УДК 539.3

РАСЧЁТ УПРУГОЙ ДОРОЖНОЙ ПОЛОСЫ МЕТОДОМ ОПЕРАТОРНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Акимов Валерий Алексеевич *к.ф.-м.н., доцент каф. «Математические методы в строительстве»*
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
vm3_ftk@bntu.by

В данной работе предлагается новый операторный подход решения задач равновесия упругого слоя и полосы. Решение представлено в виде разложения в степенные ряды по одной из переменной и коэффициентами-функциями двух других переменных.
Ключевые слова: упругая дорожная полоса; расчёт; метод операторных степенных рядов.

В работах [1] и [2], насчитывающих, соответственно, более 130 и 200 литературных источников, проделан обзорный анализ приведения трёхмерной задачи теории упругости к двумерной. Особое внимание заслуживает символический метод А.И. Лурье [4], метод начальных функций В.В. Власова [5], а также работы по операторным методам Яна Микусинского [6], В.П. Маслова [7], В.А. Садовничего [8], с которыми, в первую очередь, производилось сопоставление разрабатываемого автором операторного метода. Ранее решение представлялось в виде разложения в тригонометрические ряды по одной из переменных с коэффициентами в виде функций от двух других переменных.

Запишем уравнения равновесия упругого слоя в декартовой пространственной системе координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

Здесь обозначено $\gamma = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} = \dfrac{1}{1-2\nu}$, где λ и μ-коэффициенты Ламе, а ν-коэффициент Пуассона упругой изотропной среды. Перепишем эти уравнения в более простом виде:

$$\nabla^2 u + \gamma\partial_1\theta = 0 \quad \nabla^2 v + \gamma\partial_2\theta = 0 \quad \nabla^2 w + \gamma\partial_3\theta = 0$$

(2)

Здесь обозначено: $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \Delta^2 + \partial_3^2$; $\Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$;

$$\theta = \partial_1 u + \partial_2 v + \partial_3 w \quad (3)$$

Для простоты изложения материала разобьём задачу на две: ЗАДАЧУ А (растяжение-сжатие упругого тела) и ЗАДАЧУ Б (изгиб упругого тела).

Решение ЗАДАЧИ А ищем в виде степенных рядов

$$u = u_0 + u_2\frac{z^2}{2!} + u_4\frac{z^4}{4!} + u_6\frac{z^6}{6!} + \cdots + u_{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

(4)

$$v = v_0 + v_2\frac{z^2}{2!} + v_4\frac{z^4}{4!} + v_6\frac{z^6}{6!} + \cdots + v_{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$w = w_1 z + w_3\frac{z^3}{3!} + w_5\frac{z^5}{5!} + w_7\frac{z^7}{7!}\cdots + w_{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Здесь коэффициенты перед переменной z являются функциями переменных x и y, то есть

$$u_{2k} = u_{2k}(x,y),\ v_{2k} = v_{2k} = v_{2k}(x,y),\ w_{2k+1} = w_{2k+1}(x,y).$$

Подставляя (4) в (2), с учётом (3), получим:

$$\Delta^2 u_{2k} + u_{2k+2} + \gamma\partial_1\theta_{2k} = 0\ ,\ \Delta^2 v_{2k} + v_{2k+2} + \gamma\partial_2\theta_{2k} = 0\ ,$$

$$\Delta^2 w_{2k+1} + w_{2k+3} + \gamma\theta_{2k+2} = 0.$$

Здесь $\theta_{2k} = \partial_1 u_{2k} + \partial_2 v_{2k} + w_{2k+1}$, $\Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\theta_0 = \partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_1$;

$$u_{2k} = u_{2k}(x,y),\ \ v_{2k} = v_{2k}(x,y),\ \ w_{2k+1} = w_{2k+1}(x,y),\ \ k = 0,1,2,3,\ldots$$

Теперь определим рекуррентные соотношения. Предварительно устанавливаем: $u_2 = -\Delta^2 u_0 - \gamma\partial_1\theta_0$, $v_2 = -\Delta^2 v_0 - \gamma\partial_1\theta_0$, $w_3 = -\Delta^2 w_1 - \gamma\theta_2$.

Тогда $\theta_2 = \partial_1 u_2 + \partial_2 v_2 + w_3 = -\Delta^2\theta_0 - \gamma\Delta^2\theta_0 - \gamma\theta_2$, итак, получаем уравнение $(\gamma+1)\theta_2 = -(\gamma+1)\Delta^2\theta_0$, откуда находим $\theta_2 = -\nabla^2\theta_0$.

Для других коэффициентов также будем иметь:

$$u_4 = -\Delta^2 u_2 - \gamma\partial_1\theta_2,\ \ v_4 = -\Delta^2 v_2 - \gamma\partial_1\theta_2,\ w_5 = -\Delta^2 w_3 - \gamma\theta_4.$$

Тогда $$\theta_4 = \partial_1 u_4 + \partial_2 v_4 + w_5 = -\Delta^2\theta_2 - \gamma\Delta^2\theta_2 - \gamma\theta_4.$$

Как и выше, получаем уравнение $(\gamma+1)\theta_4 = -(\gamma+1)\Delta^2\theta_2$, откуда находим $\theta_4 = -\nabla^2\theta_2$ и так далее а $\theta_6 = \partial_1 u_6 + \partial_2 v_6 + w_7 = -\nabla^2\theta_4$,

и вообще $$\theta_{2k} = (-1)^k \Delta^{2k}\theta_0, \qquad k = 1,2,3,4,\ldots \tag{5}$$

Тогда получим:

$$u_2 = -\Delta^2 u_0 - \gamma\partial_1\theta_0$$

$$u_4 = -\Delta^2 u_2 - \gamma\partial_1\theta_2 = \Delta^4 u_0 + \gamma\Delta^2\partial_1\theta_0 - \gamma\partial_1\theta_2 = \Delta^4 u_0 + 2\gamma\Delta^2\partial_1\theta_0,$$

$$u_6 = -\Delta^2 u_4 - \gamma\partial_1\theta_4 = -\Delta^6 u_0 - 2\gamma\Delta^4\partial_1\theta_0 - \gamma\partial_1\theta_4 = -\Delta^6 u_0 - 3\gamma\Delta^4\partial_1\theta_0,$$

$$u_8 = -\Delta^2 u_6 - \gamma\partial_1\theta_6 = \Delta^8 u_0 + 3\gamma\Delta^6\partial_1\theta_0 - \gamma\partial_1\theta_6 = \Delta^8 u_0 + 4\gamma\Delta^6\partial_1\theta_0.$$

И вообще

$$u_{2k} = (-1)^k[\Delta^{2k}u_0 + k\gamma\Delta^{2k-2}\partial_1\theta_0] = (-1)^k\Delta^{2k}u_0 + \frac{(-1)^k\gamma 2k\Delta^{2k-1}\partial_1}{2\Delta}\theta_0. \tag{6}$$

Аналогично

$$v_{2k} = (-1)^k[\Delta^{2k}v_0 + k\gamma\Delta^{2k-2}\partial_1\theta_0] = (-1)^k\Delta^{2k}v_0 + \frac{(-1)^k\gamma 2k\Delta^{2k-1}\partial_2}{2\Delta}\theta_0 \tag{7}$$

Далее по схожему алгоритму определяем:

$$w_3 = -\Delta^2 w_1 - \gamma\theta_2 = -\Delta^2 w_1 + \gamma\theta_0, \quad w_5 = -\Delta^2 w_3 + \gamma\Delta^2\theta_2 = \Delta^4 w_1 - 2\gamma\Delta^4\theta_0,$$

$$w_7 = -\Delta^2 w_5 + \gamma\Delta^2\theta_4 = -\Delta^6 w_1 + 3\gamma\Delta^6\theta_0.$$

И вообще $$w_{2k+1} = (-1)^k\Delta^{2k}[w_1 - k\gamma\theta_0]. \tag{8}$$

Подставляя найденные рекуррентные соотношения в исходные ряды, получим:

$$u = \cos(z\Delta)\cdot u_0(x,y) - \frac{\gamma z\partial_1\sin(z\Delta)}{2\Delta}\cdot[\partial_1 u_0(x,y) + \partial_2 v_0(x,y) + w_1(x,y)],$$

$$v = \cos(z\Delta)\cdot v_0(x,y) - \frac{\gamma z\partial_2\sin(z\Delta)}{2\Delta}\cdot[\partial_1 u_0(x,y) + \partial_2 v_0(x,y) + w_1(x,y)], \tag{9}$$

$$w = \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta}\cdot w_1(x,y) + \frac{\gamma[\sin z\Delta - z\Delta\cos(z\Delta)]}{2\Delta}\cdot[\partial_1 u_0(x,y) + \partial_2 v_0(x,y) + w_1(x,y)],$$

где $$\Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}\,.$$

Для устранения произвола 3-х функций полагаем

$$u_0 = \frac{\partial_1}{\Delta^2}w_1,\ v_0 = \frac{\partial_2}{\Delta^2}w_1,\ \frac{w_1(x,y)}{\Delta^2} = f(x,y),$$

и тогда окончательно будем иметь:

$$u = [\cos(z\Delta) - \gamma z\Delta\sin(z\Delta)]\partial_1\cdot f(x,y),$$

$$v = [\cos(z\Delta) - \gamma z\Delta\sin(z\Delta)]\partial_2\cdot f(x,y),$$

(10)

$$w = [(\gamma+1)\sin(z\Delta) - \gamma z\Delta\cos(z\Delta)]\Delta\cdot f(x,y).$$

Проведём проверку для этого случая. Находим:

$$\theta_A = \partial_1 u + \partial_2 v + \partial_3 w = [\Delta^2\cos(z\Delta) - \gamma\Delta^3 z\sin(z\Delta)]\cdot f(x,y) +$$

$$+[\Delta^2\cos(z\Delta) + \gamma\Delta^3 z\sin(z\Delta)]\cdot f(x,y) = 2\Delta^2\cos(z\Delta)\cdot f(x,y).$$

С учётом $\nabla^2\cos(z\nabla)=(\Delta^2+\partial_3^2)\cdot\cos(z\nabla)=0$ и

$$\nabla^2\sin(z\nabla)=(\Delta^2+\partial_3^2)\cdot\sin(z\nabla)=0,$$

Устанавливаем $\nabla^2 u=-2\gamma\partial_1\Delta^2\cos(z\Delta)\cdot f(x,y)$ и тогда равенство

$$\nabla^2 u+\gamma\partial_1\theta_A=0$$

тождественно выполняется. Аналогично проверяется правильность второго уравнения равновесия. Для третьего уравнения получим:
$\nabla^2 w=2\gamma\Delta^3 sin(z\Delta)\cdot f(x,y)$, $\partial_3\theta_A=-2\Delta^3\sin(z\Delta)$ и теперь очевидно, что равенство $\nabla^2 w+\gamma\partial_3\theta_A=0$ также выполняется тождественно.

Теперь решим ЗАДАЧУ Б.

Её решение ищем в виде степенных рядов

$$u=u_1z+u_3\frac{z^3}{3!}+u_4\frac{z^5}{5!}+u_6\frac{z^7}{7!}+\cdots+u_{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}u_{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$v=v_1z+v_3\frac{z^3}{3!}+v_5\frac{z^5}{5!}+v_7\frac{z^7}{7!}+\cdots+v_{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}v_{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(11)

$$w=w_0+w_2\frac{z^2}{2!}+w_4\frac{z^4}{4!}+w_6\frac{z^6}{6!}\cdots+w_{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}w_{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Подставляя (11) в (2), с учётом (3), получим:

$$\Delta^2 w_0=(\partial_1^2+\partial_2^2)w_0=0,\ \Delta^2 u_{2k+1}+u_{2k+3}+\gamma\partial_1\theta_{2k+1}=0,$$

$$\Delta^2 v_{2k+1}+v_{2k+3}+\gamma\partial_2\theta_{2k+1}=0\ ,\ \Delta^2 w_{2k}+w_{2k+2}+\gamma\theta_{2k+3}=0.$$

Здесь $\theta_{2k+1}=\partial_1 u_{2k+1}+\partial_2 v_{2k+1}+w_{2k+2}$, $\Delta^2=\partial_1^2+\partial_2^2$, $\theta_1=\partial_1 u_1+\partial_2 v_1+w_2$;

$$u_{2k+1}=u_{2k+1}(x,y),\ \ v_{2k+1}=v_{2k+1}(x,y),\ \ w_{2k+2}=w_{2k+2}(x,y),\ \ k=0,1,2,3,\ldots$$

Теперь определим рекуррентные соотношения. Предварительно устанавливаем: $u_3=-\Delta^2 u_1-\gamma\partial_1\theta_1$, $v_3=-\Delta^2 v_1-\gamma\partial_1\theta_1$, $w_4=-\Delta^2 w_2-\gamma\theta_3$.

Тогда $\theta_3=\partial_1 u_3+\partial_2 v_3+w_4=-\Delta^2 u_1-\gamma\partial_1\theta_1-\Delta v_1-\gamma\partial_2\theta_1-\Delta^2 w_2-\gamma\theta_3.$

Итак, получаем уравнение $(\gamma+1)\theta_3=-(\gamma+1)\Delta^2\theta_1$

Для других коэффициентов также будем иметь:

$$u_5=-\Delta^2 u_3-\gamma\partial_1\theta_3,\ \ v_5=-\Delta^2 v_3-\gamma\partial_1\theta_3,\ \ w_6=-\Delta^2 w_4-\gamma\theta_5.$$

Тогда $\theta_5=\partial_1 u_5+\partial_2 v_5+w_6=-\Delta^2 u_3-\gamma\partial_1\theta_3-\Delta^2 v_3-\gamma\partial_2\theta_3-\gamma\theta_5.$

Как и выше, получаем уравнение $(\gamma+1)\theta_5=-(\gamma+1)\Delta^2\theta_3$,

откуда находим $\theta_5=-\nabla^2\theta_3$ и так далее $\theta_7=\partial_1 u_7+\partial_2 v_7+w_8=-\nabla^2\theta_5$,

и вообще $\theta_{2k+1}=(-1)^k\Delta^{2k}\theta_1,\quad k=1,2,3,4,\ldots$

В результате получим:

$$u_3=-\Delta^2 u_1-\gamma\partial_1\theta_1$$

$$u_5=-\Delta^2 u_3-\gamma\partial_1\theta_3=\Delta^4 u_3+\gamma\Delta^2\partial_1\theta_3-\gamma\partial_1\theta_2=\Delta^4 u_1+2\gamma\Delta^2\partial_1\theta_1$$

$$u_7 = -\Delta^2 u_5 - \gamma\partial_1\theta_5 = -\Delta^6 u_3 - 2\gamma\Delta^4\partial_1\theta_1 - \gamma\partial_1\theta_5 = -\Delta^6 u_1 - 3\gamma\Delta^4\partial_1\theta_1$$

$$u_9 = -\Delta^2 u_7 - \gamma\partial_1\theta_7 = \Delta^8 u_1 + 3\gamma\Delta^6\partial_1\theta_1 - \gamma\partial_1\theta_6 = \Delta^8 u_1 + 4\gamma\Delta^6\partial_1\theta_1.$$

И вообще

$$u_{2k+1} = (-1)^k[\Delta^{2k}u_1 + k\gamma\Delta^{2k-2}\partial_1\theta_1] = (-1)^k\Delta^{2k}u_1 + \frac{\gamma(-1)^k\Delta^{2k}}{2\Delta^2}[(2k+1)-1]\theta_1 \quad (12)$$

Аналогично

$$v_{2k+1} = (-1)^k[\Delta^{2k}v_1 + k\gamma\Delta^{2k-2}\partial_2\theta_1] = (-1)^k\Delta^{2k}v_1 + \frac{\gamma(-1)^k\Delta^{2k}\partial_2}{2\Delta^2}[(2k+1)-1]\theta_1 \quad (13)$$

Далее по схожему алгоритму определяем:

$$w_4 = -\Delta^2 w_2 - \gamma\theta_3 = -\Delta^2 w_2 + \gamma\Delta^2\theta_1 = \Delta^2(-w_2 + \gamma\theta_1),$$

$$w_6 = -\Delta^2 w_4 + \gamma\Delta^2\theta_5 = \Delta^4 w_2 - 2\gamma\Delta^4\theta_1 = \Delta^4(w_2 - 2\gamma\theta_1),$$

$$w_8 = -\Delta^2 w_6 + \gamma\Delta^2\theta_7 = -\Delta^6 w_2 + 3\gamma\Delta^6\theta_1 = \Delta^6(-w_2 + 4\gamma\theta_1).$$

И вообще $$w_{2k} = (-1)^k\Delta^{2k-2}[w_2 - k\gamma\theta_1] \quad (14)$$

Напоминаем, что здесь обозначено: $\Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}$.

Подставляя найденные рекуррентные соотношения в исходные ряды, окончательно получим:

$$u = \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta}\cdot u_1(x,y) + \frac{\gamma\partial_1}{2\Delta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Delta^{2k}(2k+1-1)z^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\theta_1(x,y) =$$

$$= \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta}\cdot u_1(x,y) + \frac{\gamma\partial_1[z\Delta\cos(z\Delta)+\sin(z\Delta)]}{2\Delta^3}\cdot[\partial_1 u_1(x,y) + \partial_2 v_1(x,y) + w_2(x,y)]$$

$$v = \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta}\cdot v_1(x,y) + \frac{\gamma\partial_2}{2\Delta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Delta^{2k}(2k+1-1)z^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\theta_1(x,y) = \quad (15)$$

$$= \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta}\cdot v_1(x,y) + \frac{\gamma\partial_2[z\Delta\cos(z\Delta)+\sin(z\Delta)]}{2\Delta^3}\cdot[\partial_1 u_1(x,y) + \partial_2 v_1(x,y) + w_2(x,y)]$$

$$w = -\frac{\cos(z\Delta)}{\Delta^2}\cdot w_2(x,y) - \frac{\gamma}{2\Delta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2kz^{2k+1}\Delta^{2k}}{(2k+1)!}\cdot\theta_1(x,y) =$$

$$= -\frac{\cos(z\Delta)}{\Delta^2}\cdot w_2(x,y) - \frac{\gamma z\sin(z\Delta)}{2\Delta}\cdot[\partial_1 u_1(x,y) + \partial_2 v_1(x,y) + w_2(x,y)].$$

Здесь, как и выше, для устранения произвола 3-х функций полагаем:

$u_1 = \frac{\partial_1}{\Delta^2}w_2$, $v_1 = \frac{\partial_2}{\Delta^2}w_2$, $\frac{w_2(x,y)}{\Delta^3} = g(x,y)$, и тогда окончательно будем иметь:

$$u = [(\gamma+1)\sin(z\Delta) + \gamma z\Delta\cos(z\Delta)]\partial_1\cdot g(x,y),$$

$$v = [(\gamma+1)\sin(z\Delta) + \gamma z\Delta\cos(z\Delta)]\partial_2\cdot g(x,y), \quad (16)$$

$$w = -[\cos(z\Delta) + \gamma z\Delta\sin(z\Delta)]\Delta\cdot g(x,y).$$

Проведём также проверку и для этого случая. Определяем:

$$\theta_Б = \partial_1 u + \partial_2 v + \partial_3 w = \{\sin(z\Delta) + \gamma[z\Delta\cos(z\Delta) + \sin(z\Delta]\}\Delta^2 \cdot g(x,y) +$$
$$+\{\sin(z\Delta) - \gamma[z\Delta cos(z\Delta) + \sin(z\Delta)\}\Delta^2 \cdot g(x,y) = 2\Delta^2 \sin(z\Delta^2) \cdot g(x,y).$$

С учётом $\nabla^2 \cos(z\nabla) = (\Delta^2 + \partial_3^2) \cdot \cos(z\nabla) = 0$ и $\nabla^2 \sin(z\nabla) = (\Delta^2 + \partial_3^2) \cdot \sin(z\nabla) = 0$, устанавливаем $\nabla^2 u = -2\gamma\partial_1 \Delta^2 \sin(z\Delta) \cdot f(x,y)$ и тогда равенство $\nabla^2 u + \gamma\partial_1\theta_A = 0$ тождественно выполняется. Аналогично проверяется правильность второго уравнения равновесия. Для третьего уравнения получим: $\nabla^2 w = 2\gamma\Delta^3 sin(z\Delta) \cdot f(x,y)$, $\partial_3\theta_A = -2\Delta^3 \sin(z\Delta)$ и теперь очевидно, что равенство $\nabla^2 w + \gamma\partial_3\theta_A = 0$ также выполняется тождественно.

Теперь запишем граничные условия в перемещениях. Для осуществления этой цели воспользуемся хорошо известным в сопротивлении материалов обобщённым законом Гука для нормальных напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) = E\partial_1 u \\ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) = E\partial_2 v \\ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = E\partial_3 w \end{cases}$$

Решив эту систему линейных уравнений, с учётом $E = 2G(1+\nu)$, получим:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\partial_1 u + \nu\partial_2 v + \nu\partial_3 w]$$
$$\sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu}[\nu\partial_1 u + (1-\nu)\partial_2 v + \nu\partial_3 w] \qquad (17)$$
$$\sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu}[\nu\partial_1 u + \nu\partial_2 v + (1-\nu)\partial_3 w]$$

Для касательных напряжений будем иметь

$$\tau_{xy} = G(\partial_2 u + \partial_1 v) \quad \tau_{yz} = G(\partial_3 v + \partial_2 w) \quad \tau_{zx} = G(\partial_1 w + \partial_3 u) \qquad (18)$$

Теперь из выше полученных соотношений, выпишем формулы перемещений упругой среды для случая плоской задачи теории упругости (полосы). Итак, нетрудно получить:

ЗАДАЧА А.

$$u = [\cos(z\partial_1) - \gamma z\partial_1 \sin(z\partial_1)] \cdot f(x) \qquad (19)$$
$$w = [(\gamma+1)\sin(z\partial_1) - \gamma z\partial_1 \cos(z\partial_1)] \cdot f(x)$$

ЗАДАЧА Б.

$$u = [(\gamma+1)\sin(z\partial_1) + \gamma z\partial_1 \cos(z\partial_1)] \cdot g(x) \qquad (20)$$
$$w = -[\cos(z\partial_1) + \gamma z\partial_1 \sin(z\partial_1)] \cdot g(x)$$

Граничным условиям в плоской задаче можно придать следующий вид:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}),$$

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\partial_1 u + \nu\partial_3 w] = G[(\gamma+1)\partial_1 u + (\gamma-1)\partial_3 w],$$

$$\sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu}[\nu\partial_1 u + (1-\nu)\partial_3 w] = G[(\gamma-1)\partial_1 u + (\gamma+1)\partial_3 w] \qquad (21)$$

Здесь G-модуль поперечной упругости; $\gamma = \frac{\lambda+\mu}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu}$, $\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} = \gamma+1$, $\frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{\lambda}{\mu} = \gamma-1$; λ и μ-коэффициенты Ламе; ν-коэффициент Пуассона упругой изотропной среды.

Применим полученные выше формулы к решению конкретной практической задачи. Рассмотрим равновесие упругой изотропной полосы, жестко сцепленной основанием z=0 с неподвижным твердым телом под действием на неё сосредоточенной силы. В этом случае перемещения $u_0 = u\big|_{z=0}$ и $w_0 = w\big|_{z=0}$ тождественно равны нулю $u_o = 0$, $w_0 = 0$ (рис.1).

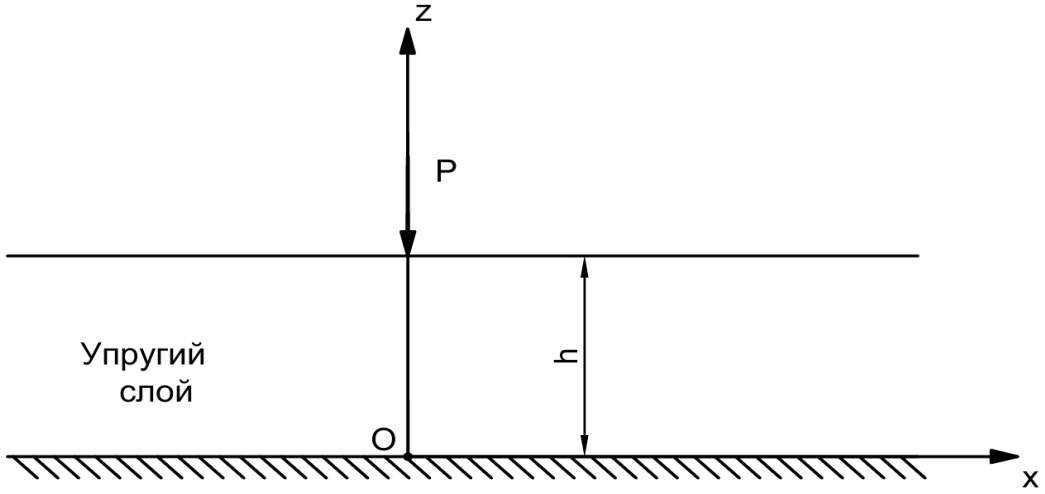

Рисунок 1

Перепишем уравнения (19) и (20) в эквивалентном виде:

<u>Задача А.</u> $u = -\frac{1}{2}\gamma z \sin(z\partial_1) f(x)$;

$$w = \frac{1}{2}\left[(\gamma+2)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1} - \gamma z\cos(z\partial_1)\right] f(x) \qquad (22)$$

<u>Задача Б.</u> $u = \frac{1}{2}\left[(\gamma+2)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1} + \gamma z\cos(z\partial_1)\right] g(x)$;

$$w = -\frac{1}{2}\gamma z \sin(z\partial_1) g(x) \qquad (23)$$

где $\gamma = \frac{1}{1-2\nu}$ ν- коэффициент Пуассона, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, *f(x)* и *g(x)* - произвольные функции. Формулы (22) и (23) тождественно удовлетворяют граничному условию $u_0 = u\big|_{z=0} = 0$, $w_0 = w\big|_{z=0} = 0$ и уравнению равновесия внутри области $\nabla^2 u + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$; $\nabla^2 w + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$, где u и w- соответственно горизонтальное и вертикальное перемещение частиц упругой среды,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Составим выражения для напряжений

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \text{ и } \sigma_z = G[(\gamma - 1)\frac{\partial u}{\partial x} + (\gamma + 1)\frac{\partial w}{\partial z}]$$

В результате получим:

<u>Задача *А*.</u>

$$\tau_{zx} = G\left[\sin z\partial_1 - \gamma z\partial_1 \cos z\partial_1\right] f(x); \qquad (24)$$
$$\sigma_z = G\left[(\gamma + 1)\cos z\partial_1 + \gamma z\partial_1 \sin z\partial_1\right] f(x)$$

<u>Задача Б.</u>

$$\tau_{zx} = G\left[(\gamma + 1)\cos z\partial_1 - \gamma z\partial_1 \sin z\partial_1\right] g(x); \qquad (25)$$
$$\sigma_z = -G\left[\sin z\partial_1 + \gamma z\partial_1 \cos z\partial_1\right] g(x)$$

Полагая $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-i\lambda x} d\lambda$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-i\lambda x} d\lambda$

и используя теорему о дифференцировании под знаком интеграла по параметру *x*, получим: $f^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^n A e^{-i\lambda x} d\lambda$,

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^n B e^{-i\lambda x} d\lambda$$

На основании этих формул устанавливаем

$$\left[\sin(z\partial_1)\right] f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(iz\lambda) A e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A sh(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$\left[\cos(z\partial_1)\right] f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A ch(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \qquad (26)$$

$$\left[z\partial_1 \sin(z\partial_1)\right]f(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Az\cdot sh(z\lambda)\frac{d}{dx}(e^{-i\lambda x})d\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A\lambda z\cdot sh(z\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$\left[z\partial_1 \cos(z\partial_1)\right]f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Az\cdot ch(z\lambda)\frac{d}{dx}(e^{-i\lambda x})d\lambda = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Az\lambda\cdot ch(z\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

Аналогичные соотношения получаются и для функций $g(x)$. Используя (10), запишем выражения для напряжений

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{rz}}{G} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Ai\left[\gamma z\lambda\cdot chz\lambda - sh(z\lambda)\right]\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda + \\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} B\left[(\gamma+1)\,ch(z\lambda) + \gamma z\lambda\cdot sh(z\lambda)\right]\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda;\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{zz}}{G} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A\left[(\gamma+1)ch(z\lambda) - \gamma z\lambda\cdot sh(z\lambda)\right]\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda + \\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Bi\left[sh(z\lambda) + \gamma z\lambda\cdot ch(z\lambda)\right]\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda.\end{aligned}$$

Рассмотрим случай сжатия полосы сосредоточенной силой P, приложенной в точке x=0, $z=h$ перпендикулярно верхнему основанию. Тогда $\tau_{rz}(z=h)=0$; $\sigma_{zz}(z=h) = -P\delta(x)$, где $\delta(x)$-дельта функция. Умножим уравнение (27) на

$e^{i\lambda x}dx$ и проинтегрируем по всей длине полосы. Используя основную формулу интегрального преобразования Фурье

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}du\right\}e^{i\lambda x}dx$$

и свойство дельта функции $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{i\lambda x}dx = 1$, получим для определения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ систему уравнений при $z=h$.

$$\begin{cases} Ai\left[\gamma h\lambda\cdot ch(h\lambda) - sh(h\lambda)\right] + B\left[(\gamma+1)\cdot ch(h\lambda) + \gamma h\lambda\cdot sh(h\lambda)\right] = 0 \\ A\left[(\gamma+1)\cdot ch(h\lambda) - \gamma h\lambda\cdot sh(h\lambda)\right] + Bi\left[sh(h\lambda) + \gamma h\lambda\cdot ch(h\lambda)\right] = -\dfrac{P}{\sqrt{2\pi}G}\end{cases}$$

Вычисляем определитель полученной системы

$$\Delta = sh^2(h\lambda) - (\gamma+1)^2 ch^2(h\lambda) - \gamma^2 h^2\lambda^2$$

и находим A и B

$$A = -\frac{\left[\gamma \cdot ch(h\lambda) + (\gamma - 1) h\lambda \cdot sh(h\lambda)\right] P}{\sqrt{2\pi} G\Delta}; \qquad B = \frac{\left[(\gamma - 1) h\lambda \cdot ch(h\lambda) - sh(h\lambda)\right] P\, i}{\sqrt{2\pi} G\Delta}$$

Приведем расчетные формулы для напряжений в заделанном основании z=0:

$$\tau_{zx} = \frac{2(\gamma+1)P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma h\lambda \cdot ch(h\lambda) - (\gamma+1) sh(h\lambda)}{sh^2(h\lambda) - (\gamma+1)^2 ch^2(h\lambda) - \gamma^2 h^2 \lambda^2} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{2(\gamma+1)P}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\gamma+1) ch(h\lambda) + \gamma h\lambda \cdot sh(h\lambda)}{sh^2(h\lambda) - (\gamma+1)^2 ch^2(h\lambda) - \gamma^2 h^2 \lambda^2} \cos(\lambda x) d\lambda \ .$$

С учетом $\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 = (1-2\nu)^2, \left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^2 = 4(1-\nu)^2$ определяем:

$$\Delta = sh^2(h\lambda) - (\gamma+1)^2 ch^2(h\lambda) - \gamma^2 h^2 \lambda^2 = (\gamma-1)^2 \left[(1/\gamma)^2 sh^2(h\lambda) - (\gamma + 1/\gamma)^2 \cdot\right.$$

$$\cdot ch^2(h\lambda) - h^2\lambda^2 = \gamma^2 \left[(1-2\nu)^2 sh^2(h\lambda) - 4(1-\nu)^2 (sh^2(h\lambda) + 1) - h^2\lambda^2\right] =$$

$$= -\gamma^2 \left[(3-4\nu) sh^2(h\lambda) + h^2\lambda^2 + 4(1-\nu)^2\right].$$

Вынося в числителе выражений τ_{zx} и σ_{zx} за скобки множитель $(1-\nu)$, после элементарных преобразований получим:

$$\tau_{zx}\big|_{z=0} = \frac{2(1-\nu)P}{\pi h} \int_0^\infty \frac{\mu \cdot ch(\mu) - (1-2\nu) sh(\mu)}{(3-4\nu) sh^2(\mu) + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \sin\left(\mu \frac{x}{h}\right) d\mu,$$

$$\sigma_z\big|_{z=0} = -\frac{2(1-\nu)P}{\pi h} \int_0^\infty \frac{\mu \cdot sh(\mu) + 2(1-\nu) ch(\mu)}{(3-4\nu) sh^2(\mu) + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} \cos\left(\mu \frac{x}{h}\right) d\mu,$$

где принято $\mu = \lambda h$. Полученный результат совпадает с классическим [9, стр. 40-41], что доказывает достоверность нового операторного метода степенных рядов.

Литература:

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости: Диссертация канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Минск, 1992 – 136 с.
2. Крушевский А.Е. Введение в аналитическую механику упругих тел. – Минск: БНТУ, 2004. – 335 с.
3. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости: Монография – Минск: УП «Технопринт», 2003. – 101 с.

4. Лурье А.И. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / А.И. Лурье// Труды Ленингр. индустр. ин-та. 1937. – Т.3, №6. – с. 31-36.

5. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики: Москва, Стройиздат, 1975. – 223 с.

6. Микусинский Ян. Операторное исчисление. Москва: Издательство иностр. лит., 1956. – 367 с.

7. Маслов В.П. Операторные методы. Москва: Наука, глав. редакция физ. мат. литературы. 1973. – 544 с.

8. Садовничай В.А. Теория операторов. М.: Изд-во Московского Ун-та «Дрофа», 2004.-385 с.

9. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в теории упругости. //АН СССР, М.-Л., 1963. — 367 с.