

$$- C_2 \sin \alpha z);$$

$$U_{30} = \frac{2(3\gamma - 4)}{a^2(5\gamma - 8)} \sqrt{\frac{12(3\gamma - 4)}{a^2\gamma}} (C_1 \cos \alpha z - C_2 \sin \alpha z).$$

Резюме. В предлагаемой статье дается приближенное решение задачи о сжатии прямоугольного параллелепипеда продольной нагрузкой с использованием вариационного уравнения Лагранжа при условии точного выполнения отсутствия нагрузки на его четырех боковых гранях.

Л и т е р а т у р а

1. Ионов В.М., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. М., 1972. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967.

УДК 539.3

В.А. Акимов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Как известно, напряженное состояние плоской задачи теории упругости может быть выражено через две функции комплексного переменного при помощи соотношений Колосова-Мусхелишвили. В случае действия в некоторой области сосредоточенной силы в точке z_0 , относительно выбранной системы координат, эти функции имеют вид

$$\varphi = \frac{x + iy}{2\pi(1+\epsilon)} \ln(z - z_0); \quad (1)$$

$$\psi = \frac{\bar{\epsilon}(X - iy)}{2\pi(1+\epsilon)} \ln(z - z_0) + \frac{\bar{z}_0(X + iy)}{2\pi(1+\epsilon)} \frac{1}{z - z_0}, \quad (2)$$

где X и Y - проекции сил на координатные оси; $\epsilon = 3 - 4\nu$; ν - коэффициент Пуассона.

Получим вид функций φ и ψ в случае действия в фиксированной точке $z_0 = x_0 + iy_0$ области центра расширения. Для этого опишем вокруг этой точки окружность малого радиуса ϵ . Проведем через z_0 две взаимно перпендикулярные прямые. В точках z_{01} , z_{02} , z_{03} и z_{04} пересечения этих прямых с

окружностью приложим сосредоточенные силы, направленные в противоположные стороны, как показано на рис. 1. Считаем, что по прямой, составляющей угол $(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ с осью OX направлены силы \bar{P}_1 и \bar{P}_3 . Координаты точек z_{01}, z_{02}, z_{03} и z_{04} будут равны:

$$\begin{aligned} z_{01} &= z_0 + \varepsilon e^{i\alpha}; & z_{03} &= z_0 - \varepsilon e^{i\alpha}; \\ z_{02} &= z_0 + i\varepsilon e^{i\alpha}; & z_{04} &= z_0 - i\varepsilon e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Положим } |\bar{P}_1| = |\bar{P}_2| = |\bar{P}_3| = |P_4| = \frac{P}{2}.$$

Проекции сил на оси OX и OY примут вид:

$$\bar{P}_1 \left(\frac{P}{2} \cos \alpha; \frac{P}{2} \sin \alpha \right); \quad \bar{P}_3 \left(-\frac{P}{2} \cos \alpha; -\frac{P}{2} \sin \alpha \right);$$

$$\bar{P}_2 \left(-\frac{P}{2} \sin \alpha; \frac{P}{2} \cos \alpha \right); \quad \bar{P}_4 \left(\frac{P}{2} \sin \alpha; -\frac{P}{2} \cos \alpha \right).$$

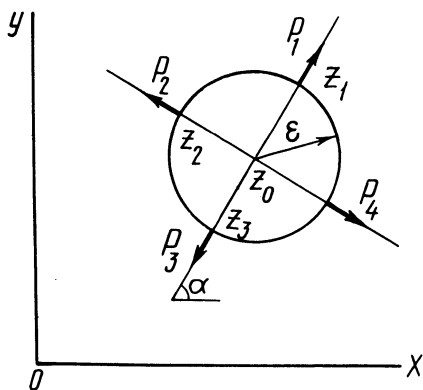


Рис. 1. Схема действия сил, образующих центр расширения.

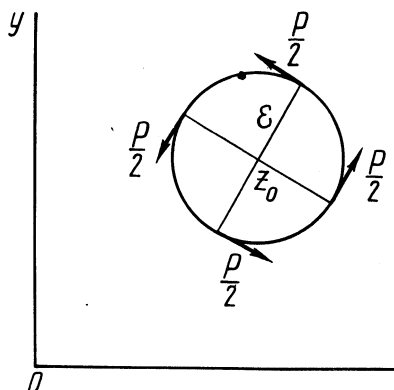


Рис. 2. Схема действия сил, образующих сосредоточенный момент.

После подстановки (3) и (4) в (1) с учетом соотношений $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$; $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ функция φ в случае совместного действия сил примет вид

$$\varphi = \frac{P e^{i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \left[\ln \frac{z - z_0 + \varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 - \varepsilon e^{-i\alpha}} + i \ln \frac{z - z_0 + i\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 - i\varepsilon e^{-i\alpha}} \right].$$

Переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем считаем $\varepsilon P = q = \text{const}$.

Выражение в квадратных скобках разложим в ряд, сохраняя только первый член, так как последующие члены с более высокими степенями ε дадут в произведении с P ноль при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\ln \frac{z - z_0 + \varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 - \varepsilon e^{i\alpha}} = \ln \left(1 + \frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0} \right) - \ln \left(1 - \frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0} \right) =$$

$$= \frac{2\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0} + \dots$$

Аналогично $\ln \frac{z - z_0 + i\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 - i\varepsilon e^{i\alpha}} = \frac{2i\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0} + \dots$

Окончательно $\varphi = \frac{qe^{2i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{i}{z - z_0} \right) = 0. \quad (5)$

Для функции φ получим

$$\psi = \frac{\varepsilon P e^{-i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \ln \frac{z - z_0 - \varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 + \varepsilon e^{i\alpha}} + \frac{i\varepsilon P e^{-i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \ln x$$

$$\times \frac{z - z_0 + i\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 - i\varepsilon e^{i\alpha}} + \left[\frac{(\bar{z}_0 + \varepsilon e^{-i\alpha}) P e^{i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{z - z_0 - \varepsilon e^{i\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\bar{z}_0 - \varepsilon e^{-i\alpha}) P e^{i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{z - z_0 + \varepsilon e^{i\alpha}} \right] +$$

$$+ \left[\frac{(\bar{z}_0 - i\varepsilon e^{-i\alpha}) P e^i}{4\pi(1+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{z - z_0 - \varepsilon e^{i\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\bar{z}_0 + i\varepsilon e^{-i\alpha}) P e^{i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{z - z_0 + i\varepsilon e^{i\alpha}} \right].$$

Окончательно ψ примет вид

$$\psi = \frac{(1 - \varepsilon) q}{(1 + \varepsilon) 2\pi} \cdot \frac{1}{z - z_0}.$$

Полученный таким образом центр расширения в точке z_0 инвариантен относительно поворота вокруг этой точки; q - интенсивность центра расширения.

Если теперь все силы на рис. 1 повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$, т.е. направить их по касательной к окружности, как показано на рис. 2, то после аналогичных выкладок получим

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{P e^{i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \ln \frac{z - z_0 - i\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 + i\varepsilon e^{i\alpha}} + \frac{i P e^{i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \ln x \\ & \times \frac{z - z_0 + \varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 - \varepsilon e^{i\alpha}}. \end{aligned}$$

После разложения φ в ряд по степеням ε с учетом $\varepsilon P = M = \text{const}$ получим $\varphi = 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для ψ получим

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\varepsilon P e^{-i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \ln \frac{z - z_0 + i\varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 - i\varepsilon e^{i\alpha}} + \frac{i \varepsilon P e^{-i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)} \ln x \\ & \times \frac{z - z_0 + \varepsilon e^{i\alpha}}{z - z_0 - \varepsilon e^{i\alpha}} + \left[\frac{P e^{i\alpha} (\bar{z}_0 + i\varepsilon e^{-i\alpha})}{4\pi(1+\varepsilon)(z - z_0 + i\varepsilon e^{i\alpha})} - \right. \\ & \left. - \frac{P e^{i\alpha} (\bar{z}_0 - i\varepsilon e^{-i\alpha})}{4\pi(1+\varepsilon)(z - z_0 - i\varepsilon e^{i\alpha})} \right] + \left[\frac{(\bar{z}_0 + \varepsilon e^{-i\alpha}) P i e^{i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)(z - z_0 - i\varepsilon e^{i\alpha})} - \right. \\ & \left. - \frac{(z_0 - \varepsilon e^{-i\alpha}) P i e^{i\alpha}}{4\pi(1+\varepsilon)(z - z_0 + \varepsilon e^{i\alpha})} \right]. \end{aligned}$$

После преобразований при $\varepsilon \rightarrow 0$ ψ примет вид

$$\psi = \frac{i M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z - z_0}.$$

Полученный таким образом сосредоточенный момент совпадает с введенным другим способом в [1].

Выберем в качестве рассматриваемой области круг радиуса R с центром в начале координат. Границу круга предполагаем свободной от внешних усилий. Найдем напряженное состояние внутри круга от действия в нем в точках $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ центров расширения.

$$\text{Решение ищем в виде } \varphi = \varphi_* \text{ и } \psi = \sum_{i=1}^n \frac{a}{z - z_i} + \psi_*,$$

$$\text{где } a = \frac{(1 - \varepsilon) q}{(1 + \varepsilon) 2\pi}.$$

Здесь φ_* и ψ_* голоморфные внутри области функции. Методом интегралов Коши [1, 2] нетрудно найти

$$\varphi_*(z) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{az}{2R^2} - \frac{az}{R^2 - zz_i} \right];$$

$$\psi_*(z) = \sum_{i=1}^n \frac{az_i(2R^2 - zz_i)}{(R^2 - zz_i)^2}.$$

Если обозначить $\phi(z) = \varphi'(z)$, $\psi(z) = \psi'(z)$, то общее решение запишется в виде

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{a}{2R^2} - \frac{aR^2}{(R^2 - z\bar{z}_i)^2} \right];$$

$$\psi(z) = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{a}{(z - z_i)^2} + \frac{a\bar{z}_i^2(3R^2 - z\bar{z}_i)}{R^2(R^2 - z\bar{z}_i)^3} \right]. \quad (7)$$

Полученные соотношения (7) могут быть использованы при решении ряда задач для многосвязных областей, решение которых, как известно, сопряжено с определенными трудностями при одновременном удовлетворении нескольким граничным условиям. Рассмотрим, например, решение задачи о напряженном состоянии внутри круговой области радиуса R под действием внутреннего давления P в кругах достаточно малого радиуса ε с центром в точках $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$. Полагая $q =$

$$= -\frac{(1 + \varepsilon) 2\pi \varepsilon^2 P}{(1 - \varepsilon)}, \text{ получим } a = -P \varepsilon^2.$$

Полученное в этом случае решение точно удовлетворяет граничному условию на внешнем контуре и приближенно на внутренних. Внутренние граничные условия будут выполняться тем точнее, чем дальше удалены отверстия друг от друга и от границы и чем меньше $(\frac{\epsilon}{R})^2$.

В частности, в случае действия одного центра расширения в начале координат получим решение задачи Ляме при внешнем давлении равным нулю и $R \rightarrow \infty$.

При этом внешнее условие выполнено точно, а внутреннее — с точностью до $(\frac{\epsilon}{R})^2$. В заключение отметим, что определенным образом задавая $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ и граничные условия, можно получить ряд интересных соотношений для случаев точного удовлетворения всем граничным условиям.

Для многосвязных областей произвольной конфигурации окончательный вид функций комплексного переменного находится аналогично из соответствующих внутренних и внешних граничных условий.

Резюме. Рассмотрен новый метод оценки напряженного состояния некоторых частных задач плоской теории упругости для многосвязных областей.

Л и т е р а т у р а

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 2. Лурье А. И. Теория упругости. М., 1970.

УДК 539.3

Н.Я. Бойко

К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЕКТОРА

Решение задач о равновесии цилиндрического сектора при заданных на торцах касательных напряжениях и нормальных перемещениях или при заданных на торцах нормальных напряжениях и касательных перемещениях ведем на основе вариационного метода перемещений, используя ряды Фурье, неполнота которых на торцах отрезка устраняется дополнительными членами.