_z,$$

где r — полярный радиус, α — угол наклона контура к оси y (толщине профиля положена равной единице).

Составленная задача суть вариационная изопериметрическая, она сводится к дифференциальному уравнению

$$-\varphi'' + K^2 \tau = \lambda_1 r + \lambda_2 \cos \alpha + \lambda_3 \sin \alpha,$$

решение которого не представляет затруднений.

Теория пластинок в энергетической интерпретации строится общими вариационными методами на основе следующих допущений:

- принимается линейный закон изменения напряжений $\sigma_x, \sigma_y,$
 τ_{xy} по координате Z (по толщине пластинки),
- минимизируется энергия только этих напряжений.

§ 2. Методы расчета напряжений в зубьях

Кроме упомянутых во вводной части реферата, рассматриваются также методы, основанные на эмпирических формулах, метод цилиндрических сечений (А.В.Верховский и др.) и расчеты в биполярных координатах (В.Б.Проскураков).

Г Л А В А П

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ РАСЧЕТА УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Примеры, приведенные ниже, иллюстрируют применение теоремы о минимуме и теории изопериметрических задач. Поскольку метод, примененный к приближенному расчету зубьев, не обеспечивает оценку точности собственными средствами, он должен быть сначала проверен на простых примерах. Подобраны примеры, наиболее близкие к основной теме.

Для неплоских задач расчета зубьев перспективным представляется вариационный энергетический подход применительно к консольной плите, заменяющей зуб. Простейшая из таких задач рассмотрена в § 6.

§ 3. Распределение нагрузки в шлицевом соединении

Задача рассмотрена при следующих допущениях:

- сопрягаемые детали считаются массивными и жесткими, так что объемными деформациями можно пренебречь по сравнению с деформациями в стыке,
- принимается линейная связь между давлениями и перемещениями в стыке,
- не учитываются силы трения,
- геометрия соединения считается абсолютно точной.

Такая постановка задачи известна (Е.Г.Глухарев и др.). Энергетический подход, а также замена сумм по шлицам интегралами по схеме

$$\sum_{i=1}^n f_i \approx \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\varphi,$$

позволяет значительно сократить выкладки и представить результат в простой форме. Составляются интегральные условия равновесия и выражение для потенциальной энергии, накапливаемой в стыке, после чего применяется теорема о минимуме, и погонная нагрузка вдоль шлицев находится в виде

$$q = \frac{1}{\pi l} \left(\frac{M_x}{r} + 2P_y \sin \varphi + 2P_z \cos \varphi + 24 \frac{M_z}{l^2} x \sin \varphi + 24 \frac{M_y}{l^2} x \cos \varphi \right),$$

где n - число шлицев, l - их длина, r - средний радиус, φ - полярный угол, x - координата вдоль оси от середины соединения, P_y, P_z - поперечные силы, M_y, M_z - перекашивающие моменты в двух плоскостях, M_x - крутящий момент.

Расчет справедлив, если нагрузка такова, что $q \geq 0$.

Решение составлено совместно с Г.Ф. Бутусовым, получило экспериментальное подтверждение и дальнейшее применение в его работе.

§ 4. Стесненный изгиб прямых и круговых плоских брусьев

Представление зуба шестерни как простой консольной балки с использованием элементарной формулы свойственно ряду эмпирических систем расчета. Здесь рассматривается возможность заранее учесть влияние длины консоли (вычислять номинальные напряжения с учетом этого фактора). Для прямого бруса, заделанного одним концом и нагруженного поперечной силой на другом конце, принято в качестве допущения, что касательные напряжения не меняются от сечения к сечению, либо, на равных правах, что волокна не давят друг на друга. Минимизация потенциальной энергии приводит к изопериметрической задаче, сходной с рассмотренной выше для тонкостенных стержней. Решение для нормальных напряжений представляется в виде:

$$\sigma = \frac{P x k^2 \operatorname{sh} k y}{2(k\alpha \operatorname{ch} k\alpha - \operatorname{sh} k\alpha)},$$

где $k = \frac{1}{l} \sqrt{6(1+\mu)}$, l - длина консоли, α - половина ширины, x - плечо действия силы P .

В связи с принятым допущением решение является приближенным, оно не удовлетворяет уравнению неразрывности. При малой длине консоли ($\frac{l}{2\alpha} < 2$) решение для напряжений заметно стлчается от эле-

ментарного. Прогобы различаются незначительно.

Плоская задача для кругового бруса может быть разложена на две: изгиб моментом (чистый изгиб) и деформацию силой, проходящей через центр кривизны. Нагрузки в торцовых сечениях бруса считаются заданными интегрально, т.е. задачи не являются математически определенными. Минимизация потенциальной энергии при этом соответствует стеснению депланации торцовых сечений.

При рассмотрении чистого изгиба было получено известное решение теории упругости, причем отмечено, что решение действительно также для стержня переменной кривизны. В случае деформации силой кругового бруса известное решение теории упругости, которое характеризуется подобием распределения напряжений в радиальных сечениях, не было подтверждено вариационным выводом. Полученное приближенное решение задачи о стесненной деформации отличается от решения теории упругости на величину до 14% (при имеющих практический смысл соотношениях размеров) для максимальных напряжений, причем отклонение в плюс. Этот результат используется для оценок в § 9 работы.

§ 5. Задачи для конуса и плоского клина

Рассмотрено кручение конуса. Известное решение теории упругости получается весьма просто при использовании теоремы о минимуме.

Решения задач о деформации клина, нагруженного в вершине, приведены И. В. Коровичинским для оценки напряжений и И. Н. Френкелем для определения жесткости зубьев.

Однако задачи для бесконечного клина с острием не являются математически определенными. Без нарушения уравнений и условий задачи к любому решению могут быть добавлены некоторые дополнительные решения, интегрально сводящиеся к нулю. Определенность возможна только для усеченного клина при известном распределении нагрузки по его основаниям.

Приближенное рассмотрение стесненной деформации клина на основе допущения о подобии распределения напряжений в цилиндрических сечениях приводит к решениям, не зависящим от радиальных размеров клина. При нагружении клина силой в вершине задача решается с помощью теоремы о минимуме, и результат совпадает с известным.

Данное обстоятельство имеет место при нагружении клина моментом. Минимизация потенциальной энергии с помощью теории изопери-

метрических задач приводит к следующему результату для нормальных напряжений в цилиндрических сечениях:

$$\sigma_r = \frac{M \kappa^2 \sin \kappa \theta}{2r^2 (\kappa \alpha \operatorname{ch} \kappa \alpha - \operatorname{sh} \kappa \alpha)}, \quad (3)$$

где $\kappa = \sqrt{2(1+\mu)}$, M - изгибающий момент, α - половина угла при вершине клина, θ - угол от оси клина, r - расстояние от вершины.

Простейшее решение теории упругости существенно отличается от (3), приводит к противоречию при $\alpha = 128^\circ$ (парадокс Кароэзера) и, по-видимому, не может быть рекомендовано для практических расчетов.

§ 6. К вопросу о краевом эффекте при равномерном изгибе выступа (зуба)

Рассматривается вопрос о распределении нагрузки (приложенной в вершине) и напряжений по длине прямого выступа (зуба цилиндрического колеса) при равномерном прогибе. Этот вопрос в литературе освещен неточно. Оценка краевого эффекта существенна при построении расчета зубьев в неплоских случаях и при выявлении причин краевых поломок.

В средней части длинного зуба, работающего без перекоса, имеет место плоское деформированное состояние, при котором вдоль зуба действуют нормальные напряжения $\sigma_y = \mu \sigma_{uz}$ (μ - коэффициент Пуассона, σ_{uz} - нормальные изгибающие напряжения). У края зуба $\sigma_y = 0$, с чем и связан краевой эффект. При $\mu = 0$ краевого эффекта не было бы. В реферируемой работе дано качественное описание явления и подтверждающий его вариационный расчет тонкой консольной пластинки. Численные оценки, приведенные ниже, являются приближенными для пластинки и, тем более, для зубьев.

Если равномерно нагруженный бесконечно длинный выступ разрезать плоскостью, перпендикулярной образующей, отбросить одну из частей и заменить ее воздействием напряжениями σ_y , то прогиб полубесконечного выступа останется равномерным. Напряжения σ_y складываются в момент, который отгибает край выступа в сторону общего прогиба. Без них, т.е. только от равномерной изгибающей нагрузки, прогиб зуба у края будет меньше, чем на удалении от него. Дальнейший вывод: при равномерном прогибе выступа он у края

нагружен больше (на 40%), чем в средней части.

Сказанное касается только самого края выступа. В целом зона, прилегающая к краю, нагружена несколько меньше, чем средняя часть длинного выступа. Действительно, разрез бесконечного выступа, принимаемый на этот раз как разрушение связей упругой системы, приводит к увеличению работы внешних сил, т.е. к увеличению в среднем прогиба крайней части при равномерной нагрузке. При равномерном прогибе крайняя зона должна быть, следовательно, несколько разгружена. Зона пониженных удельных нагрузок (до 88%) имеет протяженность от 0,15 до 0,8 (в долях высоты выступа).

У основания выступа краевой эффект проявляется в уменьшении изгибающих напряжений (при абсолютно жесткой заделке до нуля), что соответствует экспериментальным данным ряда авторов. Однако далее следует зона увеличенных (на величину до 6,5%) изгибающих напряжений.

Г Л А В А Ш

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К РАСЧЕТУ ЗУБЬЕВ

§ 7. Экспериментальная проверка принципа затухания применительно к зубу

Согласно принципу затухания (Г. Нейбер) распределение напряжений в местах концентрации практически не зависит от распределения нагрузки в удаленных сечениях. Принцип затухания не имеет строгого характера, так же как понятие концентрации напряжений.

Считается, что если под зубом достаточно большой сплошной массив материала, то напряжения у его основания определяются однозначно. Косвенное подтверждение такого мнения основывается на опытах Нимана и Глаубитца, изучавших влияние толщины обода зубчатого колеса. Прямого исследования влияния направления силового потока в массиве под зубом в литературе не отмечается.

Вопрос изучался поляризационно-оптическим методом. Полуциркулярная плоская модель с зубом стандартной рейки модуля $m = 10$ мм имела ряд отверстий по периферии (радиус 120 мм с центром в районе зуба). Была обеспечена возможность шарнирного крепления модели в двух точках (на двух пальцах), т.е. крепление было статически определенным и потому контролируемым. Замеры выполнялись при разных вариантах крепления.

Несмотря на то, что картины полос под зубом при разных вариантах были существенно различными, значения замеренных максимальных напряжений отличались не более, чем на 2%, что соизмеримо с точностью эксперимента.

Таким образом, была подтверждена возможность определения максимальных напряжений в зубьях без учета распределения нагрузки по периферии большого массива под ними.

§ 8. Эвольвентные координаты и уравнения для напряжений

Предварительно приводятся уравнения равновесия в случае произвольной ортогональной координатной сетки на плоскости:

$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial S_u} + K_v (\sigma_u - \sigma_v) + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial S_v} + 2 K_u \tau_{uv} = 0, \quad (4)$$

и аналогичное уравнение с переменной местами индексов u и v . Здесь S_u, S_v - длины дуг координатных кривых, но не координаты, т.е. независимые переменные, K_u, K_v - кривизны.

Плоским сечениям, нормальным к границе зуба (ломаные сечения), соответствует система координат, названная эвольвентной. Одно из семейств координатных линий суть прямые, второе - эвольвенты по отношению к линии центров кривизны граничной кривой (эволюты).

В эвольвентных координатах θ, t (рис. I) уравнения равновесия принимают вид:

$$\frac{\partial \tau_{\theta t}}{\partial t} + \frac{1}{r+t} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{\theta t}}{r+t} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} + \frac{1}{r+t} \frac{\partial \tau_{\theta t}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_t - \sigma_{\theta}}{r+t} = 0.$$

Уравнения равновесия решаются, т.е. сводятся к квадратурам, что составляет преимущество эвольвентных координат:

$$\tau_{\theta t} = -\frac{1}{(r+t)^2} \int_0^t (r+t) \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} dt, \quad \sigma_t = \frac{1}{r+t} \int_0^t (\sigma_{\theta} - \frac{\partial \tau_{\theta t}}{\partial \theta}) dt. \quad (5)$$

Здесь положено, что кривая $t = 0$ суть граница тела (зуба), свободная от внешней нагрузки.

Уравнение неразрывности в эвольвентных координатах имеет вид:

$$\left[(r+t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r+t} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] (\sigma_{\theta} + \sigma_t) = 0.$$

Для точек границы, свободной от внешней нагрузки, уравнение неразрывности с использованием уравнений равновесия может быть представлено в форме, не содержащей других напряжений, кроме σ_θ , а именно:

$$2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{\sigma_\theta}{r} + 2 \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + r \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

§ 9. Гиперболический закон распределения напряжений

Гиперболический закон, свойственный приближенной теории кривых стержней, применяли для расчета деталей сложной формы Н.Н.Афанасьев, а затем А.В.Верховский. Энергетическое истолкование гиперболического закона, данное в работе, заключается в следующем.

Интегральные условия равновесия для нормальных напряжений в поперечном сечении кривого стержня имеют вид (рассматривается плоский случай и используются обозначения предыдущего параграфа, нагрузка приведена к центру кривизны):

$$\int_0^u (r+t) \sigma_\theta dt = M, \quad \int_0^u \sigma_\theta dt = P_\theta.$$

Так же как в случае прямых стержней, минимизируется потенциальная энергия, связанная только с нормальными напряжениями на площадках поперечных сечений, т.е.

$$W = \frac{d\theta}{2E} \int_0^u (r+t) \sigma_\theta^2 dt,$$

что составляет допущение расчета. Использование теоремы о минимуме приводит к гиперболическому закону:

$$\sigma_\theta = \frac{\lambda_1}{r+t} + \lambda_2. \quad (7)$$

Сравнение с уравнением неразрывности для точек границы (6) показывает, что вблизи максимума напряжения по нормали к границе падают круче, чем по гиперболе первого порядка, т.е. гиперболический закон должен приводить к систематической ошибке для максимальных напряжений.

Дано численное сравнение с решениями теории упругости для кругового бруса, и сделан вывод, что гиперболический закон приводит к занижению максимальных напряжений в практически реальных случаях до 8+12%. Причем, как показывают материалы § 4, эта оценка

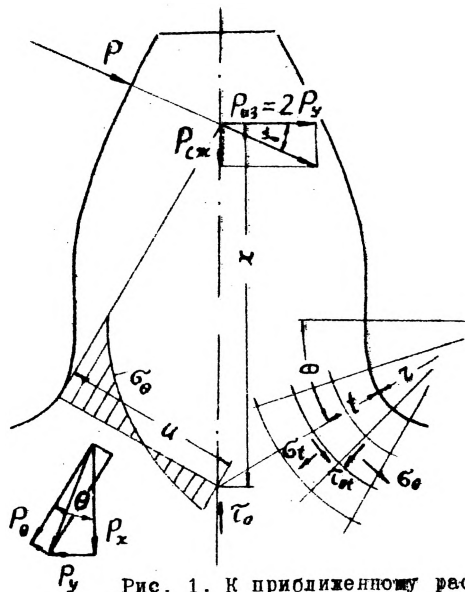


Рис. 1. К приближенному расчету зубьев.

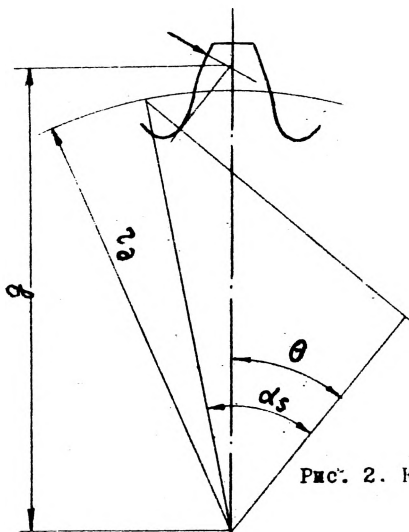


Рис. 2. К геометрическим расчетам.

ряд ли будет заниженной и при других возможных решениях теории упругости.

Аналогичные обстоятельства имеют место для случая чистого изгиба симметричной детали с глубокими вырезами, строгое решение для которого было дано Г. Нейбером, а приближенное решение с применением гиперболического закона — А. В. Верховским.

§ 10. Геометрические соотношения для зубьев

Приводятся известные соотношения, описывающие геометрию эвольвентной зубчатой передачи и переходной кривой ножки зуба при нарезании инструментом реечного типа. Приводится также выражение для производной радиуса кривизны граничной кривой.

В предлагаемом приближенном расчете зубьев применяются некоторые геометрические построения, касающиеся положения опасной точки. Аналитическое проведение касательной к переходной кривой ножки зуба через заданную точку на оси зуба (рис. 2) сводится к трансцендентному уравнению относительно параметра α_s , через который описывается геометрия переходной кривой:

$$f(\alpha_s) = r_a \sin \alpha_s - \frac{a}{\sin \alpha_s} - r_i - g \sin \theta = 0.$$

Расчеты ведутся при модуле $m = 1$; $r_a = \frac{z}{2}$ — радиус делительной окружности, z — число зубьев; $a = f + c - r_i - \xi$, f — коэф. высоты, c — коэф. радиального зазора, r_i — радиус закругления исходного контура, ξ — коэф. коррекции.

Уравнение решается последовательными приближениями по методу Ньютона:

$$\alpha_{sn+1} = \alpha_{sn} - \frac{f(\alpha_{sn})}{f'(\alpha_{sn})},$$

где в правой части стоит предыдущее значение α_s и его функции, а в левой — следующее приближение,

$$f'(\alpha_s) = \frac{df}{d\alpha_s} = (r_a \cos \alpha_s - g \cos \theta) \left(1 + \frac{a}{r_a \sin^2 \alpha_s} \right).$$

Процесс сходится в 2+3 действия.

Для произвольной граничной кривой доказываются следующие необходимые в дальнейшем дифференциально-геометрические соотношения (рис. 1):

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{r+u}{\cos \theta}, \quad \frac{du}{d\theta} = (r+u) \operatorname{tg} \theta. \quad (8)$$

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ У ОСНОВАНИЯ ЗУБЬЕВ

§ II. Интегральные и граничные условия равновесия

В известном расчете зубьев при изгибе по методу ломаных сечений выполняют только условие равновесия по моменту (рис. I)

$$\int_0^u (u-t) \sigma_{\theta} dt = x P_y, \quad (9)$$

и далее полагают, что на оси зуба $\sigma_{\theta} = 0$, что не строго, и применяют гиперболический закон (7).

Имеет место второе необходимое условие для напряжений σ_{θ} , которое устанавливается с помощью следующих предварительных равенств ($\sigma_{\theta u}$ - значение σ_{θ} на оси зуба, P_{θ} - равнодействующая):

$$\sigma_{\theta 0} = \frac{\sigma_{\theta u}}{\sin 2\theta} = \frac{dP_x}{dx}, \quad P_{\theta} = \int_0^u \sigma_{\theta} dt = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta.$$

Далее с использованием дифференциально-геометрических соотношений (8) исключается вертикальная составляющая P_x , что дает в итоге:

$$\frac{dP_{\theta}}{d\theta} + P_{\theta} \operatorname{tg} \theta - \sigma_{\theta u} \frac{r+u}{\sin 2\theta} = \frac{P_y}{\cos \theta} \quad (10)$$

Условия (9) и (10) являются необходимыми и достаточными для построения равновесной системы, что доказывается с привлечением уравнений в эвольвентных координатах (5). Их дифференциальными следствиями являются следующие равенства:

$$\int_0^u (\sigma_{\theta} \sin \theta - \sigma_{\theta z} \cos \theta) dt = \int_0^u (\sigma_{\theta} \sin \theta + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} \frac{u-t}{r+u} \cos \theta) dt = P_y, \quad (11)$$

$$\int_0^u (r+t) \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} dt - \sigma_{\theta u} (r+u)^2 \operatorname{ctg} 2\theta = 0, \quad (12)$$

$$\text{при } t=u \quad \sigma_{\theta} \operatorname{ctg} 2\theta + \sigma_{\theta z} = 0, \quad \sigma_{\theta} + \sigma_z = 0. \quad (13)$$

Показано, что поиск решения с использованием двучленного исходного закона, например (7), приводит к линейному дифференциальному уравнению первого порядка, т.е. решение определяется с точностью до константы. Принципиально ее надо определять с помощью условия, согласно которому напряжения на достаточно большой глыбе

не под зубом равны нулю. Расчет может быть упрощен, и это делается в § 13.

§ 12. Построение исходного закона

Для случая изгиба зуба строится исходный закон, более точный, чем гиперболический. Чтобы иметь возможность применить теорему о минимуме, интегрально-крайное условие (10) приближенно заменяется следующим:

$$\int_0^{u+\Delta t} \sigma_{\theta} dt = A,$$

где A — неварьируемая величина, а Δt — произвольное, но относительно малое расширение зоны интегрирования. Тем самым выражается ограниченная свобода вариаций равнодействующей P_{θ} .

Условие равновесия по моменту (9) без внесения существенной ошибки может быть переписано в виде:

$$\int_0^{u+\Delta t} (u-t)\sigma_{\theta} dt = x P_y,$$

поскольку при $t = u$ подинтегральная функция равна нулю.

Вблизи оси зуба удельная энергия деформации выражается через σ_{θ} с помощью соотношений (13) следующим образом (положено $M = 0$, поскольку решение плоской задачи при заданных нагрузках не зависит от коэффициента Пуассона):

$$\sigma_{\theta}^2 + \sigma_t^2 + 2\tau_{\theta t}^2 = 2(1 + \operatorname{ctg}^2 2\theta)\sigma_{\theta}^2.$$

У поверхности удельная энергия и ее производная по нормали к контуру зависят только от σ_{θ} (при $t = 0$ $\sigma_t = \tau_{\theta t} = 0$). Приведенные соотношения позволяют составить следующее приближенное выражение для потенциальной энергии в объеме между двумя близкими сечениями:

$$\begin{aligned} W &= \frac{d\theta}{2E_{\theta}} \int_0^u (r+t)(\sigma_{\theta}^2 + \sigma_t^2 + 2\tau_{\theta t}^2) dt \approx \\ &\approx \frac{d\theta}{2E_{\theta}} \int_0^{u+\Delta t} (r+t) \left(1 + \frac{t^2}{u^2} \operatorname{ctg}^2 2\theta\right) \sigma_{\theta}^2 dt. \end{aligned}$$

С помощью теоремы о минимуме устанавливается следующий исходный закон:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\lambda_1(u-t) + \lambda_2}{(r+t)(1 + \frac{r}{u^2} \operatorname{ctg}^2 2\theta)} \quad (14)$$

Гиперболический закон (7), который соответствует учету энергии только напряжений σ_{θ} , в рамках более общего приближенного подхода получает оправдание при углах θ , близких к 45° , причем при меньших углах он приводит к занижению напряжений у поверхности, и оценки соответствуют данным в § 9, а при больших углах — к завышению.

§ 13. Предположение об опасной точке

Чтобы избежать интегрирования упомянутого в § II дифференциального уравнения, вводится следующее предположение:

Опасная точка определяется приближенно касательной, проведенной к контуру из точки приложения изгибающего усилия на оси зуба, т.е.

$$\text{при } \chi = \frac{u}{\sin \theta}, \quad t = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0. \quad (15)$$

Пояснения заключаются в следующем.

Из всех цилиндрических сечений с центром на оси зуба только в одном, а именно в том, центр которого расположен в точке приложения изгибающего усилия, могут отсутствовать касательные напряжения, поскольку их момент относительно центра равен нулю. Т.е. касательные напряжения если и не равны нулю, то по крайней мере малы. Далее, если пренебречь кривизной цилиндрического сечения, то с помощью уравнения равновесия (4) можно прийти к предположению (15), а более строгим является следующее условие в той же точке:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{\theta} \frac{r}{u} \operatorname{tg} \theta = 0. \quad (16)$$

Положение опасной точки существенно зависит от ряда факторов, таких как наличие или отсутствие соседних зубьев, форма головки зуба, которые почти не влияют на значение максимального напряжения. Расчеты В.Л. Уселинченко и расчеты автора по методу конформного отображения дали практически одинаковые значения максимальных напряжений, но значительную разницу (до 7°) в угле θ для опасной точки. Таким образом, некоторый произвол и нестрогость при определении опасной точки могут быть оправданы.

Вблизи максимума напряжения изменяются плавно, поэтому и в тех случаях, когда предположение (15) не может соответствовать строгому максимуму (с учетом его неопределенности), оно может рассматриваться как приближенное.

Приведены сравнения с результатами расчетов по методу конформного отображения для зубьев стандартного исходного контура. Наилучшее совпадение имеет место в середине участка приложения силы к зубу, для которого расчеты имеют смысл. В целом положение точки приложения усилия к зубу оказывает меньшее влияние на положение точки с максимумом напряжений, чем это определяется предположением (15).

Расчеты по методу конформного отображения показали, что точки максимума у основания зубьев при изгибе и при сжатии весьма близки друг к другу.

Для проверки предположения использованы также экспериментальные данные Э.В. Бабенковой. Заметные расхождения имеют место лишь при приложении нагрузки на модуль ниже вершины зуба, что может быть пояснено с помощью соотношения (16).

§ 14. Случай сжатия зуба

При сжатии зуба (исходная задача разлагается на две — изгиб и сжатие) имеет место лишь одно независимое интегрально — граничное условие:

$$2 \int_0^u (\sigma_{\theta} \cos \theta + \tau_{\theta t} \sin \theta) dt = -P_{сж}. \quad (17)$$

Задача о сжатии зуба оказывается более неопределенной, чем случай изгиба. Поскольку интегрально-граничных условий одно, а не два, распределение напряжений в большей степени зависит от обстоятельств, не связанных с интегралом внешней нагрузки, в частности, от способа приложения сжимающей нагрузки. Расчеты по методу конформного отображения дали следующие соотношения максимальных напряжений от сжатия в зависимости от точки приложения нагрузки (в вершине, на пол-модуля и на модуль ниже вершины зуба стандартного контура, $\xi = 0$):

$Z = 17, \quad I: 0,98; 0,755; \quad Z = 100, \quad I: 0,965; 0,7.$

Поэтому при сжатии построение удовлетворительного приближенного расчета применяемыми в работе приемами оказывается невозможным. Однако сжимающие напряжения малы по сравнению с изгибными и могут

быть учтены более грубо. Уместным будет принять исходный закон, минимизирующий энергию напряжений σ_θ , при условии, что их равнодействующая, которая входит в условие (I7), не варьируется. Таким законом будет гиперболический без постоянного слагаемого. Далее можно принять, что отсутствуют касательные напряжения в цилиндрических сечениях, поскольку они равны нулю как у поверхности, так и на оси зуба. Использование соотношений (I6), (5) и (I7) позволяет выразить нормальные напряжения у поверхности:

$$\sigma_{сж} = \frac{\frac{P_{сж}}{2r}}{\ln \frac{r+u}{r} \cos \theta + \left(\frac{r}{u} \ln \frac{r+u}{r} - \frac{r}{r+u} \right) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}} \quad (I8)$$

Формула обеспечивает точность $\pm 15\%$ при приложении нагрузки в вершине и на пол-модуля ниже вершины, но приводит к завышению результата до 1,5 раза при приложении нагрузки на модуль ниже вершины.

Расчет по методу цилиндрических сечений А.В.Верховского в тех же случаях дает ошибку до 30% (нагрузка в вершине). В энергетической интерпретации гипотеза А.В.Верховского соответствует минимизации энергии нормальных напряжений на площадках цилиндрических сечений, при этом не учитываются напряжения на ортогональных площадках, что и приводит к ошибке. Расчет в системе ломаных сечений является более удачным, что отчасти пояснено в § I2.

§ I5. Упрощенный расчет на основе гиперболического закона

Подстановка гиперболического закона (7) в условия (9), (II), (I2), (I5) дает четыре уравнения для $\lambda_1, \lambda_2, \frac{d\lambda_1}{d\theta}, \frac{d\lambda_2}{d\theta}$. Чтобы представить расчет в наиболее простом виде, вводится дальнейшее упрощение $\frac{dr}{d\theta} = 0$, т.е. не учитывается переменность радиуса кривизны (эвольвентные координаты заменяются обычными полярными). Для сечения, соответствующего предположению об опасной точке, получено при изгибе:

$$\sigma_\theta = \frac{P_y}{u \sin \theta} \frac{\frac{R u}{r+t} (B + \frac{1}{2}) + rA - R - uB}{R(A-1)(B+1) - \frac{u}{2} (A+B)},$$

где обозначено

$$R = r + u, \quad A = \frac{R}{u} \ln \frac{R}{r}, \quad B = \left(1 + \frac{R}{r} - 2A\right) \frac{Rr}{u^2} \frac{\operatorname{ctg} 2\theta}{\operatorname{tg} \theta}.$$

Вблизи оси зуба напряжения отрицательны.

Приведены сравнения с результатами расчетов по методу конформного отображения, характеризующие точность гиперболического закона (7) и закона (14), а также уместность неучета переменности радиуса кривизны.

Гиперболический закон дает для максимальных напряжений ошибку до 8-12%, направленную в сторону занижения напряжений, что соответствует предварительным выводам § 9. По мере перемещения точки приложения нагрузки вниз по контуру ошибка уменьшается. Подтверждается вывод § 12, оправдывающий гиперболический закон при углах θ , близких к 45° .

Неучет переменности радиуса кривизны дает отклонение порядка 3-5%, направленные в сторону уменьшения ошибки, вносимой гиперболическим законом.

Исходный закон (14) приводит к удовлетворительным результатам (точность до 5%), однако расчеты относительно сложны.

Известный расчет по методу ломаных сечений приводит к занижению максимальных напряжений до 15% при приложении нагрузки в вершине зуба и до 25% при приложении ее в зоне однопарного зацепления. Но далее эта ошибка несколько уменьшается за счет неучета концентрации при вычислении напряжений от силы сжатия.

С целью уменьшения ошибки при допущении гиперболического закона можно поступить таким же образом и в рассматриваемом приближенном расчете. Как показали сравнения, неучет концентрации для напряжений сжатия приводит к ошибке примерно в два раза, но в общем итоге это дает 5-6%, причем на стороне растяжения зуба — в сторону увеличения максимального напряжения.

При неучете концентрации для напряжений сжатия итоговая формула для максимальных напряжений на стороне растяжения имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{P \cos \gamma}{2 u \sin \theta} \frac{rA + \frac{u^2}{r} B + R \left(\frac{u}{2r} - 1 \right)}{R(A-1)(B+1) - \frac{u}{2}(A+B)} - \frac{P \sin \gamma}{2 u \cos \theta} \quad (19)$$

Сравнения с результатами В.Д. Устиненко показали, что для зубчатых колес внешнего зацепления стандартного исходного контура

формула (19) дает отклонения в пределах $\pm 6\%$. Однако в нестандартных случаях при относительно больших углах давления и силах сжатия возможны ошибки до $+14\%$.

Поэтому предусмотрен второй вариант упрощенного расчета, при котором напряжения от силы сжатия учитываются по формуле (18). Суммарные отклонения при этом лежат в пределах от 0 до -10% , включая нестандартные случаи.

За рамки приведенных оценок выходят отдельные случаи приложения нагрузки на модуль ниже вершины (верхняя точка однопарной зоны при зацеплении с рейкой), когда при общей малости напряжений относительная ошибка доходит до $+30\%$ в первом варианте и до $+9\%$ во втором. В связи с этим область применимости метода при указанных оценках точности следует ограничить значениями углов θ , определяющих положение опасной точки согласно предположению, до 50° , что перекрывает большинство практически важных случаев.

Основания для уточнений заключаются в использовании соотношения (16), уточняющего предположение об опасной точке, а также более совершенного исходного закона (14).

Г Л А В А У

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТОЧНОГО РАСЧЕТА ЗУБЬЕВ ПО МЕТОДУ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 16. Построение отображающей функции

Основная трудность при построении отображающей функции связана с условием, согласно которому ее производная $\omega'(W)$ не должна обращаться в нуль нигде в области. Это условие относительно легко можно выполнить (правда, лишь достаточным, но не необходимым образом), если искать отображающую функцию в форме, предложенной В.Л. Устиненко:

$$Z = \omega(W) = W + iy_0 + \sum_{n=1}^K \frac{a_n}{W - ib_n}, \quad a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad (20)$$

где $W = U + iV$ — точка полуплоскости (нижней), $Z = X + iy$ — точка полуплоскости с зубообразным выступом.

Задача заключается в отыскании коэффициентов y_0, a_n, b_n так, чтобы кривая $V = 0$ на плоскости Z возможно ближе соответствовала заданному контуру зуба. Для решения применялась минимизация суммы квадратов отклонений $M = \sum V_j^2$ в обратном отображении

для некоторой системы точек $j = 1, 2, \dots, 10$ на заданном контуре. Было выяснено, что число точек может быть не особо большим, поскольку кривые, соответствующие функции (20), являются плавными. Число дробных членов в расчетах бралось $k = 5$.

В связи с частным видом функции (20) отображение для произвольного симметричного выступа не может быть сколь угодно точным. Поэтому проверялась возможность построения более сложной функции (с полюсами не на мнимой оси), что, однако, не привело к успеху. В одном примере процесс минимизации сошелся к локальному минимуму среднеквадратичного отклонения с плохим приближением, чего при использовании функции (20) не случилось. Дальнейшее изложение касается функции (20).

Некоторая вспомогательная задача - определение координат U, V в обратном отображении по заданным X, Y решалась по методу Ньютона, что приводит к следующим выражениям для приращений искомых величин на каждом шаге последовательных приближений:

$$\delta U = -\frac{FR + GS}{R^2 + S^2}, \quad \delta V = \frac{FS - GR}{R^2 + S^2},$$

где $F = \operatorname{Re} \omega(w) - X$, $G = \operatorname{Im} \omega(w) - Y$, $R = \operatorname{Re} \omega'(w)$, $S = \operatorname{Im} \omega'(w)$

За начальные приближения можно брать, например $U = 0$, $V = 0$.

Условия $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$, обеспечивающие конформность, удобно выполнить с помощью подстановки $\alpha_n = \exp \alpha_n$, $\beta_n = \exp \beta_n$, так что вновь введенные коэффициенты α_n , β_n могут принимать любые действительные значения.

При некоторых значениях коэффициентов γ_0 , α_n , β_n для которых r случаев, где это уместно, будем применять общее обозначение ξ_n , уточнения коэффициентов $\delta \xi_n$ определялись следующим образом.

Для выбранной системы точек X_j , Y_j на контуре зуба находятся соответствующие U_j , V_j и далее производные $\frac{\partial V_j}{\partial \xi_n}$ по формулам:

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma_0} = -\frac{R}{R^2 + S^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_n} = \frac{\alpha_n [S U - R(\beta_n - V)]}{(R^2 + S^2)[U^2 + (\beta_n - V)^2]},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_n} = \alpha_n \beta_n \frac{R[(\beta_n - V)^2 - U^2] - 2S U (\beta_n - V)}{(R^2 + S^2)[U^2 + (\beta_n - V)^2]},$$

и произвольные суммы $M = \sum V_j^2$:

$$\frac{\partial M}{\partial z_n} = 2 \sum V_j \frac{\partial V_j}{\partial z_n}$$

Минимизация осуществлялась методом скорейшего спуска, при котором зависимости V_j от δz_n считаются линейными, и приращения δz_n заранее связываются пропорциональными соотношениями. Были подобраны следующие соотношения, обеспечивающие удовлетворительную сходимость процесса:

$$\delta \alpha_n = \frac{\lambda}{\beta_n} \frac{\partial M}{\partial \alpha_n}, \quad \delta \beta_n = \frac{\lambda}{\beta_n} \frac{\partial M}{\partial \beta_n}, \quad \delta y_n = \lambda \frac{\partial M}{\partial y_n},$$

где λ - коэффициент пропорциональности. Для сокращения записи положили $\delta z_n = \lambda M_n$.

Формула, заключающая один цикл расчета, устанавливается из условия $\frac{dM}{d\lambda} = 0$ и имеет вид:

$$\lambda = \frac{\sum V_j \sum M_n \frac{\partial V_j}{\partial z_n}}{\sum (\sum M_n \frac{\partial V_j}{\partial z_n})^2}$$

Далее к значениям коэффициентов добавляются δz_n , и начинается следующий цикл расчета.

Для выбора начальных значений коэффициентов использовались данные В.Л. Устиненко. Бралось β_n в пределах от 0,5 до 0,01 по геометрической прогрессии и $\alpha_n = \frac{1}{2} \beta_n$ (модуль зубьев $m = 1$).

В одном варианте нижнее значение β_n было поднято до 0,03, и тогда процесс минимизации пошел путем стягивания всего контура к началу координат, что не дает решения.

Е расчетах, приведших к решению, выполнялось 120 повторов цикла последовательных приближений. Примерно через 30-40 повторений процесс становился крайне медлительным, но четкого минимума не было. Время расчета на ЭЦВМ "Минск-22" составило примерно 4 мин.

Отклонения V_j на плоскости W составили величину порядка 0,003-0,004 (в модулях). На плоскости Z точность увеличивается при приближении к основанию зубьев, что связано с уменьшением в этом направлении модуля производной $\omega'(W)$. В районе переходной кривой ноки зуба отклонения визуально неразличимы.

Составленная программа содержала также процесс переноса сил с контура зуба на контур зубообразного выступа и расчет напряжений.

который выполняется по формулам В.Л.Устиненко.

§ 17. Расчет выступа (зуба) на растянутом основании

Задача может иметь отношение к расчету зубьев в особых случаях нагружения. Решение найдено путем видоизменения решения В.Л. Устиненко для зуба, нагруженного силой.

Напряжения выражаются по известным формулам через две аналитические функции $\Phi(w)$ и $\Psi(w)$, и для них нами было получено:

$$\Phi(w) = \frac{1}{\omega'(w)} \left[\frac{\sigma_p}{4} + \sum_{n=1}^k \frac{a_n \Phi_n}{(w - i\beta_n)^2} \right],$$

$$\Psi(w) = -\frac{1}{\omega'(w)} \left[\frac{\sigma_p}{4} + \Phi(w) + w\Phi(w) + \sum_{n=1}^k a_n \frac{\Phi_n - \Phi(w) + (w + i\beta_n)\Phi(w)}{(w + i\beta_n)^2} \right]$$

Здесь σ_p - напряжение, растягивающее полуплоскость с зубообразным выступом, $\Phi_n = \Phi(-i\beta_n)$ - действительные числа, для определения которых выполняются подстановки $w = -i\beta_m$, $m = 1, 2, \dots, k$, что приводит к системе уравнений вида:

$$\frac{a_1}{(\beta_m + \beta_1)^2} \Phi_1 + \frac{a_2}{(\beta_m + \beta_2)^2} \Phi_2 + \dots + \left[1 + \frac{a_m}{4\beta_m^2} + \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{(\beta_m + \beta_n)^2} \right] \Phi_m + \dots + \frac{a_k}{(\beta_m + \beta_k)^2} \Phi_k = \frac{\sigma_p}{4}.$$

Выражение для $\Psi(w)$ содержит неопределенности в точке $w = -i\beta_n$, раскрытие которых по правилу Лопиталья приводит к конечному результату, чем подтверждается правильность решения (функция $\Psi(w)$ действительно оказывается аналитической).

Расчет для зуба стандартной рейки дан коэффициент концентрации напряжений 1,43.

Решение получено совместно с Н.М.Шоломовым, который применял его к исследованию прочности промежуточных колес с тонкими ободами.

Приложение. МЕТОД РАСЧЕТОВ ПРИ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗУБЧАТОМУ (ЦИЛИНДРИЧЕСКОМУ) ЗАЧЕПУ

На основании уравнений и условий задачи о кручении в работе показывается следующие предложения:

$$\begin{aligned}\phi \varphi \varrho_s ds &= 2Gc \iint \varphi dF, \\ \phi r^2 \varrho_s ds &= 2Gc \iint r^2 dF + 2M.\end{aligned}\quad (2I)$$

Здесь в левой части стоят интегралы по контуру, а в правой — по площади поперечного сечения,

φ — произвольная гармоническая функция, ϱ_s — касательные напряжения у поверхности, c — угол закрутки на единицу длины стержня, G — модуль упругости при кручении, M — крутящий момент, r — полярный радиус.

В частном случае $\varphi = 1$ равенство (2I) выражает известную теорему Р.Бредта.

Некоторые попытки непосредственного использования интегральных условий (2I) для определения напряжений не привели к успеху.

Переход к уравнению Фредгольма выполняется с помощью гармонической функции $\varphi = \frac{\cos \gamma}{\rho}$, где ρ — расстояние от некоторой точки вне контура, γ — угол, отсчитываемый от нормали к контуру из этой точки, с последующим предельным переходом от точки вне контура к точке на контуре. Получено:

$$- \mathcal{P} \varrho_{sK} + \phi \frac{\cos \gamma}{\rho} \varrho_s ds = 2Gc \phi \cos \gamma \cos \alpha ds,$$

где ϱ_{sK} — значение напряжений ϱ_s в точке K , от которой исчисляются размеры ρ и γ , α — угол между радиусом-вектором из точки K в текущую точку и внешней нормалью к контуру в текущей точке.

В точке K ядро уравнения имеет значение $\frac{\cos \gamma}{\rho} (\kappa) = -\frac{\kappa}{2}$, где κ — кривизна.

Размеры ρ , γ и α выражаются через полярные координаты и углы наклона внешней нормали в точке K и текущей точке.

Объектом численных расчетов был шлицевый вал трактора МТЗ-52. Интегралы заменялись суммами по формуле Гаусса с 8-ю ординатами. Всего на одной стороне шлица было 40 узловых точек, и относительно напряжений в этих точках задача свелась к системе линейных алгебраических уравнений.

Средне-арифметическое значение вычисленных напряжений по проверке с помощью теоремы Р.Бредта отличалось от точного в 6-й значащей цифре: Время счета на ЭИВМ "Минск-22" составило 5 минут.

Были рассчитаны варианты с различными радиусами закругления у основания шлица при сохранении высоты рабочей боковой грани. Уве-

личение радиуса с 0,3 мм до 1 мм дает уменьшение максимальных напряжений на 22%.

ВЫВОДЫ

1. Предложена энергетическая интерпретация основных механических теорий расчета упругих элементов, которая характеризуется минимизацией части потенциальной энергии и по сравнению с традиционными построениями на основе гипотез о неискривлении допускает формализацию вывода расчетных формул с помощью специально доказанной теоремы о минимуме и возможность поиска уточнений путем более полной минимизации энергии.

Энергетический подход иллюстрирован рядом примеров и применен к приближенному расчету зубьев.

2. Дано качественное описание и вариационный расчет распределения нагрузки и напряжений у края длинного выстуна (зуба), изгибаемого без перекоса.

3. Экспериментально обоснована возможность расчета напряжений в зубьях без учета распределения нагрузки по периферии большого массива под зубом.

4. Составлены и исследованы уравнения для напряжений в эвольвентной системе координат (ломаные сечения).

5. Исследован гиперболический закон распределения нормальных напряжений на площадках ломаных сечений, который соответствует минимизации энергии только этих напряжений. Путем приближенного учета энергии других напряжений составлен более точный закон, который равнозначен гиперболическому при угле наклона сечения 45° . При меньших углах гиперболический закон приводит к занижению напряжений у поверхности до 12%.

6. Введено и исследовано предположение, согласно которому положение опасной точки у основания зуба приближенно определяется касательной, проведенной к контуру через точку приложения изгибающего усилия на оси зуба.

7. Применительно к точному расчету зубьев разработана и частично исследован метод построения конформно-отображающей функции в форме В.Л. Устивенко путем минимизации средне-квадратичного отклонения в обратном отображении. Освоены вычисления на ЭЦВМ. Помимо самостоятельного значения, эта часть работы позволила получить ценный материал для оценок допущений приближенного метода.

Составлено решение для зуба на растянутом основании.

8. Рекомендуется приближенный метод расчета зубьев на основе предположения об опасной точке и гиперболического закона, причем для компенсации погрешностей от него, а также для упрощения не учитывается переменность радиуса кривизны контурной кривой и концентрация напряжений от силы сжатия. Точность метода $\pm 6\%$, за исключением случаев относительно больших сил сжатия (более $0,6$ от изгибающей силы). Предусмотрен второй вариант расчета с более точным учетом напряжений от силы сжатия и общей оценкой точности от 0 до -10% . Оценки охватывают зубья внешнего зацепления стандартного контура и ряд нестандартных случаев.

Для строгих расчетов рекомендуется разработанный способ построения конформно-отображающей функции, однако область применимости автором не выявлена.

9. При участии автора на Минском тракторном заводе осуществлен ряд мероприятий по увеличению изгибной прочности зубьев шестерен. Для некоторых из них при этом была обоснована возможность замены марки стали с 20ХНР на 25ХГТ, что дало значительный экономический эффект (~ 55 тысяч рублей).

По материалам диссертации были сделаны доклады:

1. На Межвузовской научной конференции по расчету и проектированию трансмиссий автомобилей, тракторов и тепловозов. Минск, 1968.

2. На заседании кафедры теоретической механики БПИ. Минск, 1969.

3. На XXV, XXVI и XXVII научно-технических конференциях БПИ. Минск, 1969, 1970, 1971.

4. На заседании кафедры сопротивления материалов БПИ. Минск, 1971.

5. На общегородском семинаре по механике сплошных сред при Белгосуниверситете. Минск, 1971.

6. На конструкторской связи НТО Минского тракторного завода, 1971.

Основное содержание работы отражено в публикациях:

1. В.Я. Рубенчик, Г.К.Татур, Э.Г.Лившиц. Новый метод расчета максимальных напряжений изгиба в зубьях зубчатых колес. Материалы Межвузовской научной конференции по расчету и проектированию трансмиссий автомобилей, тракторов и тепловозов (тезисы и аннотации). Минск, 1968.

2. Г.К.Татур, Э.Г.Лившиц, В.Я.Рубенчик. Расчет максимальных напряжений у основания зуба. "Вестник машиностроения". 1969, № 10.

3. В.Я.Рубенчик. О построении конформного отображения для расчета напряжений в зубьях шестерен. Материалы секции теоретической и прикладной механики XXVI научно-технической конференции БПИ. Минск, 1970.

4. Г.К.Татур, В.Я.Рубенчик. Минимизация энергии для некоторых случаев расчета упругих элементов. Известия АН БССР, секция физико-технических наук, 1971, № 2.

5. Г.К.Татур, В.Я.Рубенчик. О приближенном расчете максимальных напряжений при изгибе зубьев. Сб. "Прогрессивная технология машиностроения", вып. II, Минск, 1971.