

Полученное в этом случае решение точно удовлетворяет граничному условию на внешнем контуре и приближенно на внутренних. Внутренние граничные условия будут выполняться тем точнее, чем дальше удалены отверстия друг от друга и от границы и чем меньше $(\frac{\epsilon}{R})^2$.

В частности, в случае действия одного центра расширения в начале координат получим решение задачи Ляме при внешнем давлении равным нулю и $R \rightarrow \infty$.

При этом внешнее условие выполнено точно, а внутреннее — с точностью до $(\frac{\epsilon}{R})^2$. В заключение отметим, что определенным образом задавая $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ и граничные условия, можно получить ряд интересных соотношений для случаев точного удовлетворения всем граничным условиям.

Для многосвязных областей произвольной конфигурации окончательный вид функций комплексного переменного находится аналогично из соответствующих внутренних и внешних граничных условий.

Резюме. Рассмотрен новый метод оценки напряженного состояния некоторых частных задач плоской теории упругости для многосвязных областей.

Л и т е р а т у р а

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 2. Лурье А. И. Теория упругости. М., 1970.

УДК 539.3

Н.Я. Бойко

К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЕКТОРА

Решение задач о равновесии цилиндрического сектора при заданных на торцах касательных напряжениях и нормальных перемещениях или при заданных на торцах нормальных напряжениях и касательных перемещениях ведем на основе вариационного метода перемещений, используя ряды Фурье, неполнота которых на торцах отрезка устраняется дополнительными членами.

Искомые перемещения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U_r &= U_0 + \frac{2z}{h} U_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left(U_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h} + U_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} \right); \\
 U_\beta &= V_0 + \frac{2z}{h} V_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) V_2 + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left(V_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h} + V_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} \right); \\
 U_{\bar{z}} &= W_0 + \frac{2z}{h} W_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) W_2 + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left(W_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h} + W_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} \right).
 \end{aligned}$$

Фигурирующие здесь обобщенные перемещения являются функциями радиальной и угловой координат.

Обобщенные перемещения $U_2, V_2, W_1, U_1, V_1, W_2$ находятся из условий на торцах $z = \pm \frac{h}{2}$ для задачи растяжения или изгиба непосредственной подстановкой.

Для нахождения оставшихся неизвестных обобщенных перемещений представим их рядами по угловой координате в таком же виде, как и по координате z . В дальнейшем используем объемные и поверхностные уравнения.

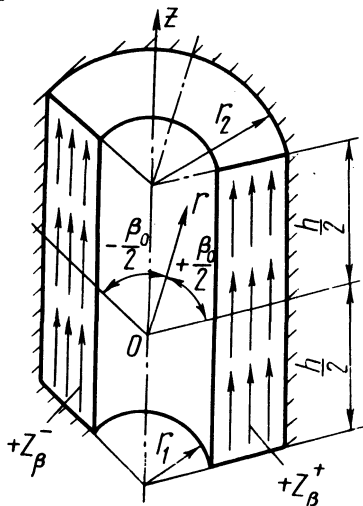


Рис. 1. Изгиб упругого цилиндрического сектора.

Объемные уравнения получены методом ортогонализации уравнений Ламе [1].

Поверхностные уравнения являются следствием удовлетворения краевых условий на гранях $\beta = \pm \frac{\beta_0}{2}$.

Полученные уравнения распадаются на несколько групп, в каждой из которых возможны свои частные задачи.

В данной статье рассматривается частная задача одной из групп уравнений.

Краевые условия для этой задачи (рис. 1):

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad Z_z = u = v = 0 ;$$

$$\text{при } \beta = \pm \frac{\beta_0}{2} \quad R_\beta^+ = 0; \quad B_\beta^+ = 0; \quad + Z_\beta^+ = \text{const} ;$$

$$\text{при } r = r_1 \quad R_r = 0, \quad B_r = 0, \quad Z_r = 0 ;$$

$$\text{при } r = r_2 \quad u_r = u_\beta = u_z = 0 .$$

Эту задачу решают следующие ряды:

$$u_r = \frac{2z}{h} U_1; \quad u_\beta = \frac{2z}{h} V_1 ;$$

$$u_z = W_{00} + \frac{1}{2} (12 \frac{\beta^2}{\beta_0^2} - 1) W_{02} + \frac{1}{2} (12 \frac{z^2}{h^2} - 1) W_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} W_{\text{акс}} \cos \frac{2\pi k \beta}{\beta_0} .$$

Обобщенные координаты W_{00} , W_{02} , $W_{\text{Окс}}$ определяются из уравнений:

$$W_{02} = \frac{r \beta_0}{12 G h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) dz - \frac{r \beta_0}{6 h} \left[V_1 \left(+ \frac{\beta_0}{2} \right) - \right. \\ \left. - V_1 \left(- \frac{\beta_0}{2} \right) \right];$$

$$r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} W_{00} = \frac{12}{\beta_0^2} W_{02} - \frac{2(\gamma-1)}{h \beta_0} \int_{-\frac{\beta_0}{2}}^{\frac{\beta_0}{2}} \left[r \frac{d}{dr} (r U_1) + \right.$$

$$+r \frac{d}{d\beta} V_1] d\beta - \frac{12\gamma r^2}{h^2 \beta_0} \int_{-\frac{\beta_0}{2}}^{\frac{\beta_0}{2}} W_2 d\beta - \frac{r}{Gh\beta_0} \int_{\frac{\beta_0}{2}}^{\frac{\beta_0}{2}} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r \times$$

$$\times (K_z - D \frac{d\tau}{dz}) dz d\beta ;$$

$$(r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{\beta_0^2}) W_{окс} = -\frac{6\cos\pi\kappa}{\pi^2 \kappa^2} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} W_{02} -$$

$$- \frac{4(\gamma-1)}{h \beta_0} \int_{-\frac{\beta_0}{2}}^{\frac{\beta_0}{2}} \left[r \frac{d}{dr} (rU_1) + r \frac{d}{d\beta} V_1 \right] \times$$

$$\times \cos \frac{2\pi\kappa\beta}{\beta_0} d\beta - \frac{12\gamma r}{h^2 \beta_0} \int_{-\frac{\beta_0}{2}}^{\frac{\beta_0}{2}} \left[r W_2 + \frac{h}{6G\gamma} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r \times$$

$$\times (K_z - D \frac{d\tau}{dz}) dz \right] \cos \frac{2\pi\kappa\beta}{\beta_0} d\beta .$$

Дополнительные функции U_1, V_1, W_2 находятся из условий на гортах $z = \pm \frac{h}{2}$:

$$U_1 = \frac{U_z^+ - U_z^-}{2} ; \quad V_1 = \frac{v_z^+ - v_z^-}{2} ;$$

$$W_2 = \frac{h}{12\gamma G} \left[(Z_z^+ + Z_z^-) + D(\tau_z^+ + \tau_z^-) - 2\gamma_2 G \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rU_1) - \right.$$

$$\left. - 2\gamma_2 G \frac{1}{r} \frac{d}{d\beta} V_1 \right] .$$

В результате решения уравнений и удовлетворения краевых условий получаем следующие перемещения:

$$U_r = U_\beta = 0;$$

$$U_z = A + B \ln |r| + W_{00}^* + \frac{1}{2} (12 \frac{\beta^2}{\beta_0^2} - 1) W_{02} + \\ + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (A_{\text{Окс}} |r|^\alpha + B_{\text{Окс}} |r|^{-\alpha} + W_{\text{Окс}}^*) \cos \frac{2\pi\kappa\beta}{\beta_0},$$

$$\text{где: } A = - \ln |r_2| \left[\frac{r_1^2}{2G} K_z + \frac{r_1}{G\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) \right] + \frac{r_2^2}{4G} K_z + \\ + \frac{r_2}{G\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-);$$

$$B = \frac{r_1^2}{2G} K_z + \frac{r_1}{G\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-); W_{02} = \frac{r\beta_0}{12G} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-);$$

$$W_{00}^* = - \frac{r}{G\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) - \frac{r^2}{4G} K_z;$$

$$T = \frac{2 \cos \pi\kappa}{G\beta_0(1-\alpha^2)} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-); A_{\text{Окс}} = \text{TH}(r_2 r_1^{-\alpha-1} + \alpha^{-1} r_2^{-\alpha});$$

$$B_{\text{Окс}} = - \text{TH}(\alpha^{-1} r_2^\alpha - r_2 r_1^{\alpha-1});$$

$$W_{\text{Окс}}^* = - \frac{r\beta_0 \cos \pi\kappa}{2G\pi^2 \kappa^2 (1-\alpha^2)} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-); \alpha = \frac{2\pi\kappa}{\beta_0};$$

$$H = (r_2^\alpha r_1^{-\alpha-1} + r_2^{-\alpha} r_1^{\alpha-1})^{-1}; \delta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}.$$

Здесь ν - коэффициент Пуассона; G - модуль сдвига; K_z - объемная нагрузка, параллельная оси сектора; ζ - закон распределения температуры тела.

Напряжения будут иметь вид

$$Z_r = r^{-1} \left[\frac{r^2}{2} K_z + \frac{r}{\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) \right] - \frac{r}{2} K_z - \frac{1}{\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) + \frac{\beta_0}{24} \left(12 \frac{\beta^2}{\beta_0^2} - 1 \right) (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) + G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha (A_{\text{Окс}} / r / \alpha^{-1} - B_{\text{Окс}} / r / \alpha^{-1}) + \frac{d}{dr} W_{\text{Окс}}^* \right] \cos \frac{2\pi k \beta}{\beta_0};$$

$$B_z = \frac{\beta}{\beta_0} (Z_\beta^+ + Z_\beta^-) - G \sum_{k=1}^{\infty} \alpha (A_{\text{Окс}} / r / \alpha^{-1} + B_{\text{Окс}} / r / \alpha^{-1} + \frac{1}{r} W_{\text{Окс}}^*) \sin \frac{2\pi k \beta}{\beta_0}; \quad R_r = B_r = B_\beta = Z_z = 0.$$

Граничные условия на всех гранях выполняются точно. Полученное решение удовлетворяет уравнениям Ламе.

Резюме. Дается применение рядов Фурье с дополнительными членами для решения задачи изгиба цилиндрического сектора, у которого одна из цилиндрических поверхностей закреплена, вторая свободна от нагрузки, продольные торцы нагружены касательными усилиями одного направления, а поперечные торцы имеют нулевые нормальные напряжения и касательные перемещения.

Л и т е р а т у р а

1. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М., 1966.

УДК 624.072.2.042

П.В. Алявдин, канд. техн. наук

ОПТИМИЗАЦИЯ БАЛОК И ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Рассматривается задача оптимизации нелинейно упругих балок и плит, лежащих на слое конечной толщины. Используемая модель обобщает модели полупространства, полуплоскости и винклеровского основания. В качестве критерия жесткости при-