



The analysis of the mathematical models which can be used at optimization of the control system of the enterprise organizational structure is presented. The new approach to the mathematical modeling of the enterprise organizational structure, based on using of temporary characteristics of the control blocks working, is formulated.

Н. В. АНДРИАНОВ, РУП «БМЗ», А. Н. ЧИЧКО, БНТУ

УДК 519.669.27

## ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СТРУКТУР ПРЕДПРИЯТИЙ

Решение сложных экономических и технических проблем современного общества требует создания так называемых организационных структур. Наиболее типичными представителями организационных структур являются промышленные предприятия, министерства, объединения, ассоциации, фирмы и т.д. Число таких объектов в каждой развитой стране постоянно изменяется, совершенствуясь при этом. Несмотря на то что в каждой стране имеются тысячи предприятий и различных организаций, занимающихся конкретным производством продукции, научных центров по разработке организационных структур по-прежнему нет. В первую очередь это связано с тем, что во многих государствах формирование организационных структур является прерогативой административной системы и роль научных исследований в этих вопросах незначительна и носит скорее рекомендательный характер. Естественно, что отсутствие заказов на разработку организационных структур со стороны государственных органов привело к неразвитости многих аспектов в теории организационных структур. Сегодня это еще более актуально, так как непосредственно связано с созданием эффективных систем управления промышленными объектами.

Проблемы и методы развития организационных структур широко отражены в работах различных экономических школ [1–7]. Базовыми принципами формирования производственной организационной структуры являются технологическая общность, наличие кооперированных связей, комбинирование производства. Важная роль при этом отводится вопросам управления внешними связями с вышестоящими структурами управления, а также с соседними предприятиями. Конкретный анализ организационных структур объединений позволяет выявить узкие места и обосновать главное направление развития структур управления. При разработке организационных схем широко используются формальные и неформальные методы исследования, позволяющие сформулировать общие этапы построения организационных структур [8]:

- 1) разработка основных и вспомогательных целей на определенный временной период;
- 2) определение и выбор вариантов основных структурных контуров объединения на конец рассматриваемого временного периода;
- 3) разработка альтернативных путей перехода к перспективным структурам;
- 4) выбор окончательных вариантов перспективных структур объединения и путей перехода.

Общая схема разработки организационных структур предполагает использование экономико-математических моделей для решения различных задач. Использование этих методов повышает точность принимаемых решений и конкретизирует компоненты организационной структуры.

В данной работе под моделями синтеза организационной структуры объекта понимают системы уравнений (связей), описывающих уровни иерархии и взаимосвязи между подразделениями объекта. Наиболее распространенными методами построения таких моделей являются методы теории массового обслуживания. Рассмотрим один из вариантов постановки задачи по оптимизации организационной структуры предприятия в терминах теории массового обслуживания.

Пусть задана система приборов  $C_j$  ( $j=1, n$ ) для решения различных задач (заявок). Интенсивность поступления задач обозначим как  $\lambda_i$  ( $i=1, m$ ). Если  $i$ -я задача не решена за время  $T_i$ , то она считается потерянной. В результате реализации такой схемы в определенном месте накапливается банк нерешенных задач. Для каждой задачи (заявки) предлагается решать систему уравнений типа [9–11]

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_{ij}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = c_j^{ce}, \quad j = 1, n, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, m, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $x_{ij}$  — число приборов  $j$ -го типа, выделенных для решения  $i$ -х задач;  $\mu_{ij}$  — элементы матрицы эффективности обслуживания, определяемые как:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{t_{ij}}; \quad (2)$$

$t_{ij}$  — среднее время решения  $i$ -го вопроса на  $j$ -м приборе;  $s_i$  — число заявок  $i$ -го типа в системе;

$c_j^{CB}$  — число свободных приборов  $j$ -го типа.

Ограниченность ресурсов обслуживания подсистемы приводит к образованию потока нерешенных задач (заявок). Решение этой проблемы возможно путем перераспределения необходимых заявок по резервным приборам и других блоков управления. В связи с этим вводится понятие критической функции качества работы  $i$ -го прибора всей сети [11]:

$$L_i = \alpha_i q_i + \beta_i, \quad (3)$$

где  $\alpha_i$  — среднее значение потерь производства в единицу времени;  $\beta_i$  — расходы производства в единицу времени на амортизацию узла системы управления;  $q_i$  — среднее число требований в системе обслуживания  $i$ -го прибора.

Издержки производства определяются суммированием потерь по всем узлам управления. Если же очереди решения задач могут быть бесконечными, то задача минимизации издержек упрощается. Если применить эти методы к иерархической системе управления, имеющей одинаковые характеристики приборов одного уровня, то общий критерий функции системы имеет вид [10]

$$L(m) = n_{m-1} L(m-1) + Lm, \quad (4)$$

где  $L(m)$  — величина критерия для  $m$  уровней системы управления;  $L(m-1)$  — потери в системе обслуживания;  $n_{m-1}$  — число подсистем  $m$ -го уровня.

Анализируя эти методы и модели, можно отметить, что для решения задачи управления необходимы многие параметры функции организационной системы, которые достоверно определить достаточно сложно. Например, значения  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\mu_{ij}$  являются не всегда четко определяемыми.

Еще к одному классу моделей организационной структуры относятся модели кластерного анализа. Сущность этого моделирования сводится к разбиению заданного множества элементов на однородные подмножества [12–18]. Рассмотрим методы построения моделей кластерного анализа, используя данные работы [19]. Пусть имеется  $n$  объектов, которые должны быть разбиты на  $m$  групп. Причем  $n_j$  — число объектов в  $j$ -й группе. Тогда

$$n = \sum_{j=1}^m n_j. \quad (5)$$

Обозначим издержки включения  $i$ -го объекта в  $j$ -ю группу через  $c_{ij}$ . Причем выполняется усло-

вие  $c_{ij}=0$ , а  $c_{ij}=c_{ji}$ . Если  $i$ -й объект принадлежит  $j$ -й группе, то  $x_{ij}=1$ , а в противном случае  $x_{ij}=0$ . Тогда

$$n_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}. \quad (6)$$

Дополнительные условия на ведущий элемент организационной структуры вводятся как  $y_j=1$ , если элемент ведущий, и  $y_j=0$  в противном случае. Задача оптимизации организационной структуры сводится к задаче целочисленного программирования и заключается в минимизации издержек по всем группам разбиения при выполнении следующих ограничений, которые представляют математическую модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, n, \\ \sum_{j=1}^m y_j = m, \\ x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, n, \quad j = 1, m. \end{array} \right. \quad (7)$$

Система ограничений (7) означает, что каждый элемент должен содержаться в одной группе и число этих групп равно  $m$ . Анализируя представленную модель, можно заметить, что для ее реализации нужно заранее знать количество групп разбиения и ведущий элемент каждой группы.

Широкое распространение в моделировании организационных структур получили методы теории графов [20, 21]. В этом случае задача построения организационной структуры управления предприятием сводится к задаче разбиения графа на классы подграфов. При разбиении графа на подграфы должно выполняться необходимое число ограничений и число связей внутри подграфа должно стремиться к максимуму. Вид функционала при этом может быть различным. В этом случае математическая модель имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m y_{ik} = 1 \rightarrow i = 1, n, \\ n_{\min} \leq \sum_{i=1}^n y_{ik} \leq n_{\max}, \\ x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{есть соединение вершин } i \text{ и } j, \\ 0, & \text{нет соединения вершин } i \text{ и } j, \end{cases} \\ y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-вершина входит в} \\ & k\text{-подграф,} \\ 0, & \text{если } i\text{-вершина не входит в} \\ & k\text{-подграф,} \end{cases} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ij} y_{ik} y_{jk} \rightarrow \max, \end{array} \right. \quad (8)$$

где  $n$  — число вершин графа;  $n_{\max}$  и  $n_{\min}$  — максимально и минимально допустимое число вершин в подграфе;  $m$  — число подграфов, которое задано в задаче.

Следует отметить, что недостатком такой модели является то, что число подразделений должно быть задано, т.е. фактически известно, хотя в алгоритмическом отношении модель легко реализуема на компьютере.

Модели с использованием графов могут строиться с учетом минимизации издержек по всем узлам [20]. В этом случае функционал построенных издержек по всем узлам является критерием экономической эффективности.

Для оценки качества работы информационной системы вводится понятие коэффициента полезного действия по управлению, который характеризует величину потерь информационно-материального потока. При этом используют формулу

$$\lambda = 1 - K_y, \quad (9)$$

где  $\lambda$  — величина относительных потерь информационного потока;  $K_y$  — коэффициенты полезного действия по управлению организационной структурой.

Система, к которой применяют формулу (9), представляет собой иерархическую организационную структуру. Информационный поток, движущийся по организационной структуре, содержит поток заявок, которые формируются с определенной частотой. Заявки характеризуют плотность информационного потока. Элементы организационной структуры — это координаторы, пропускающие через себя поток заявок. Качество работы координатора организационной схемы оценивается долей  $\lambda$  организационного потока. В литературе [21] предлагается следующий функционал математической модели для оценки общих потерь работы координатора:

$$f_e \frac{\gamma c}{P(1+\beta P)} + c \rightarrow \min, \quad (10)$$

где  $f$  — относительная величина информационно-материального потока;  $P$  — относительная частота заявок потребителей;  $\gamma, \beta$  — параметры организационной структуры, характеризующие ценность материального потока;  $c$  — коэффициент, характеризующий рост прямых затрат на координацию (штаты, вычислительная техника).

Оптимизация функционала (10) позволяет определить оптимальные затраты на управление:

$$c = \frac{P(1+\beta P)}{\gamma} \ln \frac{\gamma f}{P(1+\beta P)}. \quad (11)$$

Анализ (11) показывает, что при невысокой плотности заявок в организационной системе целесообразно вкладывать материальные средства в совершенствование и модернизацию системы управления. При увеличении частоты заявок повышаются прямые затраты на управление из-за

больших потерь материального потока, что следует из (11).

Еще один подход к моделированию организационных структур заключается в том, что геометрически выделяется сеть материальных потоков, связывающая источники и потребители информационных потоков. Сеть потоков является деревообразным графом, множество вершин которого равно  $S$ . Остальные вершины графа являются координаторами. Для всех координаторов вычисляются две параметрические функции, характеризующие частоту заявок и общий материально-информационный поток:

$$P_r = \sum_{y \in x_r} f(S_y, S_r, S), \quad (12)$$

$$f_r = \sum_{y \in x_r} y(S_y, S_r, S), \quad (13)$$

$$f(S_y, S_r, S) = \sum_{S_i \in S_1} \sum_{S_j \in S_2} \lambda(S_i, S_j), \quad (14)$$

где  $S$  — множество узлов организационной структуры;  $x_r$  — множество вершин графа, следующих за  $r$ ;  $S_r$  — множество висячих вершин, достижимых из  $r$ ;  $f(S_y, S_r, S)$  — параметрическая функция на множествах  $S_y, S_r$ ;  $y(S_y, S_r, S)$  — средняя величина материального потока по дуге  $S_y, S_r$ ;  $\lambda(S_1, S_2)$  — средняя частота заявок.

Использование функций (12)–(14) позволяет оценить из самых общих соображений тип организационной структуры. К сожалению, представленный математический аппарат не позволяет оптимизировать организационную структуру, так как используемые параметры в формульном аппарате не имеют конкретных значений.

Проблема определения коэффициентов в моделях приводит к развитию регрессионных методов анализа для описания характеристик внутренней структуры подразделений. В частности, можно отметить работы [22, 23], в которых, используя линейные и нелинейные функции вида

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_p^{a_p},$$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p,$$

были получены следующие расчетные зависимости характеристик схемы управления [22]:

$$y_1 = 0,0346 P_n^{0,71} T_0^{0,265}, \quad (15)$$

$$y_2 = 0,03 P_n^{0,71} T_0^{0,265}, \quad (16)$$

где  $y$  — показатель, характеризующий деятельность аппарата управления;  $x_1, x_2, \dots, x_p$  — значения факторов системы управления;  $a_0, a_1, \dots, a_p$  — регрессионные коэффициенты математической модели;  $y_1$  — параметр управления, характеризующий технологическую подготовку мелкосерийного производства с особо сложной продукцией;  $y_2$  — параметр управления, характеризующий крупносерийное произ-

водство;  $P_n$  – среднесписочная численность рабочих основного производства;  $T_0$  – количество норм выработки в основном производстве.

По формулам (15) и (16) можно определять нормативы численности служащих. Для определения численности служащих, занимающихся конструированием и оснасткой, предлагается формула

$$y = 5,8 + 0,00287P_n + 0,00177\Phi_a, \quad (17)$$

где  $\Phi_a$  – стоимость активной части основных производственных фондов.

Аналогичный тип формул используется для определения численности работников материально-технического снабжения и сбыта

$$y = 0,084\Phi^{0,514}\Pi^{0,04}, \quad (18)$$

где  $\Pi$  – количество поставщиков и потребителей;  $\Phi$  – стоимость основных производственных фондов.

Формулы (15)–(18) могут корректироваться посредством введения поправочных коэффициентов, учитывающих особенности реального производства и его динамику. При этом определение коэффициентов носит статистический усредненный характер. Статистика набирается на основе данных передовых в технологическо-информационном и организационном отношении предприятий. Передовыми предприятиями считают организации, в которых численность аппарата управления ниже, чем расчетная и основные показатели выше средних по отрасли.

Статистические методы нашли широкое распространение при анализе организационных условий и численности персонала предприятий. Используя фактические данные, были построены следующие уравнения, определяющие число структурных единиц организационной структуры от численности персонала предприятия [23]:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,60 + 0,206x, \\ y_2 &= 0,60 + 0,925x, \\ y_3 &= -0,26 + 0,2567x, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $y_1$  – число заместителей начальника отдела;  $y_2$ ,  $y_3$  – соответственно число бюро и групп в отделе;  $x$  – численность служащих отдела.

Существует ряд эмпирических формул для определения числа заместителей директора предприятия:

$$z = 0,0871P_m^{0,3}\Phi_0^{0,1}, \quad (20)$$

где  $P_m$  – численность промышленно-производственного персонала;  $\Phi_0$  – среднегодовая стоимость промышленно-производственных фондов за год, предшествующий плановому.

Основным недостатком приведенных выше регрессионных зависимостей является то, что они построены на известных данных предприятий с уже существующей организационной структурой. В этом случае не учитываются возможности повы-

шения эффективности системы управления на новом предприятии, т.е. представленные формулы отражают процесс управления на уже существующих предприятиях со сложившейся, очень часто далекой от оптимальности, организационной структурой.

В работе [24] приведена модель оптимизационной структуры на основе заданного объема работ в установленное время. В этом случае внутренняя структура определяется максимальной загрузкой исполнителей подразделения. Если загрузка информационных и материальных потоков изменяется, то изменяется и внутренняя организационная структура. О нерастраченных ресурсах работы подразделения можно судить только с течением времени при выполнении объема работ, типичных для данного подразделения. В терминах теории линейного программирования математическая модель строится с учетом нелинейной формы [23]

$$F = \sum_{i=1}^n c_i \left( T_i - \sum_{j=1}^m t_{ij} \right) \text{sign} \sum_{j=1}^m t_{ij}, \quad (21)$$

где  $n$ ,  $m$  – соответственно число исполнителей и видов работ;  $i$ ,  $j$  – индексы исполнителя и вида работы ( $i=1, \dots, n$ ;  $j=1, \dots, m$ );  $T_i$  – фонд рабочего времени  $i$ -го исполнителя;  $\lambda_{ij}$  – доля работы  $j$ -го вида, которая может быть выполнена  $i$ -м исполнителем в единицу времени;  $c_i$  – штраф за единицу времени не использования  $i$ -го исполнителя;  $t_{ij}$  – продолжительность времени работы исполнителя  $i$  над работой вида  $j$ .

Функционал (21) по условию задачи должен минимизироваться при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} t_{ij} = 1, & j = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^n t_{ij} \leq T_i, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (22)$$

Система уравнений (21)–(22) является одной из разновидностей математической модели управления организационной структурой.

В работе [25] предложен один из вариантов целевой функции, который позволяет рассмотреть многоэкстремальные функции организационной структуры:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i \times \left[ \left( T_i - \sum_{j=1}^m t_{ij} \right) \exp \left( -M \sum_{j=1}^m t_{ij} \right) + \sum_{j=1}^m t_{ij} \right] \rightarrow \max. \quad (23)$$

Анализируя представленные математические модели оптимизации организационной структуры, был сделан вывод о том, что наиболее близкими

к практической реализации являются модели, базирующиеся на временных параметрах движения материально-информационных потоков. В связи с этим представляет научный и практический интерес создание как общих, так и специально ориентированных для конкретного предприятия моделей, позволяющих оптимизировать организационную структуру компонентов управления.

Рассмотрим один из возможных вариантов математической модели организационной структуры, учитывая временные характеристики работы блоков управления предприятия. Ниже представлена модель, позволяющая учесть временные характеристики перемещения материально-информационных потоков между блоками управления организационной структуры предприятия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \Pi_{i1} t_{i1} = 1, \\ \sum_{i=1}^n \Pi_{i2} t_{i2} = 1, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \Pi_{im} t_{im} = 1, \\ \sum_{j=1}^m t_{1j} \leq T_1, \\ \sum_{j=1}^m t_{2j} \leq T_2, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m t_{nj} \leq T_n, \\ F = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_i (B_{ij} - t_{ij}), \end{array} \right. \quad (24)$$

где  $B_{ij}$  – фонд рабочего времени  $i$ -го компонента организационной структуры над материально-организационным потоком вида  $j$ ;  $T_1, T_2, \dots, T_n$  – ограничители временных промежутков работы организационной структуры;  $\Pi_{ij}$  – доля продукции  $j$ -го вида, которая выполняется  $i$ -м элементом организационной структуры в единицу времени;  $c_i$  – материальные затраты (стоимость) на временные «простои» системы управления в работе на единицу времени;  $t_{ij}$  – продолжительность времени работы  $i$ -го компонента организационной структуры над материально-организационным потоком вида  $j$ ;  $m$  – число видов материально-организационных потоков в организационной структуре;  $n$  – число элементов организационной структуры.

Таким образом, представленная модель отличается от известных видом целевой функции и системой ограничений, накладываемых на объемы продукции и продолжительность времени работы

компонентов организационной структуры. В дальнейшем эта модель будет усовершенствована в терминах нестационарного и стационарного времени работы блоков управления организационной структурой металлургического предприятия.

### Литература

1. Байков Н., Русинов Ф. Организация и эффективность управления производством. М.: Московский рабочий, 1973.
2. Организационные структуры управления производством. М.: Экономика, 1975.
3. Орлов С. А. и др. Опыт создания промышленных комплексов. М., 1972.
4. Рипе Дж. Производственные системы: планирование, анализ, контроль. М.: Экономика, 1972.
5. Совершенствование организации управления в отрасли промышленности. М.: Изд-во МГУ, 1972.
6. Совершенствование управления экономикой стран СЭВ. М.: Наука, 1974.
7. Структура управления промышленностью в странах СЭВ. М.: Мысль, 1973.
8. Рдикян А. З. Вопросы планирования развития производства и совершенствования производственных структур в промышленности. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1978.
9. Бронштейн Ф. И., Цвиркун А. Д. Об иерархических системах управления // Автоматика и телемеханика. 1968. №1.
10. Заиченко Ю. П., Печурин Н. К., Томашевский В. Н. Синтез рациональной структуры управления для одного класса производственных систем // Управляющие системы и машины. 1975. №2.
11. Литвинцев А. В. Метод статистического анализа использования учетных документов по форме и содержанию при внедрении АСУ // Механизация и автоматизация управления. 1970. №4.
12. Абрайтис Л. В. Алгоритм для определения максимально связанных наборов элементов // Автоматика и вычислительная техника. 1980. №5.
13. Дорофеев А. А. Алгоритмы автоматической классификации // Автоматика и телемеханика. 1971. №12.
14. Дюран Б., Одеол П. Кластерный анализ. М.: Статистика, 1977.
15. Куперштох В. Л., Миркин Б. Г. Некоторые задачи классификации // Математические методы решения экономических задач. Новосибирск: Наука, 1971.
16. Лейбкинд А. Р., Рудник Б. Л., Чухнов А. И. Модели формирования организационных структур // Экономика и математические методы. 1980. Т.16. Вып.1.
17. Полтерович В. М. Оптимальное разбиение производственных систем и кратчайшие сети. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1969.
18. Функция и структура органов управления, их совершенствование. М.: Экономика, 1973.
19. Дудорин В. И., Сиротин А. В. Моделирование организационных структур управления. М.: МИУ им.С.Орджоникидзе, 1976.
20. Власюк Б. А., Моросанов М. С. Синтез иерархической структуры управления в больших системах // Автоматика и телемеханика. 1973. № 3.
21. Дудорин В. И., Сиротин А. В. Моделирование организационных структур управления. М.: МИУ им.С.Орджоникидзе, 1976.
22. Построение аппарата управления на предприятиях и в производственных объединениях // Межотраслевые методические рекомендации. М.: НИИ труда, 1974.
23. Разработка нормативов численности служащих и типовых структур аппарата управления предприятий и производственных объединений // Методические указания. М.: НИИ труда, 1972.
24. Лагоша В. А., Шаркович В. Г. Анализ и синтез в системах отраслевого управления. М.: Наука, 1978.
25. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967.