

Напряжения будут иметь вид

$$Z_r = r^{-1} \left[\frac{r^2}{2} K_z + \frac{r}{\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) \right] - \frac{r}{2} K_z - \frac{1}{\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) + \frac{\beta_0}{24} \left(12 \frac{\beta^2}{\beta_0^2} - 1 \right) (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) + G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha (A_{\text{Окс}} / r / \alpha - 1 - B_{\text{Окс}} / r / \alpha - 1) + \frac{d}{dr} W_{\text{Окс}}^* \right] \cos \frac{2\pi k \beta}{\beta_0};$$

$$B_z = \frac{\beta}{\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) - G \sum_{k=1}^{\infty} \alpha (A_{\text{Окс}} / r / \alpha - 1 + B_{\text{Окс}} / r / \alpha - 1 + \frac{1}{r} W_{\text{Окс}}^*) \sin \frac{2\pi k \beta}{\beta_0}; \quad R_r = B_r = B_\beta = Z_z = 0.$$

Граничные условия на всех гранях выполняются точно. Полученное решение удовлетворяет уравнениям Ламе.

Резюме. Дается применение рядов Фурье с дополнительными членами для решения задачи изгиба цилиндрического сектора, у которого одна из цилиндрических поверхностей закреплена, вторая свободна от нагрузки, продольные торцы нагружены касательными усилиями одного направления, а поперечные торцы имеют нулевые нормальные напряжения и касательные перемещения.

Л и т е р а т у р а

1. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М., 1966.

УДК 624.072.2.042

П.В. Алявдин, канд. техн. наук

ОПТИМИЗАЦИЯ БАЛОК И ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Рассматривается задача оптимизации нелинейно упругих балок и плит, лежащих на слое конечной толщины. Используемая модель обобщает модели полупространства, полуплоскости и винклеровского основания. В качестве критерия жесткости при-

нимается разность прогибов центра и кромки плиты. Требуется минимизировать модуль этой величины. Для жестких или коротких балок и плит под действием локальных нагрузок в центре это равносильно выравниванию давления на упругое основание, что повышает его несущую способность. Для длинных балок и плит задача сводится по существу к уменьшению максимальных прогибов конструкции, т.е. к увеличению общей жесткости системы. В данной работе для сформулированной проблемы оптимального управления предлагается эффективный метод последовательных приближений, формирующий практическое решение уже на первых итерациях. При этом производится неоптимизационный расчет некоторой заданной системы "конструкция-основание" и используется решение вспомогательной задачи оптимального управления непосредственно для конструкции. Исследуется влияние типа и характера ограничений на управляющую переменную, в качестве которой принята цилиндрическая жесткость, на оптимальное решение. Показывается, что интегральное ограничение в виде равенства, когда объем задан, может быть нерациональным по сравнению с неравенством, когда объем ограничен.

Рассмотрим свободно лежащую на слое конечной толщины нелинейно упругую балку, материал которой подчиняется степенному закону $\sigma = A \varepsilon^{\alpha}$, где A и α - параметры материала. Для линейно упругого материала $\alpha = 1$, $A = E$, E - модуль Юнга. С учетом выражения для кривизны балки [1] и для вертикальных перемещений $w(\tau)$ точек поверхности слоя от действия сосредоточенной нормальной к его границе единичной силы [2]

$$w(\tau) = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi H E_0} \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \alpha \cdot I_0\left(\frac{\tau}{H} \alpha\right)}{\alpha + \text{sh} \alpha \cdot \text{ch} \alpha} d\alpha,$$

где $I_0(\tau \alpha / H)$ - функция Бесселя 1-го рода 0-го порядка; H , E_0 , μ_0 - толщина слоя, модуль деформации и коэффициент Пуассона основания, уравнение состояния системы "конструкция-основание" примет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ D(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} v(p(x), x) \right]^{\alpha} \right\} = -p(x) + q(x). \quad (1)$$

Здесь $v(x)$ – вертикальные перемещения балки в точках с координатами x ,

$$v(p(x), x) = \int_0^{c+x} p(x-\tau) w(\tau) d\tau + \int_0^{c-x} p(x+\tau) w(\tau) d\tau;$$

начало координат расположено в центре балки; $2c$ – длина балки; $p(x)$, $q(x)$ – реактивное давление и внешняя нагрузка; $D(x)$ – управляющая переменная, жесткость поперечного сечения балки на изгиб. В случае прямоугольного поперечного сечения $b \cdot h(x)$

$$D(x) = 2 A b (h/2)^{\alpha+2} / (\alpha+2).$$

Для пластины на упругом основании в условиях плоской деформации уравнение цилиндрического изгиба имеет вид, аналогичный (1). Если материал пластины линейно упругий, $\alpha = 1$, необходимо заменить модуль Юнга E приведенным модулем $E_1 = E/(1 - \mu^2)$, где μ – коэффициент Пуассона материала, и все нагрузки привести к единичной ширине $b = 1$. Для пластины из нелинейно упругого материала можно использовать метод "упругих решений" [3], последовательно уточняя величину E_1 .

Уравнение (1) описывает также изгиб балок или плит на упругом полупространстве при $H \rightarrow \infty$ и на винклеровском основании с коэффициентом пропорциональности $K = (1 - \mu_0) E_0 [(1 - 2\mu_0)(1 + \mu_0)]^{-1}$ при $H \rightarrow 0$. Случай плоской деформации может быть исследован и при $b/c \rightarrow \infty$ или при другом $w(\tau)$ [2].

Условия на границе правой половины балки или плиты с учетом симметрии конструкции и нагрузки относительно центра примут вид

$$v'''(0) = 0; \quad v'(0) = 0; \quad v'''(c) = 0; \quad v''(c) = 0, \quad (2)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по x .

Оптимизационная задача состоит в определении такого распределения жесткостей поперечных сечений $D(x)$, при котором вертикальное перемещение кромки балки или плиты относительно ее середины минимально

$$\min |v(c) - v(0)|. \quad (3)$$

Ограничения на управляющую переменную могут быть локальными

$$D_-(x) \leq D(x) \leq D_+(x), \quad (4)$$

или (и) интегральным в случае ограничения объема

$$\int_0^c D(x)^{1/(\varepsilon+2)} dx \leq L; \quad L = \frac{V_0}{4b} \left(\frac{2Ab}{\varepsilon+2} \right)^{1/(\varepsilon+2)}, \quad (5)$$

где $D_-(x)$, $D_+(x)$, V_0 - функции предельных жесткостей и величина объема балки или плиты, заданные из условия совместности неравенств (4) и 5).

Избавимся от ограничения (5), вводя дополнительную переменную v_1 при помощи уравнения

$$v_1' = D^{1/(\varepsilon+2)} \quad (6)$$

и условий на концах

$$v_1(0) = 0; \quad v_1(c) \leq L. \quad (7)$$

В случае фиксированного объема неравенства в (5) и (7) заменяются равенствами.

Таким образом, сформулирована замкнутая задача оптимального уравнения (3) для системы (1), (6) с условиями и ограничениями (2), (4) и (7). В связи с тем что решение поставленной задачи на основе стандартной вычислительной методики [4, 5] оказалось сложным, в данной работе для нее разработан специальный метод последовательных приближений.

В качестве начального приближения возьмем любую функцию жесткости сечений из допустимого множества, определяемого ограничениями (4) и (5). Например, для ограничения (5) в виде неравенства примем $D_0(\bar{x}) = D_-(x)$.

Пусть уже найдено k -е приближение $D_k(x)$. Соответствующие этому уравнению $v_k(x)$ и $p_k(x)$ определим с требуемой точностью путем численного решения на ЭВМ уравнения (1) при соблюдении условий (2), например с помощью стандартной программы для расчета линейно упругих балок на слое конечной толщины [6, 7]. Учет нелинейности работы материала выполним методом "упругих решений" путем организации внутреннего итерационного процесса. Здесь же можно учесть нелинейный эффект односторонней связи конструкции с основанием, последовательно уточняя границы зон отрыва.

Опишем построение $D_{k+1}(x)$. Используем видоизмененное уравнение состояния (1), заменив в нем переменную $p_{k+1}(x)$,

зависящую от $D_{k+1}(x)$, на $p_k(x)$, и исключив в левой части (1) зависимость $v_{k+1}(x)$ от $p_k(x)$

$$\left\{ D_{k+1}(x) \left[v_{k+1}''(x) \right]^\varepsilon \right\}'' = -p_k(x) + q(x). \quad (8)$$

Физически это означает, что вместо реального основания, непосредственно связанного и активно взаимодействующего с балкой, на последнюю действует лишь его пассивное давление, найденное из предыдущей итерации. Обратная связь "балка-основание" учитывается в процессе приближений на каждом шаге с помощью решения точного уравнения (1).

С учетом принятого упрощения исходная задача (3) превращается во вспомогательную, решение которой получается в аналитической форме. Для этого уравнение (8), дважды проинтегрировав, приведем к виду

$$v_{k+1}'' = -M_{k+1}(x)^{1/\varepsilon} D_{k+1}(x)^{-1/\varepsilon}, \quad (9)$$

где $M_{k+1}(x)$ - изгибающий момент в сечении балки или плиты, с учетом формулы Коши, равный

$$M_{k+1}(x) = \int_0^x (q(x) - p_k(x))(x - \tau) d\tau + Q_0 x + M_0,$$

$Q_0, M_0 = M_{k+1}(0)$ - постоянные интегрирования, определяемые из двух последних условий (2). Два оставшихся условия (2) удобнее преобразовать, перенося начало координат в центр деформированной конструкции:

$$v_{k+1}(0) = 0; \quad v_{k+1}'(0) = 0. \quad (10)$$

Задача (3), (6), (7), (9) и (10) представляет собой задачу Майера с закрепленным левым концом и с перемещающимся многообразием, заданным с помощью равенств или неравенств, на правом. Приведем уравнение (9) к нормальной форме и используем необходимые условия оптимальности на основе принципа максимума Понтрягина [4, 5]. Сформулируем сопряженную систему и проинтегрируем ее с учетом условий трансверсальности. Далее составим функцию Гамильтона.

Для оптимальности управления $D_{k+1}(x)$ при ограничении - неравенства (7) необходимо, чтобы для некоторого числа $\psi \geq 0$ при каждом x функция Гамильтона достигала максимума по всем допустимым управлениям. В случае ограничения-ра-

венства в (7), объем задан, число ν не ограничено [5]. Вычисляя максимум, получим решение вспомогательной задачи о балке максимальной жесткости

$$D_{k+1}^*(x) = \left\{ \min \left\{ D_+(x); D_{k+1}^0(x) \right\}; \max \left\{ D_-(x); D_{k+1}^0(x) \right\} \right\}, \quad (11)$$

где $D_{k+1}^0(x) = \left[(\varepsilon + 2)(c - x) M_{k+1}(x)^{1/\varepsilon} / \varepsilon \nu \right] \varepsilon(\varepsilon + 2) / 2(\varepsilon + 1)$.

Для плиты оптимальное решение имеет аналогичный вид в соответствии с вышесказанным.

Число ν и координаты точек переключения, определяющих границы участков активных ограничений, определим исходя из условия (5) с учетом (11). Удобно вначале задаваться величиной ν , а затем, найдя оптимальную форму конструкции и ее объем, уточнять последний из условия (5). Такая методика соответствует решению неявно заданного уравнения (5) относительно ν . Здесь оказывается эффективной модификация метода Ньютона [4].

Простым и практически важным является случай, когда фиксируется одна из точек переключения режимов управления. Тогда из (11) непосредственно находим число ν и форму балки или плиты, а из (5) - объем.

Принимая, далее $D_{k+1}(x) = D_k^*(x)$, продолжим итерационный процесс до тех пор, пока не будет выполняться условие

$$|D_{k+1}(x) - D_k(x)| \leq \varepsilon_0; \quad \varepsilon_0 > 0,$$

где ε_0 - заданное малое число.

Вычислительный опыт свидетельствует о высокой скорости "экспериментальной" сходимости предлагаемого метода. Часто уже первая итерация дает практически приемлемое решение. Таким образом, с известной осторожностью для оптимизации балок и плит можно использовать простую формулу (11), имея результаты неоптимизационного расчета конструкции на упругом основании.

Приведем пример, иллюстрирующий скорость сходимости метода. Рассмотрим балку ограниченной высоты, нагруженную в центре сосредоточенной силой P . Задана координата точки переключения x_+ , однозначно связанная с объемом материала. Примем $\varepsilon = 1$, $H = 2$ м, $E_0 = 10$ МПа, $\mu_0 = 0,35$; $b = 1$ м, $D_- = 3 \cdot 10^5$ МНм²; $D_+ = 3 \cdot 10^6$ МНм²; $x_+ = 3,0$ м. Полу-

чено следующее изменение объема (в м³) по итерациям, начиная с нулевой: 9,578; 13,350; 13,383. Дальнейшим уточнением можно пренебречь. Приведем оптимальную высоту балки кусочно-постоянного сечения для каждого i -го участка (h_i , Δx_i), м: (1,062; 3,000); (0,947; 1,333); (0,711; 1,333); (0,456; 1,333); (0,229; 3,000). По формуле (11) можно получить и непрерывную функцию высоты балки, при этом ее объем и жесткость изменятся незначительно. По сравнению с балкой того же объема, но постоянной высоты $h = 0,66915$ м, оптимальное решение имеет на 35% большую жесткость, на 39% уменьшает разность давлений на основание и позволяет увеличить нагрузку P на балку на 26%.

Отметим, что прочность конструкции обеспечивается за счет выбора соответствующих ограничений высоты и (или) объема.

Принятый выше степенной закон деформирования при $\alpha = 1$ отражает линейную, а при $0 < \alpha < 1$ - нелинейно упругую работу материала. При $\alpha = 0$ материал приближается к жесткопластическому. Этот же закон справедлив для описания процесса установившейся ползучести, если деформации в нем заметить их скоростями.

Рассмотренная здесь вспомогательная задача является обратной по отношению к прямой задаче оптимизации балки минимального объема и заданной прочности или жесткости [8] в условиях ползучести при аналогичном степенном законе деформирования. Поэтому, используя в предлагаемой итерационной процедуре вместо решения (11) вспомогательной задачи решение работы [8], получим проект балки минимального веса, лежащей на упругом основании и работающей в состоянии установившейся ползучести или при пластических деформациях.

Для конструкции из линейно упругого материала, $\alpha = 1$, оптимальная форма не зависит от параметра нагрузки.

При одном и том же объеме материала жесткость балки или плиты больше в случае активных ограничений по объему по сравнению с активными ограничениями на высоту, особенно при знакопеременной функции изгибающего момента.

Ограничение на объем материала следует задавать в виде неравенства. Ограничение в виде равенства оказывается нерациональным, если величина фиксированного объема превышает величину оптимального объема конструкции, полученную при учете только ограничений на высоту.

Численные эксперименты показывают существование оптимальной длины балки максимальной жесткости при ограничении

сверху только на ее высоту. За пределами этой длины балка или вырождается, или, с учетом ограничений снизу, имеет меньшую жесткость.

Резюме. В работе сформулирована и решена задача оптимизации линейно и нелинейно упругих балок и плит на упругом основании при ползучести, и указаны свойства конструкций максимальной жесткости.

Л и т е р а т у р а

1. Филин А.П. Определение лишних неизвестных в физически нелинейных статических и неопределимых стержневых системах. - "Докл. АН СССР". Т. 89, 1953, № 4.
2. Егоров К.Е. К вопросу деформаций основания конечной толщины. - В сб.: Механика грунтов, 1958, № 34.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. М., 1948.
4. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М., 1975.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.
6. Программа автоматического расчета балок на упругом слое конечной толщины в условиях пространственной задачи на ЭВМ "Минск-22", вып. 1-144, М., 1971.
7. Александров В.М., Шацких Л.С. Универсальная программа расчета балочных плит на линейно-деформируемом основании. - "Труды УП Всесоюз. конф. по теории пластинок и оболочек". М., 1970.
8. Леллеп Я.А. Оптимальное проектирование балок в условиях установившейся ползучести. - "Известия АН СССР. Механика твердого тела", 1977, № 1.

УДК 531.8

Л.А. Борисенко

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИНЕРЦИОННОГО ТРАНСФОРМАТОРА МОМЕНТА С ИМПУЛЬСАТОРОМ ХОББСА

Схема инерционного трансформатора момента с импульсатором Хоббса представлена на рис. 1. Он состоит из центрального колеса 1, спутника 2 и водила 3, образующих двухколесный планетарный механизм. На спутнике эксцентрично закреплен груз М.

Выберем в качестве обобщенных координат углы поворота водила θ и спутника φ . Угол поворота центрального колеса ξ выражается через θ и φ в соответствии с известной из кинематики планетарного механизма зависимостью